Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas

Teoría de Negociación Aplicada a la Situación de Quiebra de la Empresa DINA CAMIONES S.A. de C.V.

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Raquel Vergara Lazacano

bajo la dirección de

Dr. Rubén A. Martínez Avendaño

Pachuca, Hidalgo. Septiembre de 2007.

Resumen

En esta tesis se estudian varias soluciones de negociación: la Solución de Negociación de Nash, la Solución de Negociación Kalai Smorodinsky, el Valor de Shapley y el Núcleo. Se aplican dichas soluciones a la situación de quiebra de una empresa.

Abstract

In this thesis we will study several negotiation solutions: the Nash Bargaining Solution, the Kalai Smorodinsky Bargaining Solution, the Shapley value and the Core. We will apply these solutions to a company's bankruptcy situation.

Dedicatoria

Con todo cariño a mi madre, a Roxana y a Gerardo.

Agradecimientos

Agradezco a todos los profesores del CIMA que me brindaron todo su apoyo en el transcurso de mis estudios, en especial a mi asesor de tesis, el Dr. Rubén A. Martínez Avendaño por la firmeza y la paciencia con que estuvo trabajando conmigo.

Índice general

Introducción

La necesidad de encontrar soluciones para diversos problemas que se plantean en las actividades humanas ha dado lugar al desarrollo de nuevas disciplinas matemáticas. Una de ellas es la Teoría de Juegos. Ésta es un área de las matemáticas aplicadas que utiliza modelos matemáticos. Pero, ¿qué son los modelos matemáticos? Son descripciones desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real, desde el tamaño de la población, hasta fenómenos físicos como la velocidad, aceleración, etc; su objetivo es entender ampliamente el problema y tal vez predecir su comportamiento en el futuro. De igual forma, nos permiten simplificar problemas de competencia, llamados juegos.

La Teoría de Juegos aparece en el momento en que los individuos interactúan con la finalidad de obtener el "mejor" resultado de una colección posible. Por ejemplo, cuando dos empresas compiten en el mercado, las decisiones que una empresa tome dependen de lo que la otra haga, o cuando el dueño de una casa negocia el precio de ésta con algún comprador para poder realizar la compra-venta de la casa.

La Teoría de Juegos es un tipo de toma de decisiones matemáticas que permite predecir cuál será el resultado más probable de una discusión entre varios individuos. Esta disciplina se basa principalmente en la racionalidad de los individuos (jugadores), la cual consiste en maximizar sus beneficios. De ahí, que se podría pensar que la solución a un juego consiste en resolver un problema matemático donde lo que tendríamos que hacer es maximizar los beneficios bajo circunstancias dadas.

Una situación importante, que puede ser abordada a través de esta disciplina, es la quiebra de empresas o instituciones. Declarada la quiebra, lo que sigue es resolver el problema de distribución, pues se tiene que asignar una cantidad que no es capaz de satisfacer las demandas de todas las partes implicadas en el reparto.

Cuando una empresa con problemas financieros enfrenta la realidad, tiene varias opciones: puede refinanciar su deuda, obtener una segunda opción productiva que sirva como fuente de ingreso, reducir gastos o bien vender algunos de sus activos. Sin embargo, la quiebra se convierte en la única opción efectiva para obtener una reorganización y un respiro a la presión que sobre la empresa ejercen los acreedores, los cuales amenazan con acciones de cobro.

El presente trabajo consiste en el estudio y aplicación de procedimientos que permitan aplicar reglas que consideran ciertos criterios y que, en cierta forma, satisfacen aspiraciones de los jugadores.

En el Capítulo 1 se estudia la Solución de Negociación de Nash para dos jugadores, las propiedades que esta solución satisface, y se generaliza la solución para el caso de n jugadores. En el Capítulo 2 se estudia la Solución de Negociación Kalai-Smorodinsky para dos jugadores junto con las propiedades que satisface y nuevamente se generaliza esta solución al caso de n jugadores. Abordando un poco los juegos cooperativos o coalicionales en el Capítulo 3 se estudian dos soluciones de negociación para este tipo de juegos: Núcleo y Valor de Shapley. Finalmente, en el Capítulo 4 se aplican todas estas soluciones a la situación de quiebra de la empresa DINA CAMIONES S.A. de C.V., ubicada en Cd. Sahagún, Hgo.

A principios del año 2001 los dueños de esta empresa aseguraban que estaban en quiebra y planteaban el cierre de DINA CAMIONES, dejando sin fuente de ingresos a sus 506 trabajadores, argumentando que no se les concedían créditos bancarios ni a la empresa ni a sus clientes; y argumentaban también la desaceleración de la economía norteamericana y la pérdida de un contrato para producir 9,000 camiones con Western Star Trucks. Por ello el Sindicato Nacional Independiente de Trabajadores de la Industria Automotriz, Similares y Conexos, titular del Contrato Colectivo de Trabajo (CCT) de DINA CAMIONES, propuso alternativas a la patronal para evitar el cierre: como reajuste parcial de la plantilla laboral, en los términos de dicho contrato, así como paros técnicos parciales. No obstante el 30 de julio del 2001, la empresa cerró su filial Dina Composites, que manufacturaba partes automotrices de fibra de vidrio, dejando sin empleo a 120 trabajadores que se resistieron a recibir su liquidación. Unos meses más tarde, el 10 de septiembre los dueños deciden cerrar por completo la empresa. Tras una larga negociación entre el sindicato y la empresa, en el mes de febrero del 2002, la empresa liquida a cada uno de los 506 trabajadores, pagándoles lo que por ley les correspondía más una parte (no lo que ellos demandaban) correspondiente al CCT. Según un estudio socioeconómico realizado al Contrato Colectivo de Trabajo (CCT) de esta empresa, cada uno de los trabajadores tenía derecho a un porcentaje equivalente al 150 % sobre su indeminización bruta, porcentaje que no fue cubierto en su totalidad. En el acuerdo firmado entre la empresa y el sindicato se declaró que a cada uno de los trabajadores se les pagara sólo una tercera parte de éste porcentaje.

En lo que se refiere a las aplicaciones en este trabajo, se trata de ver cómo es que se pudo haber distribuido la parte correspondiente al CCT entre los 506 trabajadores de la empresa.

Capítulo 1

Solución de Negociación de Nash

Vamos a dar inicio a este capítulo definiendo primero lo que es un problema de negociación así como la solución de negociación. Posteriormente se darán algunas otras definiciones que nos permitirán entender la Solución de Negociación de Nash.

¿Qué es un problema de negociación?
Es una situación en la cual dos o más partes deben cooperar para alcanzar la repartición de cierto objeto o cantidad monetaria, que no podría ser alcanzada de manera individual.

¿Qué es una solución de negociación?
Es una regla que especifica una asignación de utilidades para cada parte en un problema de negociación.

Enseguida discutiremos la solución de negociación de Nash para un juego de negociación entre dos personas iniciando con algunas definiciones.

Definición 1.1. Un juego de negociación entre dos personas consiste de dos jugadores (jugador 1 y jugador 2), un conjunto $S \neq \emptyset$ (alternativas factibles), una función de utilidad $u_i : S \to \mathbb{R}$ para cada jugador i y un par (d_1, d_2) de números reales llamado punto de desacuerdo (que puede interpretarse como los pagos que obtienen los jugadores si actúan de manera individual), tales que:

1. $u_1(s) \geq d_1$ y $u_2(s) \geq d_2$.
2. Al menos para un $s \in S$ se tiene que $u_1(s) > d_1$ y $u_2(s) > d_2$.

Note que sin la condición 2 de la definición anterior se tiene un juego trivial, pues al menos uno de los jugadores, decide mejor no entrar al juego. Por tanto, la condición 2 garantiza a ambos jugadores que hay al menos una alternativa que hace que estén en mejores condiciones, en relación con el punto de desacuerdo.

Usando notación matemática podemos escribir un problema de negociación como la terna

$$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$$

donde S, u_1, u_2, d_1, d_2 satisfacen las propiedades 1 y 2 de la Definición 1.1.

Definición 1.2. El conjunto de asignación de utilidades del juego de negociación $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ es el conjunto de pares $U = \{(u_1(s), u_2(s)) : s \in S\}$.

Dadas las definiciones anteriores, vamos a definir una solución del problema de negociación como una regla que asigna a cada juego de negociación B un subconjunto $s(B)$ del conjunto de alternativas factibles S. El conjunto $s(B)$ se puede interpretar como la colección de alternativas en S que ambos jugadores están dispuestos a elegir.

1.1

Propiedades de una solución de negociación

Para que una regla o solución de un juego pueda ser aceptada por los integrantes del mismo, ésta debe cumplir ciertas propiedades deseables por los jugadores. Veamos cuáles son.

Primero definamos el concepto de eficiencia.

- **Propiedad 1: Eficiencia**. Un resultado $s^\star \in S$ es eficiente, si no hay un resultado $s \in S$ que satisfaga

  1. $u_1(s) \geq u_1(s^\star)$ y $u_2(s) \geq u_2(s^\star)$ y
  2. $u_i(s) > u_i(s^\star)$ para al menos un jugador i.

Entonces cuando un resultado es eficiente, al dar más a un jugador, tiene que dar menos al otro, es decir, un resultado eficiente agota todas las oportunidades de mejorar las ganancias de ambos jugadores.

De ahí que si para todo juego de negociación B los resultados en el conjunto $s(B)$ son eficientes, diremos que la regla de solución $s(\cdot)$ es eficiente.

Otra propiedad que una solución de negociación debería tener es la independencia de alternativas irrelevantes, la cual opera de la siguiente forma. Supongamos que conocemos la solución s^* de un juego de negociación. Ahora, descartemos varias alternativas factibles para dicho juego, pero no la solución. Se tiene entonces que s^* sigue siendo la solución del nuevo juego, el cual tiene menos alternativas factibles. Por tanto las alternativas que restamos resultan ser irrelevantes.

- **Propiedad 2: Independencia de alternativas irrelevantes**. Una solución de negociación $s(\cdot)$ es independiente de alternativas irrelevantes si para todo juego de negociación
$$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$$
y para todo subconjunto T de S que satisface que $s(B) \subseteq T$, se tiene que $s(B_T) = s(B)$, donde B_T es el juego de negociación
$$B_T = \{T, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}.$$

La siguiente propiedad nos garantiza que la solución no será afectada por cambiar la escala o unidades en las cuales se mide la utilidad.

- **Propiedad 3: Independencia de transformaciones lineales**. Una solución de negociación $s(\cdot)$ es independiente de transformaciones lineales si para todo juego de negociación
$$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$$
y toda función de utilidad lineal de la forma $w_i(s) = b_i u_i(s) + a_i$, con a_i, b_i constantes, $b_i > 0$ para cada i, el juego de negociación
$$B^+ = \{S, (w_1, b_1 d_1 + a_1), (w_2, b_2 d_2 + a_2)\}$$
satisface $s(B^+) = s(B)$.

Una vez definidas las propiedades anteriores, vamos a describir una solución que satisface todas estas condiciones.

En principio, vamos a asociar a cada juego de negociación
$$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$$
la función
$$g_B(s) = (u_1(s) - d_1) \cdot (u_2(s) - d_2)\,.$$

Denotamos por $\sigma(B)$ el conjunto de todos los puntos que maximizan la función g_B, es decir
$$\sigma(B) = \{s \in S\ : g_B(s) = \max\{g_B(t) : t \in S\}\}.$$

Se tiene que $\sigma(B) = \emptyset$ cuando la función g_B no tiene un máximo sobre el conjunto S.

Recuérdese que un conjunto X en $\mathbb{R}$ se dice compacto si es cerrado y acotado. Un resultado de cálculo menciona que si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un conjunto compacto X, existen x_1, x_2 en X tales que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para toda $x \in X$.

De ahí que si el conjunto de asignación de utilidades
$$U = \{(u_1(s), u_2(s)) : s \in S\}$$

es un conjunto compacto, entonces la función continua $g : U \to \mathbb{R}$ definida por $g(u_1, u_2) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ tiene al menos un máximo. Es decir, existe un $(u_1^\star, u_2^\star) \in U$ que satisface $g(u_1, u_2) \leq g(u_1^\star, u_2^\star)$ para todo (u_1, u_2) en U.

Note que para cualquier $s^\star \in S$ para el cual se tiene que $u_1(s^\star) = u_1^\star$ y $u_2(s^\star) = u_2^\star$, se tiene que $s^\star \in \sigma(B)$, de ahí que $\sigma(B) \neq \emptyset$. Por lo tanto, un juego de negociación con un conjunto de asignación de utilidades compacto tiene al menos un punto en $\sigma(B)$.

A la función $\sigma(\cdot)$ la llamaremos **regla de solución de Nash**.

Después de haber hecho una revisión de los conceptos básicos de un juego de negociación vamos a enunciar parte de un importante teorema, el cual se debe a John Nash [1].

Teorema 1.3. ***La Solución de Negociación de Nash***. *Dentro de los juegos de negociación con conjuntos de asignación de utilidad compactos, la regla de Nash $\sigma(\cdot)$ es eficiente, independiente de alternativas irrelevantes e independiente de transformaciones lineales.*

Demostración. Vamos a suponer que B es un juego de negociación que tiene un conjunto de asignación de utilidades U compacto y que

$$M = \max\{g_B(s) : s \in S\}$$

donde

$$g_B(s) = (u_1(s) - d_1) \cdot (u_2(s) - d_2).$$

Sea $s^\star \in \sigma(B)$ es decir, $g_B(s^\star) = M$, que sabemos que existe por la discusión anterior al teorema.

Demostraremos que la solución de negociación es eficiente, independiente de alternativas irrelevantes e independiente de transformaciones lineales.

Para ver que $s^\star$ es eficiente supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe algún $s \in S$ tal que

$$u_1(s) > u_1(s^\star)$$

y

$$u_2(s) \geq u_2(s^\star).$$

Por otro lado, sabemos, por definición de juego de negociación que hay un resultado $t \in S$ que satisface $u_1(t) > d_1$ y $u_2(t) > d_2$, de lo que se sigue que

$$g_B(s^\star) \geq g_B(t) > 0.$$

Por lo tanto se tienen las siguientes desigualdades

$$u_1(s) > u_1(s^\star) > d_1$$
$$u_2(s) \geq u_2(s^\star) > d_2.$$

De las ecuaciones anteriores se tiene

$$\begin{aligned} g_B(s) &= (u_1(s) - d_1) \cdot (u_2(s) - d_2) \\ &> (u_1(s^\star) - d_1) \cdot (u_2(s^\star) - d_2) \\ &= g_B(s^*). \end{aligned}$$

Contradiciendo que $s^\star$ es un máximo de g_B. Por lo tanto $s^\star$ es eficiente.

Para ver que $s^\star$ es independiente de alternativas irrelevantes, recuérdese que si se tiene un conjunto A de reales con máximo a^* y se considera el subconjunto B de A, entonces el máximo del conjunto B es menor o igual que a^*, pero si se tiene que a^* está en B, entonces el máximo de ambos conjuntos coincide, y este es precisamente a^*. Entonces si $\sigma(B)$ consiste de todos los máximos de g_B en S, este conjunto no cambiará si consideramos el conjunto de todos los máximos de g_B sobre el subconjunto T de S, el cual satisface que $\sigma(B) \subseteq T$. Luego $\sigma(\cdot)$ es independiente de alternativas irrelevantes.

En cuanto a la independencia de transformaciones lineales, definamos para cada jugador i

$$w_i(s) = b_i u_i(s) + a_i$$

una transformación lineal de la función de utilidad u_i, con $b_i > 0$.
Sea

$$B^+ = \{S, (w_1, b_1 d_1 + a_1), (w_2, b_2 d_2 + a_2)\}$$

y

$$g_{B^+}(s) = [w_1(s) - (b_1 d_1 + a_1)] \, [w_2(s) - (b_2 d_2 + a_2)] \, .$$

Entonces

$$\begin{aligned} g_{B^+}(s) &= [w_1(s) - (b_1 d_1 + a_1)] \ [w_2(s) - (b_2 d_2 + a_2)] \\ &= [b_1 u_1(s) + a_1 - b_1 d_1 - a_1] \ [b_2 u_2(s) + a_2 - b_2 d_2 - a_2] \\ &= [b_1(u_1(s) - d_1)] \, [b_2(u_2(s) - d_2)] \\ &= b_1 b_2 g_B(s). \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que un resultado $s^\star \in S$ maximiza g_B si y sólo si maximiza g_{B^+}, lo cual implica que $\sigma(B) = \sigma(B^+)$. ■

Existe una cuarta propiedad de la solución de Negociación de Nash, la cual está relacionada con las propiedades del conjunto U, pero antes de mencionarla daremos una revisión a los conceptos de *convexidad* y *simetría*, los cuales se definen a continuación.

Definición 1.4. El conjunto de asignación de utilidades U de un juego de negociación es:

1. *Convexo*, si contiene todos los puntos del segmento de línea que une dos de sus puntos.
2. *Simétrico*, si siempre que $(u_1, u_2) \in U$, también $(u_2, u_1) \in U$.

Definición 1.5. Un juego de negociación B es:

1. *Convexo*, si el conjunto de asignación de utilidades es convexo.
2. *Compacto*, si el conjunto de asignación de utilidades es compacto.
3. *Simétrico*, si $d_1 = d_2$ y el conjunto de asignación de utilidades es simétrico.

- **Propiedad 4: Simetría**. Una solución $s(\cdot)$ se dice simétrica, si para todo juego de negociación simétrico B se tiene $u_1(s) = u_2(s)$ para cada $s \in s(B)$, es decir, los jugadores tienen las mismas utilidades en una solución.

Enseguida se expone la segunda parte del Teorema de Nash, en la que se considera la propiedad que se acaba de mencionar.

Teorema 1.6. ***La Solución de Negociación de Nash.*** *Si B es un juego de negociación convexo y compacto, entonces existe un único punto s^* en $\sigma(B)$. Además, la solución de Nash es simétrica.*

Demostración.
Vamos a demostrar la existencia y unicidad de s^* en $\sigma(B)$, con B un juego de negociación convexo y compacto. Considérese la función continua $g : U \to \mathbb{R}$ definida por $g(u_1, u_2) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$. Como U es compacto y g es continua entonces existe un máximo de g, digamos $(u_1^\star, u_2^\star)$. Supongamos que existe otro máximo $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ de g diferente de $(u_1^\star, u_2^\star)$.

Entonces $(u_1^\star - d_1)(u_2^\star - d_2) = (\bar{u}_1 - d_1)(\bar{u}_2 - d_2) = M$. Por la convexidad de U se tiene que $\left(\dfrac{u_1^\star + \bar{u}_1}{2}, \dfrac{u_2^\star + \bar{u}_2}{2}\right) \in U$. Luego

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u_1^\star + \bar{u}_1}{2}, \frac{u_2^\star + \bar{u}_2}{2}\right) &= \left(\frac{u_1^\star + \bar{u}_1}{2} - d_1\right)\left(\frac{u_2^\star + \bar{u}_2}{2} - d_2\right) \\ &= \left(\frac{(u_1^\star - d_1) + (\bar{u}_1 - d_1)}{2}\right)\left(\frac{(u_2^\star - d_2) + (\bar{u}_2 - d_2)}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $(u_1^\star, u_2^\star)$ y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ son dos máximos diferentes, puede ocurrir que $u_1^\star = \bar{u}_1$ o que $u_2^\star = \bar{u}_2$, pero no ambos a la vez. De ésto junto con la desigualdad aritmética-geométrica se tiene que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u_1^\star+\bar{u}_1}{2},\frac{u_2^\star+\bar{u}_2}{2}\right) &> \sqrt{(u_1^\star-d_1)(\bar{u}_1-d_1)}\,\sqrt{(u_2^\star-d_2)(\bar{u}_2-d_2)} \\ &= \sqrt{(u_1^\star-d_1)(u_2^\star-d_2)}\,\sqrt{(\bar{u}_1-d_1)(\bar{u}_2-d_2)} \\ &= \sqrt{M}\,\sqrt{M} \\ &= M. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que $g\left(\frac{u_1^\star+\bar{u}_1}{2},\frac{u_2^\star+\bar{u}_2}{2}\right) > g(u_1^\star,u_2^\star)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, no puede haber dos puntos máximos.

Para demostrar que la solución de Nash es simétrica vamos a suponer que el juego de negociación B es simétrico. Además, como la solución de Nash es independiente de transformaciones lineales, podemos considerar el juego de negociación B con punto de desacuerdo $d=(0,0)$. Por lo que $g_B(s)=u_1(s)u_2(s)$. Lo anterior significa que para maximizar $g_B(s)$, es suficiente maximizar la función $f(x,y)=xy$ sobre U. Note que U sigue siendo un conjunto convexo, compacto y simétrico.

Se tiene entonces que f alcanza su máximo, y supongamos que éste ocurre en $(x',y')\in U$. Vamos a demostrar que $x'=y'$. Note que la simetría de U implica que $(y',x')\in U$. Luego de la convexidad de U se sigue que

$$\frac{1}{2}\,(x',y')+\frac{1}{2}\,(y',x')=\left(\frac{1}{2}(x'+y'),\frac{1}{2}(x'+y')\right)\in U.$$

Además como $x'y'$ es el máximo se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,(x'+y')\cdot\frac{1}{2}\,(x'+y') &\leq x'y' \\ x'^2+2x'y'+y'^2 &\leq 4x'y' \\ (x'-y')^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $x'=y'$.

Con lo anterior ha quedado demostrado que existe una única asignación de utilidad de la forma (x',x'), la cual maximiza la función $f(x,y)=xy$ sobre U. Luego, $\sigma(B)=\{s\in S: u_1(s)=u_2(s)=x'\}$.■

Ejemplo 1.1.1. *Suponga que dos hermanos están negociando la herencia que les dejó su padre. Los bienes a repartirse son: un auto, una tienda, una cuenta bancaria, un hotel y un restaurante. La utilidad para cada uno se muestra en la siguiente tabla.*

Bien	u_1	u_2
Auto	4	6
Tienda	5	2
Cuenta	3	4
Hotel	2	6
Restaurante	6	5

Esta utilidad representa el valor (por ejemplo en millones de pesos) que de acuerdo a la situación, tiene cada uno de los bienes para cada uno de los jugadores.

Para este juego de negociación, S está formado por las distintas formas en que los jugadores pueden repartirse todos los bienes. En la siguiente tabla se muestra el conjunto S junto con la utilidad de cada $s \in S$ para cada uno de los jugadores. El punto de desacuerdo para este juego es $(d_1, d_2) = (0, 0)$.

Para simplificar, vamos a llamar al Auto A, a la Tienda T, a la Cuenta C, al Hotel H y al Restaurante lo llamaremos R.

Alternativas factibles	(u_1, u_2)	Alternativas factibles	(u_1, u_2)
$(ATHCR, \emptyset)$	$(20, 0)$	$(A, TCHR)$	$(4, 17)$
$(C, ATHR)$	$(3, 19)$	$(R, ATCH)$	$(6, 18)$
$(ACHR, T)$	$(15, 2)$	$(ATCR, H)$	$(18, 6)$
(AT, CHR)	$(9, 14)$	(AH, TCR)	$(6, 11)$
(TC, AHR)	$(8, 17)$	(TR, ACH)	$(11, 16)$
(CR, ATH)	$(9, 14)$	(ATC, HR)	$(12, 11)$
(ATR, CH)	$(15, 10)$	(ACR, TH)	$(13, 8)$
(TCH, AR)	$(10, 11)$	(CHR, AT)	$(11, 8)$
$(\emptyset, ATHCR)$	$(0, 23)$	$(T, ACHR)$	$(5, 21)$
$(H, ATCR)$	$(2, 17)$	$(TCHR, A)$	$(16, 6)$
$(ATHR, C)$	$(17, 4)$	$(ATCH, R)$	$(14, 5)$
(AC, THR)	$(7, 13)$	(AR, TCH)	$(10, 12)$
(TH, ACR)	$(7, 15)$	(CH, ATR)	$(5, 13)$
(HR, ATC)	$(8, 12)$	(ATH, CR)	$(11, 9)$
(ACH, TR)	$(9, 7)$	(AHR, TC)	$(12, 6)$
(TCR, AH)	$(14, 12)$	(THR, AC)	$(13, 10)$

En la Figura 1.1 se muestran los puntos que representan cada una de las utilidades para ambos jugadores.

La solución de negociación de Nash, es decir, el punto donde se maximiza el producto de las utilidades se alcanza cuando se tiene la repartición $s^* = (TCR, AH)$, $u_1(s^*) = 14$ y $u_2(s^*) = 12$. El valor del máximo es 168.

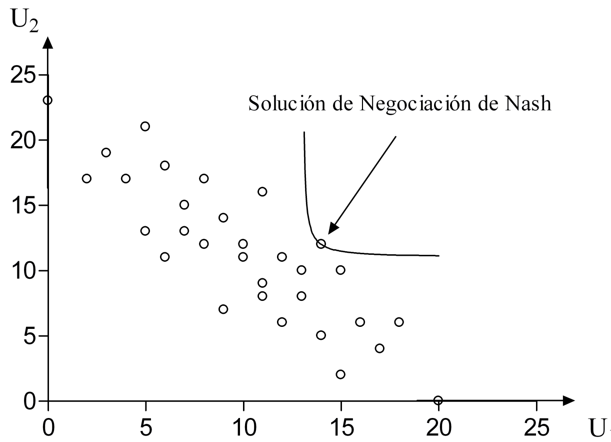

Figura 1.1: Solución de Negociación de Nash.

1.2

Solución de negociación de Nash para n jugadores

En esta sección vamos a generalizar la solución de negociación de Nash a n jugadores.

Definición 1.7. Un juego de negociación entre n jugadores está descrito por un conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de jugadores, un conjunto $S \neq \emptyset$, el cual conocemos como conjunto de alternativas factibles, una función de utilidad $u_i : S \to \mathbb{R}$ para cada jugador i y una n-ada $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ de números reales llamada punto de desacuerdo, tales que:

1. $u_i(s) \geq d_i$, para cada jugador i.

2. Al menos para un $s \in S$ se tiene que $u_i(s) > d_i$, para cada jugador i.

A continuación describiremos la Solución de Negociación de Nash para n jugadores.

Considere el conjunto de negociación

$$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}$$

donde $S, u_1, ..., u_n, d_1, \ldots, d_n$ satisfacen las propiedades 1 y 2 de la Definición 1.7.

Definición 1.8. El conjunto de asignación de utilidades del juego de negociación

$$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}$$

es el conjunto de n-adas

$$U = \{(u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)) \ : s \ \in S\}.$$

Entonces asociamos al juego de negociación B la función

$$g_B(s) = \prod_{i=1}^{n}(u_i(s) - d_i),$$

y nuevamente

$$\sigma(B) = \{s \in S \ : g_B(s) = \max\{g_B(t) : t \in S\}\}.$$

Ahora llamamos $\sigma(\cdot)$ a la regla de la solución de Nash para n jugadores.

Enseguida se exponen las definiciones de convexidad, compacidad y simetría para U y B.

Definición 1.9. El conjunto de asignación de utilidades U de un juego de negociación para n jugadores es:

1. *Convexo*, si contiene todos los puntos del segmento de línea que une dos de sus puntos.

2. *Simétrico*, si siempre que el vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ está en U, $u^\tau := (u_{\tau(1)}, u_{\tau(2)}, \ldots, u_{\tau(n)}) \in U$, para todo $\tau \in S_n$ donde S_n es el grupo de permutaciones.

Definición 1.10. Un juego de negociación B para n jugadores es:

1. *Convexo*, si el conjunto de asignación de utilidades es convexo.

2. *Compacto*, si el conjunto de asignación de utilidades es compacto.

3. *Simétrico*, si $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$ y el conjunto de asignación de utilidades es simétrico.

1.3

Propiedades de la solución de negociación de Nash para n jugadores

- **Propiedad 1: Eficiencia**. Un resultado $s^\star \in S$ es eficiente, si no hay un resultado $s \in S$ que satisfaga

  1. $u_1(s) \geq u_1(s^\star)$, $u_2(s) \geq u_2(s^\star)$,...,$u_n(s) \geq u_n(s^\star)$ y
  2. $u_i(s) > u_i(s^\star)$ para al menos un jugador i.

     Decimos que una solución $s(\cdot)$ es eficiente si para todo juego de negociación B, los resultados en $s(B)$ son eficientes.

- **Propiedad 2: Independencia de alternativas irrelevantes**. Una solución de negociación para n jugadores $s(\cdot)$ es independiente de alternativas irrelevantes si para todo juego de negociación

  $$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}$$

  y para todo subconjunto T de S que satisface que $s(B) \subseteq T$, se tiene que $s(B_T) = s(B)$, donde B_T es el juego de negociación

  $$B_T = \{T, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}.$$

- **Propiedad 3: Independencia de transformaciones lineales**. Una solución de negociación para n jugadores $s(\cdot)$ es independiente de transformaciones lineales si para todo juego de negociación

  $$B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}$$

  y una función de utilidad lineal de la forma $w_i(s) = b_i u_i(s) + a_i$, con a_i, b_i constantes, $b_i > 0$ para cada i, el juego de negociación

  $$B^+ = \{S, (w_1, b_1 d_1 + a_1), (w_2, b_2 d_2 + a_2), \ldots, (w_n, b_n d_n + a_n)\}$$

  satisface $s(B^+) = s(B)$.

- **Propiedad 4: Simetría**. Una solución $s(\cdot)$ se dice simétrica, si para todo juego de negociación simétrico B se tiene $u_1(s) = u_2(s) = \cdots = u_n(s)$ para cada $s \in s(B)$, es decir, los jugadores tienen las mismas utilidades en una solución.

Teorema 1.11. ***La Solución de Negociación de Nash***. *Dentro de los juegos de negociación para n jugadores cuyos conjuntos de asignación de utilidad son compactos, la regla de Nash $\sigma(\cdot)$ es eficiente, independiente de alternativas irrelevantes e independiente de transformaciones lineales.*

Demostración. Vamos a suponer que B es un juego de negociación que tiene un conjunto de asignación de utilidades U compacto y que

$$M = \max\{g_B(s) : s \in S\}$$

donde

$$g_B(s) = (u_1(s) - d_1) \cdot (u_2(s) - d_2) \cdots (u_n(s) - d_n).$$

Sabemos que M existe, pues la función g es continua y está definida en un conjunto compacto.

Sea $s^\star \in \sigma(B)$ es decir, $g_B(s^\star) = M$. Para ver que $s^\star$ es eficiente supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe algún $s \in S$ tal que

$$u_1(s) > u_1(s^\star), u_2(s) \geq u_2(s^\star), \ldots, u_n(s) \geq u_n(s^\star).$$

Sabemos, por definición de juego de negociación que hay un resultado $t \in S$ que satisface $u_1(t) > d_1$, $u_2(t) > d_2$,…,$u_n(t) > d_n$, donde se tiene que

$$g_B(s^\star) \geq g_B(t) > 0.$$

Por lo tanto se tienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} u_1(s) > u_1(s^\star) > d_1, \\ u_2(s) \geq u_2(s^\star) > d_2, \\ . \\ . \\ . \\ u_n(s) \geq u_n(s^\star) > d_n. \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores se concluye que

$$\begin{aligned} g_B(s) &= (u_1(s) - d_1) \cdot (u_2(s) - d_2) \cdots (u_n(s) - d_n) \\ &> (u_1(s^\star) - d_1) \cdot (u_2(s^\star) - d_2) \cdots (u_n(s^\star) - d_n) \\ &= g_B(s^*). \end{aligned}$$

Contradiciendo que $s^\star$ es un máximo de g_B, por lo tanto $s^\star$ es eficiente.

En cuanto a la independencia de transformaciones lineales, definamos para cada jugador i

$$w_i(s) = b_i u_i(s) + a_i$$

una transformación lineal de la función de utilidad u_i, con $b_i > 0$. Sea

$$B^+ = \{S, (w_1, b_1 d_1 + a_1), (w_2, b_2 d_2 + a_2), \ldots, (w_n, b_n d_n + a_n)\}$$

y

$$g_{B^+}(s) = [w_1(s) - (b_1 d_1 + a_1)]\ [w_2(s) - (b_2 d_2 + a_2)] \cdots [w_n(s) - (b_n d_n + a_n)]\,.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&g_{B^+}(s) = [w_1(s) - (b_1 d_1 + a_1)]\ [w_2(s) - (b_2 d_2 + a_2)] \cdots [w_n(s) - (b_n d_n + a_n)]\\
&= [b_1 u_1(s) + a_1 - b_1 d_1 - a_1]\,[b_2 u_2(s) + a_2 - b_2 d_2 - a_2] \cdots [b_n u_n(s) + a_n - b_n d_n - a_n]\\
&= [b_1(u_1(s) - d_1)]\ [b_2(u_2(s) - d_2)] \cdots [b_n(u_n(s) - d_n)]\\
&= b_1 b_2 \cdots b_n g_B(s).
\end{aligned}$$

Del resultado anterior concluimos que $s^\star \in S$ maximiza g_B si y sólo si maximiza a g_{B^+}, lo cual implica que $\sigma(B) = \sigma(B^+)$.

El que la solución de Nash para n jugadores sea independiente de alternativas irrelevantes se tiene de la discusión que se dió para el caso de dos jugadores. ■

De manera análoga al caso de dos jugadores, se tiene el siguiente terorema.

Teorema 1.12. ***La Solución de Negociación de Nash.*** *Si B es un juego de negociación convexo y compacto, entonces existe un único punto s^* en $\sigma(B)$. Además, la solución de Nash es simétrica.*

Demostración. Primero vamos a demostrar la existencia y unicidad de s^* en $\sigma(B)$. Sea B un juego de negociación convexo y compacto. Consideremos la función continua $g : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2) \cdots (u_n - d_n).$$

Como U es compacto y g es continua entonces existe un máximo de g, digamos $(u_1^\star, u_2^\star, \ldots, u_n^\star)$. Ahora, supongamos que existe otro máximo $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)$ de g diferente de $(u_1^\star, u_2^\star, \ldots, u_n^\star)$. Entonces se tiene que

$$(u_1^\star - d_1)(u_2^\star - d_2) \cdots (u_n^\star - d_n) = (\bar{u}_1 - d_1)(\bar{u}_2 - d_2) \cdots (\bar{u}_n - d_n) = M.$$

Por la convexidad de U se tiene que $\left(\frac{u_1^\star+\bar{u}_1}{2}, \frac{u_2^\star+\bar{u}_2}{2}, \ldots, \frac{u_n^\star+\bar{u}_n}{2}\right) \in U$. Luego

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u_1^\star+\bar{u}_1}{2}, \frac{u_2^\star+\bar{u}_2}{2}, \ldots, \frac{u_n^\star+\bar{u}_n}{2}\right) = &\left(\frac{u_1^\star+\bar{u}_1}{2} - d_1\right)\left(\frac{u_2^\star+\bar{u}_2}{2} - d_2\right) \\ &\cdots\left(\frac{u_n^\star+\bar{u}_n}{2} - d_n\right). \end{aligned}$$

Como $(u_1^\star, u_2^\star, \ldots, u_n^\star)$ y $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n)$ son dos máximos diferentes, de la desigualdad aritmética-geométrica se tiene que

$$\begin{aligned} g\left(\frac{u_1^\star+\bar{u}_1}{2}, \frac{u_2^\star+\bar{u}_2}{2}, \ldots, \frac{u_n^\star+\bar{u}_n}{2}\right) &> \sqrt{(u_1^\star-d_1)(\bar{u}_1-d_1)}\,\sqrt{(u_2^\star-d_2)(\bar{u}_2-d_2)} \\ &\quad\cdots\sqrt{(u_n^\star-d_n)(\bar{u}_n-d_n)} \\ &= \sqrt{(u_1^\star-d_1)(u_2^\star-d_2)\cdots(u_n^\star-d_n)} \\ &\quad\sqrt{(\bar{u}_1-d_1)(\bar{u}_2-d_2)\cdots(\bar{u}_n-d_n)} \\ &= \sqrt{M}\,\sqrt{M} \\ &= M. \end{aligned}$$

Se concluye entonces que el máximo de la función g_B es único.

Hasta esta parte, se ha demostrado que existe un único punto s^* en $\sigma(B)$. En lo que sigue vamos a demostrar que la solución de Nash es simétrica, es decir, que $u_1^\star = u_2^\star = \cdots = u_n^\star$. Para ello vamos a suponer que el juego de negociación B es simétrico. Además, como la solución de Nash es independiente de transformaciones lineales, podemos considerar el juego de negociación B con punto de desacuerdo $d = (0, 0, \ldots, 0)$. Por lo que $g_B(s) = u_1(s)u_2(s)\cdots u_n(s)$. Nuevamente, para maximizar $g_B(s)$ se maximiza la función $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$ sobre U. Note que U sigue siendo un conjunto convexo, compacto y simétrico.

Ya sabemos que f alcanza su máximo en algún punto, supongamos que éste ocurre en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La simetría de U implica que las $n!$ permutaciones de x están en U. Por lo que $(x_2, x_1, \ldots, x_n)$ está en U. Luego de la convexidad de U se tiene que

$$\frac{1}{2}[(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x_2, x_1, \ldots, x_n)] = (\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(x_2+x_1), x_3, \ldots, x_n) \in U.$$

Luego

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cdot\frac{1}{2}(x_2+x_1)\cdot x_3\cdots x_n \quad\leq\quad x_1x_2\cdots x_n$$

Como ninguno de los x_i tiene valor cero en un máximo se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2 &\leq x_1x_2\\ x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 &\leq 4x_1x_2\\ (x_1-x_2)^2 &\leq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(x_1-x_2)^2=0$, lo cual implica que $x_1=x_2$. Realizando el procedimiento anterior para cualesquiera dos transposiciones de x se tiene $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Finalmente se ha demostrado que existe una única asignación de utilidad de la forma $(a_1,a_1,\ldots,a_1)$ que maximiza la función $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$ sobre U.

Luego, $\sigma(B)=\{s\in S : u_1(s)=u_2(s)=\cdots=u_n(s)=a_1\}$.■

1.4

Solución de negociación de Nash en situaciones de quiebra

La solución de negociación de Nash, que como vimos en la sección anterior maximiza el producto de las utilidades de los jugadores, nos provee de una solución “razonable” si se tienen juegos de negociación simétricos. Sin embargo no funciona bien cuando se tienen asimetrías en el conjunto de asignación de utilidades, por ejemplo, cuando los jugadores no pueden pedir todo el dinero en juego.

En lo que sigue estudiaremos como funciona la solución de Nash en situaciones de quiebra, las cuales se tienen cuando los activos de una empresa son menores que sus responsabilidades. Sean Q los activos de una empresa y D_i la demanda del acreedor i contra la empresa en quiebra. Supongamos, en principio, que los jugadores son neutrales ante el riesgo (un peso esperado es igual a un peso con certeza) y que las demandas de cada uno de los acreedores tienen la misma antigüedad. La situación de quiebra ocurre cuando

$$Q<\sum_i D_i$$

Veamos que pasa con la siguiente situación de quiebra. Supongamos que se tienen \$50,000 en activos para repartir entre dos acreedores neutrales ante el riesgo con la misma antigüedad, a uno de los cuales se le deben \$40,000 y al otro \$80,000.

Suponiendo que el punto de desacuerdo es $(0, 0)$ la solución de Nash indica que hay que repartir a cada jugador \$25,000. Recuerde que la solución de Nash es el punto donde se maximiza el producto de las utilidades de los dos acreedores, por lo que se quiere maximizar el producto $u_1(s)u_2(s)$ restringido a $u_1(s)+u_2(s) \leq 50,000$. Como la utilidad de los jugadores se representa por la cantidad de dinero que ellos obtienen se tiene que $u^* = (25000, 25000)$. Una pregunta que nos puede venir a la mente es ¿por qué la solución de Nash otorga tanto dinero al acreedor con la deuda pendiente más pequeña? Más adelante daremos respuesta a esta pregunta e introduciremos una solución que realiza una distribución proporcional de los activos a las demandas de cada uno de los acreedores.

Enseguida vamos a ver como trabaja la solución de Nash en una situación de quiebra con dos acreedores neutrales ante el riesgo cuyas demandas tienen la misma antigüedad.

Sean Q los activos de la empresa en quiebra, D_1 y D_2 las demandas de los acreedores 1 y 2. Supongamos que $D_1 < D_2$ y $d = (0, 0)$, es decir, si los acreedores no se ponen de acuerdo en cuanto a la repartición de los activos ambos se retiran con las manos vacías. Vamos a dividir en dos casos, dependiendo de cuanto se tiene de los activos.

1. $D_1 > \frac{Q}{2}$. En este caso se busca el máximo de la función $g(c_1) = c_1(Q - c_1)$, restringida a $0 \leq c_1 \leq D_1$. El máximo de g ocurre en $c_1 = \frac{Q}{2}$ y por lo tanto $c_2 = \frac{Q}{2}$. De ahí que la solución de Nash divide los activos equitativamente entre ambos jugadores.

2. $D_1 \leq \frac{Q}{2}$. Aquí nuevamente se quiere maximizar $g(c_1) = c_1(Q - c_1)$, restringida a $0 \leq c_1 \leq D_1$, pero ahora con $D_1 \leq \frac{Q}{2}$. El máximo de g se alcanza en $c_1 = D_1$ y por lo tanto $c_2 = Q - D_1$. Por lo que la solución se Nash indica que hay que liquidar al acreedor 1 y pagar el resto de los activos al acreedor 2.

Observe que la Solución de Nash está "creando antigüedad"[2] donde no la hay, pues en un sistema de antigüedad, la deuda más antigua es la que se liquida primero, antes de dar algo a los demás acreedores, por lo que esta repartición resulta injusta para los acreedores con las demandas más grandes.

Note que si la cantidad de activos disponibles es precisamente la suma de las demandas de cada uno de los acreedores, según la solución de Nash hay que repartir a cada acreedor lo que se le debe.

En una situación de quiebra con n acreedores se tiene el juego de negociación en el que hay que repartir Q entre n acredores neutrales ante el riesgo, con la condición de quiebra $Q < \sum_{i=1}^{n} D_i$. El conjunto de negociación para el juego resultante es

$$S = \{(c_1, c_2, .., c_n) : \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i \leq Q,\ c_i \leq D_i, \text{para cada acreedor } i\}.$$

Como ya se incluyen las demandas de cada uno de los acreedores se tiene la restricción de que cada uno de los acreedores no puede pedir más de lo que se le debe.

Las utilidades de cada uno de los acreedores están dadas por

$$u_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = c_i, \text{ para cada acreedor } i,$$

es decir, su utilidad está en función de la cantidad de dinero que ellos obtienen.

Esta situación de asimetría en el conjunto de asignación de utilidades la podemos generalizar a n jugadores, para el caso en el que la cantidad de activos disponibles es insuficiente para pagar a cada acreedor lo que le corresponde. Con la siguiente proposición vamos a ver que para encontrar la solución de Nash en un juego que describe una situación de quiebra para n jugadores y bajo ciertas restricciones, es suficiente tratar de resolver el problema para un grupo de jugadores menor que n.

Proposición 1.1. *Sea $n \geq 3$. Considere los dominios*

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \leq \alpha_1, \ldots, x_{n-1} \leq \alpha_{n-1}, x_1 + \cdots + x_n \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}\}$$

y

$$J = \{(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : x_2 \leq \alpha_2, \ldots, x_{n-1} \leq \alpha_{n-1}, x_2 + \cdots + x_n \leq \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}\},$$

para los cuales se tiene que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_{n-1}$ y $\alpha_1 \leq \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n}$. Entonces, si existe un punto $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in H$ tal que $x'_1 x'_2 \cdots x'_n \geq x_1 x_2 \cdots x_n$ para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$, se tiene que $x'_1 = \alpha_1$ y $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n) \in J$. Además $x'_2 x'_3 \cdots x'_n \geq x_2 x_3 \cdots x_n$ para todo $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in J$.

Demostración.

La primera parte de la demostración consistirá en demostrar que $x'_1 = \alpha_1$, después de ésto se concluirán las otras dos partes.

Por hipótesis tenemos $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in H$ es tal que $x'_1 x'_2 \cdots x'_n \geq x_1 x_2 \cdots x_n$ para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in H$. Observemos que matemáticamente se tiene que si $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n < \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$, entonces siempre podemos sumar un $\epsilon > 0$ a x'_n (el cual no tiene restriccion), de manera tal que con el punto $(x'_1, x'_2, \ldots, (x'_n + \epsilon))$ se obtenga un valor más grande que el que se tiene con el punto $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Por lo que vamos a considerar al punto $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in H$ tal que

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}.$$

Enseguida se demuestra que $x'_1 = \alpha_1$. Primero vamos a demostrar que si $x'_1 < \alpha_1$, entonces $x'_j < \alpha_j$ para toda $j = 2, 3, \ldots, n-1$. Supongamos por contradicción que $x'_1 < \alpha_1$ pero $x'_k = \alpha_k$ para algún $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Nos preguntamos si podemos encontrar un $\epsilon > 0$ tal que $(x'_1 + \epsilon)x'_2 \cdots (x'_k - \epsilon) \cdots x'_n > x'_1 x'_2 \cdots x'_k \cdots x'_n$. Esto es posible si y sólo si $x'_k - x'_1 > 0$, pero como el poder elegir este ϵ nos lleva a una contradicción puesto que $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ es un máximo, se debe tener que $x'_k - x'_i \leq 0$. De aquí se tendría que $\alpha_k = x'_k \leq x'_1 < \alpha_1$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis $\alpha_1 \leq \alpha_k$ para toda $j = 2, 3, \ldots, n-1$. Concluimos entonces que si $x'_1 < \alpha_1$, entonces $x'_j < \alpha_j$ para toda $j = 2, 3, \ldots, n-1$.

Ahora vamos a demostrar que si x'_i es tal que $x'_i < \alpha_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ entonces $x'_i = x'_n$.

Supongamos por un lado que $x'_i < x'_n$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n-1$, entonces podemos elegir un $\epsilon > 0$ tal que $(x'_n - x'_i) > \epsilon$. Esto implica que

$$x'_1 x'_2 \cdots (x'_i + \epsilon) \ldots (x'_n - \epsilon) > x'_1 x'_2 \cdots x'_i \cdots x'_n,$$

lo cual nuevamente es una contradicción puesto que $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ es un máximo.

Supongamos ahora $x'_i > x'_n$. En este caso nuevamente podemos elegir un $\epsilon > 0$ tal que $(x'_i - x'_n) > \epsilon$. Pero esto implica otra vez que

$$x'_1 x'_2 \ldots (x'_i - \epsilon) \cdots (x'_n + \epsilon) > x'_1 x'_2 \cdots x'_i \cdots x'_n,$$

lo cual sigue siendo una contradicción puesto que $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ es un máximo.

Por tanto se concluye que $x'_i = x'_n$ para todos los x'_i tales que $x'_i < \alpha_i$. Sustituyendo ésto en la igualdad $x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \\ n x'_n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \\ x'_n &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que por un lado $0 = x'_n - x'_1$, pues como $x'_1 < \alpha_1$ entonces $x'_1 = x'_n$, y por otro

$$x'_n - x'_1 > \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n} - \alpha_1,$$

y esta desigualdad implica

$$0 > \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n} - \alpha_1,$$

lo cual es una contradicción, pues por hipótesis

$$\alpha_1 \leq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n}.$$

Por lo tanto queda demostrado que $x'_1 = \alpha_1$.

Por otro lado, como $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in H$ es tal que

$$x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}$$

y como ya se demostró que $x'_1 = \alpha_1$ se sigue que

$$x'_2 + x'_3 + \cdots + x'_n = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}$$

con $x_2 \leq \alpha_2, \ldots, x_{n-1} \leq \alpha_{n-1}$, es decir, $(x'_2, x'_3, \ldots, x'_n) \in J$. En cuanto a la última parte de la proposición, se debe tener que $x'_2 x'_3 \cdots x'_n \geq x_2 x_3 \cdots x_n$ para todo $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in J$ pues de no ser así se tendría $x'_2 x'_3 \cdots x'_n < x_2 x_3 \cdots x_n$, para algún $(x_2, x_3, \ldots, x_n) \in J$, de ahí que

$$\alpha_1 x'_2 x'_3 \cdots x'_n < \alpha_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

con $(\alpha_1, x'_2, \ldots, x'n) \in H$ y ésto es nuevamente una contradicción. ∎

Con la proposición anterior queda justificado un método para encontrar el máximo de la función que determina la Solución de Negociación de Nash en conjuntos de asiganación de utilidades no simétricos.

Entonces, si queremos encontrar la Solución de Negociación de Nash para el siguiente juego de negociación $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}$, que describe una situación de quiebra donde

$$S = \{(c_1, c_2, .., c_n) : \textstyle\sum_{i=1}^{n} c_i \leq Q,\ c_i \leq D_i, \text{para cada acreedor } i \leq n-1\}$$

y $Q \leq \sum_{i=1}^{n-1} D_i$, lo primero que hay que hacer es ordenar las demandas de los jugadores en el siguiente orden $D_1 \leq D_2 \leq \cdots \leq D_{n-1}$, de tal forma que D_1 sea la demanda menor y D_{n-1} sea la demand más grande. Enseguida hay que checar como es la demanda más pequeña D_1 respecto a los activos disponibles. Si $D_1 > \dfrac{Q}{n}$ entonces hay que dividir equitativamente los activos disponibles entre los n jugadores. En caso contrario se liquida la demanda D_1 y se considera entonces el juego más pequeño formado por los $n-1$ jugadores restantes con $Q-D_1$ activos disponibles. Nuevamente hay que aplicar la Proposición 1.1 al producto de los $n-1$ jugadores restantes, para asegurarnos de que a ningún jugador se le esté pagando más de lo que se le debe y así sucesivamente hasta agotar todos los activos disponibles.

Ejemplo 1.4.1. *Suponga que se tienen* \$20,000 *disponibles para repartir entre 5 jugadores. Al jugador 1 se le deben* \$3,000*, el jugador 2 exige* \$4,000*, tanto al jugador 3 como al jugador 4 se les deben* \$8,000 *y el jugador 5 no tiene restricción sobre la cantidad de activos a pedir. ¿Cómo se distribuyen los* \$20,000 *entre los cinco jugadores de acuerdo a la Solución de Negociación de Nash?*

Se tiene que $D_1 = \$3,000$*,* $D_2 = \$4,000$*,* $D_3 = D_4 = \$8,000$*. Observe que no se cuenta con los activos suficientes para dar a cada jugador lo que le corresponde, por lo que hay que aplicar el método anterior. En principio se tiene que* $D_1 < \frac{20,000}{5}$*, entonces al jugador 1 se le pagan sus* $\$3,000$*. Nuevamente de aplica el método al juego formado por los 4 jugadores restantes y los* $\$17,000$*. Como* $\$4,000 < \frac{17,000}{4}$*, se liquida al jugador 2 y se vuelve a aplicar el método al juego formado ahora por los tres jugadores restantes con* $\$13,000$ *disponibles. Como* $D_3 > \frac{13,000}{3}$*, los activos disponibles hasta este momento* $\$13,000$ *se dividen equitativamente entre los tres jugadores restantes, por lo que los jugadores 3, 4 y 5 reciben* $\$4,333$*.*

Podemos entonces conlcuir que la solución de Nash no se comporta bien bajo asimetrías en el conjunto de asignación de utilidades, aunque satisface otras propiedades. Desafortunadamente en los juegos de negociación se generan muchas situaciones, las cuales exigen que una solución razonable para éstos cumpla ciertas propiedades y de ahí ésta pueda ser aceptada por todos los jugadores. Pasemos ahora a analizar la siguiente situación.

Supongamos que tenemos el juego de negociación de la Figura 1.2 A, cuyo conjunto de asignación de utilidades es U_T. La solución de Nash para este juego es $(3,3)$. Luego, consideremos el juego de negociación de la Figura 1.2 B, con conjunto de asignación de utilidades U, en éste, se aumentaron las posibilidades de utilidad y ahora la nueva posibilidad $(2,6)$ constituye la nueva solución de negociación de Nash. Observe que aunque el conjunto de asignación de utilidades U_T del juego de negociación (a) es un subconjunto estricto del conjunto de asignación de utilidades U del juego de negociación (b), la utilidad que obtiene el jugador 1 con la solución de Nash es mayor a la que obtiene en el juego más grande.

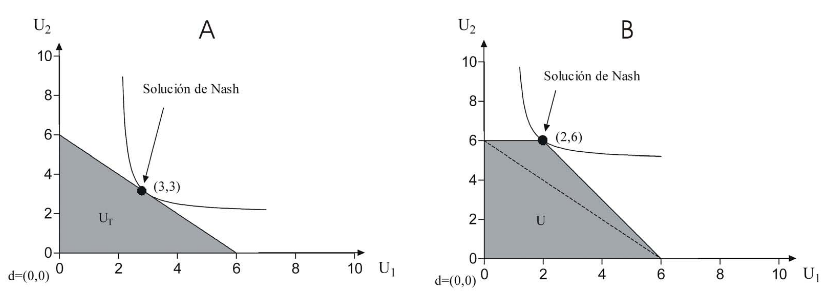

Figura 1.2: La solución de negociación de Nash no satisface monotonicidad.

En situaciones como la anterior, se esperaría que dado un juego de negociación con su respectiva solución, la solución para el juego que se obtiene una vez que se aumenta el conjunto de posibilidades para la solución, otorgue a todos los jugadores al menos tanta utilidad como la que ellos obtienen en la solución original. A continuación se define de manera formal esta propiedad para una solución de negociación.

Definición 1.13.

Monotonicidad. Una solución $s(\cdot)$ es monótona, si para todo juego de negociación $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ y todo subconjunto T de S el conjunto solución $s(B)$ domina el conjunto solución $s(B_T)$ del juego de negociación $B_T = \{T, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ en el siguiente sentido:
Para cada $s \in s(B_T)$ existe algún $s' \in s(B)$ que satisface

$$u_1(s') \geq u_1(s) \quad \text{y} \quad u_2(s') \geq u_2(s).$$

En el siguiente capítulo se estudia la solución de negociación propuesta por E. Kalai y M. Smorodisnky [1], la cual satisface monotonicidad en cierto sentido débil.

Capítulo 2

Solución de Negociación de Kalai-Smorodinsky

A continuación daremos algunas definiciones que nos permitirán caracterizar la solución de negociación de Kalai-Smorodinsky para dos jugadores.

Dado un juego de negociación $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$, sean

$$\mu_1 = \text{máx}\{u_1(s) : \ s \in S\} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \text{máx}\{u_2(s) : \ s \in S\}$$

siempre que el máximo exista. Si el conjunto de asignación de utilidades de B es compacto, entonces μ_1 y μ_2 existen. Llamaremos a la pareja (μ_1, μ_2) el vector de utilidades máximas.

Definición 2.1. **Línea *Kalai-Smorodinsky* (o línea KS).** Vamos a llamar línea KS del juego de negociación B a la línea en el plano u_1u_2 con pendiente $k = \dfrac{\mu_2 - d_2}{\mu_1 - d_1}$ y que pasa por el punto (d_1, d_2). Su ecuación está dada por

$$u_2 - d_2 = k(u_1 - d_1).$$

Note que $k > 0$.

Definición 2.2. **Asignación de utilidad Kalai-Smorodinsky (o utilidad KS)**. Definimos la asignación de utilidad KS del juego de negociación B como el punto "más alejado"$(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ sobre la línea KS y que se encuentra en el conjunto de asignación de utilidades U.

Si consideramos el conjunto

$$K = \{s \in S : (u_1(s), u_2(s)) \in U, \ u_2(s) - d_2 = k(u_1(s) - d_1)\}$$

entonces

$$\bar{u}_1 = \text{máx}\{u_1(s) : \ s \in K\} \quad \text{y} \quad \bar{u}_2 = k(\bar{u}_1 - d_1) + d_2$$

El significado geométrico es mostrado en la Figura 2.1.

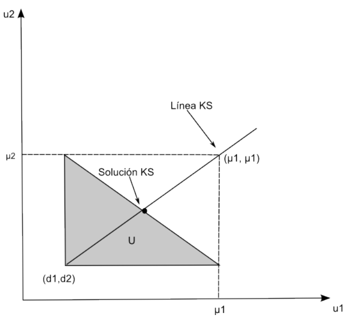

Figura 2.1: Solución Kalai-Smorodinsky.

Note que K puede tener a los más un elemento y en el peor de los casos $K = \emptyset$. Denotaremos la solución (o regla) Kalai-Smorodinsky $\kappa(\cdot)$ por

$$\kappa(B) = \{s \in S : u_1(s) = \bar{u}_1 \text{ y } u_2(s) = \bar{u}_2\}.$$

2.1

Propiedades de la solución Kalai-Smorodinsky

- **Propiedad 1: Eficiencia**

  Vamos a demostrar que en todo juego de negociación convexo y compacto, $\kappa(B) = \{s \in S : u_1(s) = \bar{u}_1 \text{ y } u_2(s) = \bar{u}_2\}$ consta de resultados eficientes. Sea $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ un juego de negociación convexo y compacto. Supongamos primero que existe un $s \in S$ tal que $u_1(s) > \bar{u}_1$ y $u_2 \geq \bar{u}_2$. Como el conjunto de asignación de utilidades U es compacto, se tiene que $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ es un punto que se encuentra en la frontera del conjunto U, pues de no ser así se podría construir una vecindad del punto $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ de tal forma que se pueda tener un $s' \in K$ con $u_1(s') > \bar{u}_1$ y $u_2(s') > \bar{u}_2$, contradiciendo el hecho de que $\bar{u}_1 = \text{máx}\{u_1(s) : \ s \in K\}$. Luego, por la convexidad de U se puede trazar una línea de pendiente negativa a través de $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ de manera que el conjunto U quede completamente contenido en uno de los semiplanos que origina ésta línea, por lo que si se supone $u_1(s) > \bar{u}_1$ y $u_2(s) \geq \bar{u}_2$, entonces $(u_1(s), u_2(s))$ estaría contenido en el otro semiplano, lo cual es una contradicción. De manera análoga se tiene que si suponemos que existe un $s \in S$ tal que $u_1(s) \geq \bar{u}_1$ y $u_2 > \bar{u}_2$, entonces $(u_1(s), u_2(s)) \notin U$. Finalmente concluimos que la solución KS es eficiente.

- **Propiedad 2: Independencia de transformaciones lineales**

  Enseguida vamos a demostrar que la solución Kalai-Smorodinsky es independiente de transformaciones lineales. Nos gustaría ver que $\kappa(B) = \kappa(B^+)$, para B el juego de negociación $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ y B^+, el juego de negociación obtenido por la transformación lineal $w_1(s) = b_1 u_1(s) + a_1$ y $w_2(s) = b_2 u_2(s) + a_2$ con $b_1 > 0$ y $b_2 > 0$ y punto de desacuerdo (d_1^+, d_2^+), el cual está dado por

$$d_1^+ = b_1 d_1 + a_1 \quad \text{y} \quad d_2^+ = b_2 d_2 + a_2.$$

  Se tiene que $k = \dfrac{\mu_2 - d_2}{\mu_1 - d_1}$ es la pendiente de la línea KS para B. De ahí que la solución KS está dada por

$$\kappa(B) = \{s \in S : u_1(s) = \bar{u}_1 \ \text{ y } \ u_2(s) = \bar{u}_2\},$$

  donde

$$\bar{u}_1 = \text{máx}\{u_1(s) : \ s \in K\} \quad \text{y} \quad \bar{u}_2 = k(\bar{u}_1 - d_1) + d_2.$$

  Ahora veamos que pasa con la solución KS para B^+. Tenemos que la pendiente de la línea KS está dada por

$$k^+ = \frac{\mu_2^+ - d_2^+}{\mu_1^+ - d_1^+} = \frac{b_2\mu_2 + a_2 - (b_2 d_2 + a_2)}{b_1\mu_1 + a_1 - (b_1 d_1 + a_1)} = \frac{b_2(\mu_2 - d_2)}{b_1(\mu_1 - d_1)} = \frac{b_2}{b_1}k.$$

  Entonces la solución KS está dada por

$$\kappa(B^+) = \{s \in S : w_1(s) = \bar{w}_1 \ \text{ y } \ w_2(s) = \bar{w}_2\},$$

  donde

$$\bar{w}_1 = \text{máx}\{w_1(s) : \ s \in K\} \quad \text{y} \quad \bar{w}_2 = k^+(\bar{w}_1 - d_1^+) + d_2^+.$$

  Vamos a suponer que se tiene una alternativa $s \in S$ tal que $w_1(s) = \bar{w}_1$ y $w_2(s) - d_2^+ = k^+(\bar{w}_1 - d_1^+)$. Entonces si $w_1(s) = \bar{w}_1$, por un lado se tiene que

$w_1(s) = b_1u_1(s) + a_1$ y por otro

$$\begin{aligned}
\bar{w}_1 &= \text{máx}\{w_1(s) : \ s \in K\} \\
&= \text{máx}\{b_1u_1(s) + a_1 : \ s \in K\} \\
&= b_1 \,\text{máx}\{u_1(s) : \ s \in k\} + a_1 \\
&= b_1\bar{u}_1 + a_1.
\end{aligned}$$

De lo que se concluye que $w_1(s) = \bar{w}_1$ si y sólo si $u_1(s) = \bar{u}_1$.

Ahora veamos que pasa con $w_2(s) - d_2^+ = k(\bar{w}_1 - d_1^+)$,

$$\begin{aligned}
w_2(s) - d_2^+ &= k^+(\bar{w}_1 - d_1^+) \\
(b_2u_2(s) + a_2) - (b_2d_2 + a_2) &= k^+(b_1\bar{u}_1 + a_1 - (b_1d_1 + a_1)) \\
b_2(u_2(s) - d_2) &= k^+b_1(\bar{u}_1 - d_1) \\
u_2(s) - d_2 &= k(\bar{u}_1 - d_1).
\end{aligned}$$

De lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\kappa(B^+) &= \{s \in S : w_1(s) = \bar{w}_1 \text{ y } w_2(s) - d_2^+ = k^+(\bar{w}_1 - d_1)\} \\
&= \{s \in S : u_1(s) = \bar{u}_1 \text{ y } u_2(s) - d_2 = k(\bar{u}_1 - d_1)\} \\
&= \kappa(B).
\end{aligned}$$

- **Propiedad 3: Monotonicidad**

  Vamos a demostrar que la solución KS satisface monotonicidad bajo la hipótesis de que tanto la línea KS del conjunto de asignación de utilidades del juego original como la del conjunto que se obtiene al aumentar el conjunto de posibilidades para la solución tienen la misma pendiente.

  Sean $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ y $B_T = \{T, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ dos juegos de negociación con T un subconjunto de S, $s(B)$ y $s(B_T)$ los conjuntos solución para B y B_T respectivamente. Queremos demostrar que para cada $s^* \in \kappa(B_T)$ existe un $s' \in \kappa(B)$ tal que $u_1(s') \geq u_1(s^*)$ y $u_2(s') \geq u_2(s^*)$.

  Tenemos que aunque se aumenta el conjunto de posibilidades para la solución, la línea KS para el conjunto U tienen la misma pendiente que la línea KS para el conjunto U_T, de ahí que el punto que se encuentra sobre la línea KS y que corta a U es el mismo o está más alejado del punto que corta al conjunto U_T. Por lo cual $u_1(s') \geq u_1(s^*)$ y $u_2(s') \geq u_2(s^*)$.

- **Propiedad 4: No satisface independencia de alternativas irrelevantes**

  Ahora vamos a ver que la solución KS no satisface independencia de alternativas irrelevantes.

  En la Figura 2.2 se observa que cuando se eliminan alternativas en el juego de negociación original, es decir, cuando se considera el juego del lado derecho, la pendiente para la línea KS de U es diferente a la pendiente de la línea KS para U_T, por lo que la asignación de utilidad KS para U_T reparte una utilidad menor para el jugador 2 y una utilidad mayor para el jugador 1.

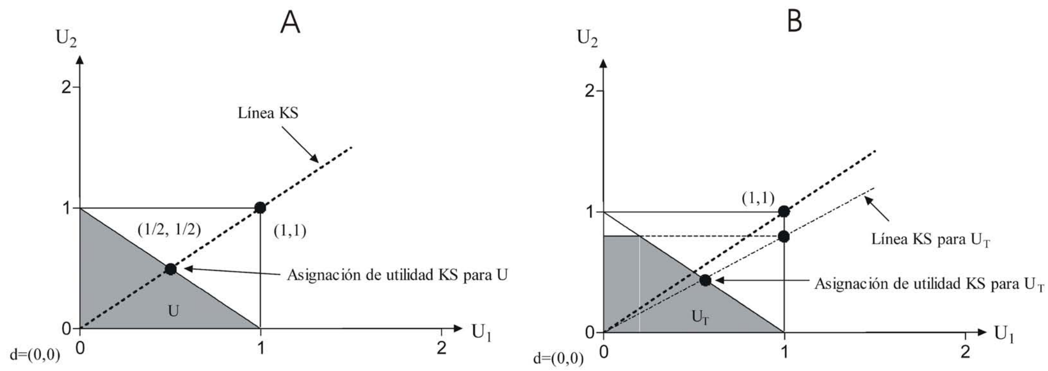

Figura 2.2: La solución Kalai Smorodinsky falla independencia de alternativas irrelevantes.

- **Propiedad 5: Todo juego de negociación convexo y compacto B tiene una asignación de utilidad KS**

  Sea $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ un juego de negociación convexo y compacto. Supongamos además que $(d_1, d_2) \in U$. Como B tiene un conjunto de asignación de utilidades U compacto, existe el vector de utilidades máximas (μ_1, μ_2), luego si $(d_1, d_2) \in U$ y dada la convexidad de U se sigue que éste tiene una asignación de utilidad KS.

- **Propiedad 6: Si B es un juego de negociación convexo, compacto y simétrico, entonces la solución Kalai-Smorodinsky y la solución de Nash coinciden: $\kappa(B) = \sigma(B)$.**

  Sea $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2)\}$ un juego de negociación convexo, compacto y simétrico. De las propiedades de B se tiene que $d_1 = d_2$ y U es un conjunto convexo, compacto y simétrico. En cuanto a la solución de Nash se tiene que ésta se encuentra sobre el conjunto $\{(u_1, u_2) : \ u_1 = u_2\}$. Luego como $k = \frac{\mu_2 - d_2}{\mu_1 - d_1} = 1$, la línea KS tiene ecuación $u_2 = u_1$, quedando

$$K = \{s \in S : (u_1(s), u_2(s)) \in U, \ u_2(s) = u_1(s)\}$$

con

$$\bar{u}_1 = \text{máx}\{u_1(s) : \ s \in K\} \quad \text{y} \quad \bar{u}_2 = \bar{u}_1,$$

y este máximo $\bar{u}_1$ es el mismo que maximiza el producto de Nash $u_1 u_1$ en U. Por tanto, ambas soluciones coinciden.

Ejemplo 2.1.1. *Volvamos al Ejemplo 1.1.1 del capítulo anterior. La utilidad para cada uno de los jugadores está representada de la siguiente forma:*

Bien	u_1	u_2
Auto	*4*	*6*
Tienda	*5*	*2*
Cuenta	*3*	*4*
Hotel	*2*	*6*
Restaurante	*6*	*5*

Nuevamente el conjunto S, está formado por las distintas formas en que los jugadores pueden repartirse todos los bienes. El punto de desacuerdo para este juego es $(d_1, d_2) = (0, 0)$.

En la Figura 2.3 se muestran los puntos que representan cada una de las utilidades para ambos jugadores, así como la línea KS, ésta tiene pendiente $k = 23/20$ y pasa por el $(0, 0)$. Como el conjunto $K = \emptyset$ se tiene que no existe solución KS.

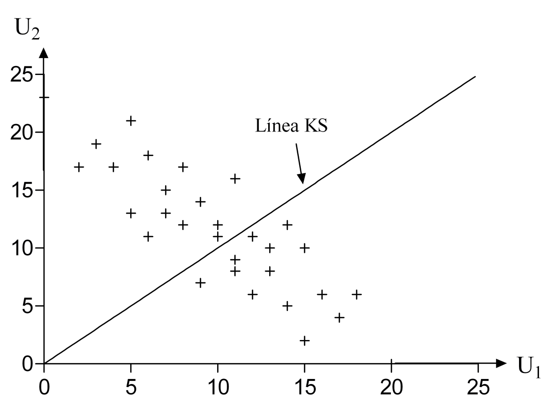

Figura 2.3: No hay solución Kalai-Smorodinsky.

Ejemplo 2.1.2. *Ahora supongamos que ambos jugadores tienen la misma utilidad para cada una de las propiedades. Ésta se representa en la siguiente tabla.*

Bien	u_1	u_2
Auto	*5*	*5*
Tienda	*4*	*4*
Cuenta	*3*	*3*
Hotel	*4*	*4*
Restaurante	*8*	*8*

Entonces se tiene la siguiente asignación de utilidad.

Alternativas factibles	(u_1, u_2)	*Alternativas factibles*	(u_1, u_2)
$(ATHCR, \emptyset)$	$(24, 0)$	$(A, TCHR)$	$(5, 19)$
$(C, ATHR)$	$(3, 21)$	$(R, ATCH)$	$(8, 16)$
$(ACHR, T)$	$(20, 4)$	$(ATCR, H)$	$(21, 3)$
(AT, CHR)	$(9, 15)$	(AH, TCR)	$(8, 16)$
(TC, AHR)	$(8, 16)$	(TR, ACH)	$(12, 12)$
(CR, ATH)	$(12, 12)$	(ATC, HR)	$(13, 11)$
(ATR, CH)	$(17, 7)$	(ACR, TH)	$(17, 7)$
(TCH, AR)	$(11, 13)$	(CHR, AT)	$(15, 9)$
$(\emptyset, ATHCR)$	$(0, 24)$	$(T, ACHR)$	$(4, 20)$
$(H, ATCR)$	$(4, 20)$	$(TCHR, A)$	$(19, 5)$
$(ATHR, C)$	$(20, 4)$	$(ATCH, R)$	$(16, 8)$
(AC, THR)	$(9, 15)$	(AR, TCH)	$(13, 11)$
(TH, ACR)	$(7, 17)$	(CH, ATR)	$(7, 17)$
(HR, ATC)	$(11, 13)$	(ATH, CR)	$(12, 12)$
(ACH, TR)	$(12, 12)$	(AHR, TC)	$(16, 8)$
(TCR, AH)	$(16, 8)$	(THR, AC)	$(15, 9)$

En la Figura 2.4 se muestran los puntos que representan cada una de las utilidades para ambos jugadores. Para este juego $\mu_1 = 24$, *y* $\mu_2 = 24$. *Como el punto de desacuerdo es* $(0, 0)$, *la pendiente de la línea KS es 1. El conjunto K está formado por el punto* $(12, 12)$. *Luego la solución KS se tiene cuando se da la asignación de utilidad* $(12, 12)$, *es decir, cuando se tiene la siguiente repartición de bienes* (TR, ACH), (CR, ATH), (ATH, CR) *o* (ACH, TR). *Note que la solución de negociación de Kalai-Smorodinsky para este juego coincide con la solución de Nash.*

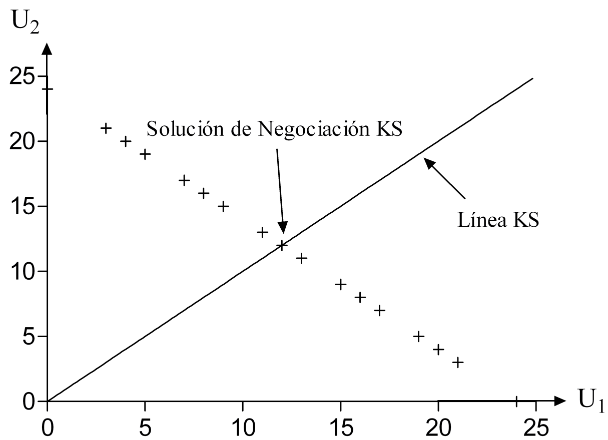

Figura 2.4: Solución Kalai-Smorodinsky.

2.2

Solución de negociación Kalai-Smorodinsky para n jugadores

En esta sección se muestra una descripción de la solución de negociación de Kalai-Smorodinsky para n jugadores.

Dado un juego de negociación $B = \{S, (u_1, d_1), (u_2, d_2), \ldots, (u_n, d_n)\}$ definimos los números $\mu_1 = \text{máx}\{u_1(s) : \ s \in S\}, \ldots, \mu_n = \text{máx}\{u_n(s) : \ s \in S\}$ siempre que el máximo exista. Denotaremos por $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ al punto de desacuerdo, el vector de utilidades se denotará por $u = (u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s))$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ denotará al vector de utilidades máximas.

Definición 2.3. Línea *Kalai-Smorodinsky* (o línea KS). Se llama línea KS del juego de negociación B a la línea que pasa por los puntos d y μ. Esta línea está parametrizada por la ecuación $u = t(\mu - d) + d, \quad 0 \leq t \leq 1$.

Definición 2.4. Asignación de utilidad Kalai- Smorodinsky (o utilidad KS). Se define la asignación de utilidad KS del juego de negociación B como el punto máximo de intersección entre la línea KS y el conjunto de asignación de utilidades U. Se entiende por punto máximo al punto que otorga mayor utilidad a todos los jugadores.

Para tratar de encontrar la solución KS, lo único que hay que hacer es encontrar el valor máximo de t de tal forma que $t_{max}\mu \in U$.

De manera análoga al caso de dos jugadores, considérese el conjunto

$$K = \{s \in S : (u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)) \in U,\ \tfrac{u_n(s)-d_n}{\mu_n} = \tfrac{u_{n-1}(s)-d_{n-1}}{\mu_{n-1}} = \cdots = \tfrac{u_1(s)-d_1}{\mu_1}\}$$

para tener

$$\bar{u}_1 = \text{máx}\{u_1(s) :\ s \in K\} \quad \text{y} \quad \bar{u}_i = \frac{\mu_i}{\mu_1}(\bar{u}_1 - d_1) + d_i, \ \ i = 2, 3, \dots, n.$$

Nuevamente si $K = \emptyset$, entonces el juego de negociación no tiene asignación de utilidad KS.

Finalmente vamos a denotar la solución (o regla) Kalai-Smorodinsky $\kappa(\cdot)$ por

$$\kappa(B) = \{s \in S : u_i(s) = \bar{u}_1\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

De manera análoga al caso de dos jugadores se demuestra que la generalización de la solución Kalai-Smorodisnky a n jugadores satisface las siguientes propiedades:

- Eficiencia.
- Monotonicidad en un sentido débil.
- Independencia de transformaciones lineales.
- No satisface independencia de alternativas irrelevantes.
- En juegos de negociación compactos, convexos y simétricos la solución de negociación Kalai-Smorodinsky coincide con la solución de negociación de Nash.

Capítulo 3

Juegos Coalicionales

En la vida real, frecuentemente los juegos de negociación incluyen más de dos individuos. Por ejemplo, las negociaciones entre un sindicato y los empresarios de una compañía en cuanto al incremento salarial o la disputa entre dos comunidades sobre la repartición de un territorio común. En esta clase de juegos aparecen decisiones por equipo, los miembros del equipo tienen diferentes intereses y el equipo debe tomar una propuesta que todos los miembros del equipo consideren aceptable. Dos soluciones clásicas para este tipo de juegos son el Núcleo y el Valor de Shapley.

3.1

El Núcleo

Definición 3.1. Decimos que un juego con utilidad transferible (es decir, que los beneficios que obtiene cada coalición se pueden repartir de cualquier forma) en forma coalicional está descrito por dos partes:

1. Un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, llamado la gran coalición.

2. Una función $v : P(N) \to \mathbb{R}$, con $v(\emptyset) = 0$ llamada función característica, la cual indica el valor máximo que puede obtener una coalición.

   En lo que se refiere a cuestiones prácticas, vamos a suponer positividad en las funciones caracterìsticas.

Es decir, un problema de negociación está formado por un grupo de n jugadores $\{1, 2, \ldots, n\}$ junto con su función característica.

Ejemplo 3.1.1. *Considere tres jugadores, quienes están negociando la repartición de* $\$1,000$. *Cualquier grupo formado por dos jugadores puede obtener* $\$\zeta$, $0 \leq \zeta \leq 1,000$ *y un jugador solo obtiene cero.*

En este juego tenemos $N = \{1, 2, 3\}$ junto con la siguiente función característica:

$$v(N) = 1,000,\ v(\{i, j\}) = \zeta,\ para\ i, j\ \in N,\ i \neq j,\ v(\{i\}) = 0\ para\ toda\ i \in N.$$

Ejemplo 3.1.2. *Tres inversionistas están analizando la posibilidad de realizar una inversión por un año. El inversionista 1 tiene* $\$6,000,000$ *para invertir; el inversionista 2 tiene* $\$2,000,000$ *y el inversionista 3 tiene* $\$4,000,000$. *El mercado financiero ofrece las siguientes tasas de interés:*

1. *8 %, si la inversión es menor a* $\$4,000,000$.
2. *9 %, si se invierten de* $\$4,000,000$ *a* $\$10,000,000$.
3. *10 %, si la inversión es mayor a* $\$10,000,000$.

En este juego $N = \{1, 2, 3\}$ y su función característica es la siguiente:

$v(N) = 1,200,000,\ v(\{1, 2\}) = 720,000,\ v(\{1, 3\}) = 900,000, v(\{2, 3\}) = 540,000,\ v(\{1\}) = 540,000,\ v(\{2\}) = 160,000,\ v(\{3\}) = 360,000.$

Ejemplo 3.1.3. *Un profesor de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo ha sido invitado a dar conferencias en Madrid, Barcelona y Londres. ¿Cómo deberían repartirse el costo del viaje los patrocinadores de Madrid, Barcelona y Londres? El costo de viajar a cada subconjunto de destino es:*

Subconjunto	*Costo*	*Subconjunto*	*Costo*
Madrid	*600*	*Madrid y Barcelona*	*600*
Barcelona	*600*	*Madrid y Londres*	*900*
Londres	*800*	*Barcelona y Londres*	*1 000*
Madrid, Barcelona y Londres	*1 200*	-	-

Para simplificar vamos a llamar a Madrid, M, a Barcelona, B y a Londres, L. Entonces en este juego $N = \{M, B, L\}$ *con la siguiente función característica:*

$v(N) = 1200,\ v(\{M, B\}) = 600,\ v(\{M, L\}) = 900,\ v(\{B, L\}) = 1000,\ v(\{M\}) = 600,\ v(\{B\}) = 600,\ v(\{L\}) = 800.$

Vamos a decir que una solución a un juego de negociación en forma coalicional es una propuesta de la distribución de un bien para los jugadores del juego. Al mismo tiempo diremos que es una propuesta de distribución del valor total de la gran coalición, la cual se supone se formará.

Definición 3.2. Un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$ es llamado factible para la coalición C si $\sum_{i\in C} x_i \leq v(C)$.

El vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$ es llamado factible, si éste es factible para N, la coalición de todos los jugadores.

Definición 3.3. Racionalidad individual. Decimos que un vector de pagos x satisface racionalidad individual, si da a cada uno de los jugadores al menos tanta utilidad como la que pudieran obtener por si solos.

Definición 3.4. Racionalidad grupal. Decimos que un vector de pagos x satisface racionalidad grupal si se tiene $\sum_{i\in N} x_i = v(N)$, es decir, se reparte el valor total de la gran coalición.

Definición 3.5. Se llama imputación al vector de pagos x que satisface racionalidad individual y racionalidad grupal, es decir, que pertenece al conjunto

$$R(v) = \{x \in \mathbb{R}^n : \textstyle\sum_{i\in N} x_i = v(N),\ x_i \geq v(\{i\})\ \forall\ i \in N\}.$$

Note que todos los vectores en $R(v)$ son inmunes a separaciones de un sólo jugador, pues la asignación x_i es al menos tan buena como el propio valor del jugador i, pero un subgrupo más grande, podría querer bloquear un acuerdo $x \in R(v)$, porque éste puede producir un mejor pago para sus jugadores.

Ejemplo 3.1.4. *En el Ejemplo 3.1.1, suponga ahora que las coaliciones de dos jugadores pueden obtener un pago de ζ. En este caso*

$$R(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,000, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}.$$

Un vector de pagos x dentro de $R(v)$ podría ser $(x_1, x_2, x_3) = (80, 70, 850)$. Sin embargo, si consideramos $\zeta = 200$, entonces la coalición formada por los jugadores 1 y 2 prefiere actuar por si sola y repartirse de mejor manera el valor ζ. Por ejemplo $(100, 100)$, repartición en la cual ambos jugadores obtienen un mayor beneficio al acordado en $R(v)$.

Note entonces, que un vector de pagos x debe asignar pagos tales que la suma de los pagos para cualquier coalición sea mayor o al menos igual a lo que la coalición debe obtener por sí sola. Por tanto

$$\sum_{i \in C} x_i \geq v(C), \quad \forall\, C \, \in P(N).$$

Definición 3.6. El núcleo de un juego en en forma coalicional es el conjunto de todos los vectores de pago factibles que no pueden ser bloqueados por alguna coalición. Denotaremos por $C(v)$ a estos vectores de pago, es decir,

$$C(v) = \{x \, \in \mathbb{R}^n : x \text{ es factible, } \sum_{i \in C} x_i \geq v(C) \text{ para toda } C \text{ en } P(N)\}.$$

De la definición anterior, se tiene que el núcleo es un subconjunto del conjunto de imputaciones, es decir, $C(v) \subseteq R(v)$.

Ejemplo 3.1.5. *En el Ejemplo 3.1.1 vamos a suponer que las coaliciones de dos jugadores pueden obtener los siguientes pagos:*

1. $\zeta = 200$.
2. $\zeta = 500$.
3. $\zeta = 800$.

En cada unos de los casos, el núcleo es el conjunto de vectores de pagos (x_1, x_2, x_3) que satisfacen las siguientes condiciones:

$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$,
$x_1 + x_2 \geq \zeta$,
$x_1 + x_3 \geq \zeta$,
$x_2 + x_3 \geq \zeta$,
$x_1 \geq 0$,
$x_2 \geq 0$,
$x_3 \geq 0$.

En la Figura 3.1 se representa de manera gráfica la proyección del núcleo en el plano x_1x_2. En el inciso A se ilustran las asignaciones del núcleo para $\zeta = 200$ y en el inciso B las asignaciones para $\zeta = 500$.

Para $\zeta = 800$ en núcleo es vacío. Note que para $\zeta = 200/3$ el núcleo tiene sólo un elemento (1000/3,1000/3,1000/3), vector que corresponde a una repartición equitativa.

Para $\zeta > 200/3$ el núcleo es vacío, pues sumando las tres primeras ecuaciones dadas al principio se tiene que:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 3\zeta \\ 2(x_1 + x_2 + x_3) &\geq 3\zeta. \end{aligned}$$

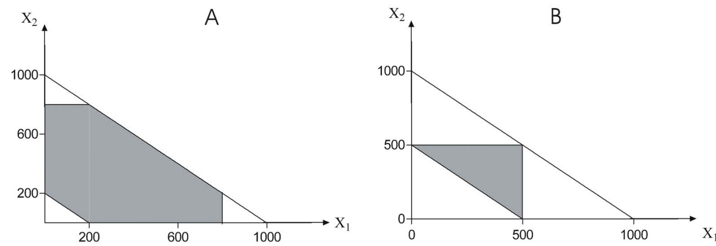

Figura 3.1: Asignaciones del Núcleo.

Luego, considerando la igualdad $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$ se tiene

$$\begin{aligned} 2(100) &\geq 3\zeta \\ \frac{200}{3} &\geq \zeta. \end{aligned}$$

Por tanto el valor ζ para el cual los vectores (x_1, x_2, x_3) tales que $x_1 + x_2 + x_3 = 100$, pertenecen a $C(v)$ debe ser menor o igual a $\frac{200}{3}$.

En el siguiente ejemplo se ilustra el núcleo para un juego de tres jugadores en el que las coaliciones de dos jugadores tienen valores diferentes.

Ejemplo 3.1.6. *Sea* $N = \{1, 2, 3\}$ *con la siguiente función característica.*

$$v(N) = 3,\ v(\{1,2\}) = 2,\ v(\{1,3\}) = 3,\ v(\{2,3\}) = 0,\ v(\{1\}) = 1,$$
$$v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0.$$

Entonces si (x_1, x_2, x_3) es la asignación del núcleo, se debe tener por lo menos

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 3$
2. $x_1 + x_2 \geq 2$
3. $x_1 + x_3 \geq 3$
4. $x_2 + x_3 \geq 0$
5. $x_1 \geq 1$
6. $x_2 \geq 0$
7. $x_3 \geq 0$.

De las desigualdades 1 y 3 tenemos $x_2 \leq 0$, que junto con la desigualdad 6 indican que $x_2 = 0$; de las dos anteriores se tiene $x_1 \geq 2$ y finalmente de las desigualdades 1 y 4 se tiene $x_1 \leq 3$. Entonces el conjunto de asignaciones del núcleo es el siguiente:

$$C(v) = \{(\alpha, 0, 3 - \alpha) : \alpha \in [2, 3]\}.$$

Note también que el núcleo puede tener una, varias o ninguna asignación de utilidad.

3.2

El valor de Shapley

En este capítulo vamos a definir un juego cooperativo (o coalicional) de utilidad transferible como lo hicimos en la Definición 3.1 de la sección anterior.

Vamos a denotar por $\Gamma(N)$ al conjunto de funciones características con el mismo conjunto de jugadores N. Note que para cualesquiera dos funciones características $v, w \in \Gamma(N)$, las funciones características $v + w$ y $cv(c \in \mathbb{R})$ son también elementos de $\Gamma(N)$, con $(v + w)(C) = v(C) + w(C)$ y $(cv)(C) = cv(C)$, para toda coalición C en $P(N)$.

De ahora en adelante utilizaremos la palabra juego para referirnos solamente a la función característica de un juego. En el resto de la sección vamos a suponer que los jugadores obtienen más beneficio o utilidad en conjunto si se ponen todos ellos de acuerdo que si forman grupos más pequeños, es decir,

$$v(N) \geq \textstyle\sum_{C \in P} v(C) \text{ para toda partición } P \text{ del conjunto } N.$$

Como lo mejor que pueden hacer los jugadores es ponerse de acuerdo y formar la gran coalición N, lo harán, entonces vamos a buscar la forma de repartir lo que puedan obtener juntándose. Vamos a denotar por ϕ a la función que a cada función característca v le hace corresponder un vector en $\mathbb{R}^n$, donde cada componente representa el pago que recibe el jugador $i \in N$. Entonces llamamos $\phi_i(v)$ a la ganancia que, de acuerdo con el valor ϕ el jugador $i \in N$ puede obtener en la función característica v.

En cuanto a los jugadores, podemos clasificar a éstos en dos tipos: aquellos cuya aportación a cualquier coalición a la que no pertenecen es su propio valor; y los que al unirse a cualquier coalición a la que no pertenecen producen el mismo valor que el que produce otro jugador que no pertenece a esta coalición. Enseguida se presentan de manera formal estas definiciones.

Definición 3.7.

Un jugador $i \in N$ es nulo si se tiene que
$v(C) = v(C \setminus \{i\}) + v(\{i\}) \;\; \forall \;\; C \in \varphi(i)$, donde $\varphi(i) = \{C \in P(N) : \; i \in C\}$.

Definición 3.8. Dos jugadores $i, j \in N$ son simétricos si se tiene que $v(C \cup \{i\}) = v(C \cup \{j\})$ para toda $C \in P(N)$ con $i, j \notin C$.

En 1953 Lloyd S. Shapley [3] planteó el problema de cómo repartir las ganancias que se obtienen de la cooperación y propuso algunas propiedades (axiomas) que una regla de reparto razonable debe cumplir.

- Axioma 1: Eficiencia. La asignación de pago $\phi(v)$ distribuye el pago total del juego, es decir,

$$v(N) = \textstyle\sum_{i \in N} \phi_i(v).$$

- Axioma 2: Simetría. Para cualesquiera dos jugadores simétricos $i, j \in N$ se tiene que

$$\phi_i(v) = \phi_j(v).$$

- Axioma 3: Jugador nulo. Para cualquier jugador nulo $i \in N$ se tiene que

$$\phi_i(v) = v(\{i\}).$$

A continuación veremos un ejemplo en el cual la asignación $\phi(v)$ se determina a partir de los axiomas anteriores.

Ejemplo 3.2.1. *Pensemos que tenemos tres jugadores A, B, C con la siguiente función característica:*

$v(\{A, B, C\}) = 300,$
$v(\{A, B\}) = v(\{A, C\}) = v(\{B, C\}) = 250,$
$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0.$

A partir del axioma de eficiencia se tiene que la asignación sugerida $\phi(v)$ debe satisfacer

$$\phi_A(v) + \phi_B(v) + \phi_B(v) = 300.$$

Ahora, si consideramos la única coalición que no contiene a los jugadores A y B, es decir, $\{C\}$ se tiene que $v(\{C\} \cup \{A\}) = v(\{C\} \cup \{B\})$. Entonces los jugadores A y B contribuyen de la misma forma a cualquier coalición a la que ellos no pertenecen. Por el axioma de simetría, se debe tener $\phi_A(v) = \phi_B(v)$. De manera análoga se tiene $\phi_C(v) = \phi_B(v)$. Por lo tanto se concluye que $\phi_A(v) = \phi_B(v) = \phi_C(v)$. Combinando las dos condiciones anteriores obtenemos que $\phi(v) = (100, 100, 100)$ es la asignación de utilidad en este juego. Nótese que no hay jugadores nulos, por lo que también se satisface el tercer axioma. De hecho esta asignación es el único valor que satisface los tres axiomas anteriores.

En general, estos tres axiomas no son suficientes para determinar una asignación del valor $\phi(v)$. Veamos que otra propiedad es razonable pedir. Supongamos que los jugadores deciden repartirse una cantidad de dinero en dos partes. La suma de la asignación de utilidad que cada uno de los juegos asigna para cada uno de los jugadores va a ser la misma que la utilidad que se obtendrá si se reparten todo el dinero en un principio. Entonces supóngase el mismo conjunto de jugadores N y las dos funciones características v y w. El valor que cada coalición $C \in P(N)$ recibe de ambas funciones es $v(C) + w(C)$, por lo que se pueden considerar los dos juegos como uno sólo, en el cual para cada coalición C se tiene $(v + w)(C) = v(C) + w(C)$.

Para considerar la propieadad discutida en el párrafo anterior, se expone el siguiente axioma.

- Axioma 4: Aditividad. Para cualesquiera dos funciones características $v, w \in \Gamma(N)$, se tiene $\phi_i(v + w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$.

Dados los cuatro axiomas anteriores podemos dar la siguiente caracterización del valor de la función ϕ_i.

Teorema 3.9. *El único valor* $\phi = (\phi_1, ..., \phi_n)$ *que satisface los axiomas* $1, 2, 3$ *y* 4 *es*

$$\phi_i(v) = \sum_{C \in P(N)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})],$$

donde

$$q(t) = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

y $|C|$ *es la cardinalidad de* C.

Antes de dar la demostración para este teorema vamos a presentar un ejemplo, el cual nos permitirá entender la distribución del valor de Shapley.

Ejemplo 3.2.2. *Ana, Beto y Caro pueden trabajar juntos, por parejas o separados. Si trabajan en equipo ganan* $\$3,000$*, y esto es lo mejor para todos ellos, porque si Ana y Beto trabajan juntos, entonces ganan* $\$1,500$*, si Ana y Caro deciden ir por su cuenta obtienen* $\$1,200$*, si Beto y Carlos deciden trabajar juntos, entonces se consiguen* $\$1,800$*, mientras que cuando cada uno trabaja por separado se tiene que Caro obtiene* $\$600$*, Beto consigue* $\$300$ *y Ana no gana nada. ¿Cuánto ganan Ana, Beto y*

Carlos de acuerdo al valor de Shapley? Usando la notación anterior tenemos que:

$v(A,B,C) = 3,000$, $v(A,B) = 1,500$, $v(A,C) = 1,200$, $v(B,C) = 1,800$, $v(A) = 0$, $v(B) = 300$, $v(C) = 600$.

De acuerdo al valor Shapley, Ana es la que menos obtiene $\phi_A(v) = \$700$, mientras que cada uno de sus compañeros gana lo mismo $\phi_B(v) = \phi_C(v) = \$1,150$.

Es un poco difícil entender cómo es que este reparto se deriva de los axiomas antes mencionados, por ello vamos a analizar el problema de una manera un poco distinta, y vamos a ver que estos dos enfoques coinciden.

Imaginemos que los tres jugadores se colocan en una fila, por ejemplo la primera de la fila es Caro, luego Ana y luego Beto. Según van llegando para pedir su parte del dinero, se les entrega lo que hasta ese momento merecen. Cuando Caro llega pide lo que es suyo, pero como está sola, lo máximo que puede obtener es $v(C)$, por lo que se le entregan \$600. Cuando llega Ana se tiene la coalición formada por Ana y Caro con $v(A,C) = 1,200$. Como se han dado \$600 a Caro, a Ana se le entrega el resto. Finalmente, cuando llega Beto pueden conseguir ya los $\$3,000$, como ya se han gastado $\$1,200$, se le da el resto a Beto. Observe que a cada uno de los jugadores se le ha asignado la contribución marginal (CM), es decir, el valor que éste aporta a la coalición que hasta entonces se ha formado. Es claro que cuánto obtiene cada uno depende del orden en que llegan. Luego para tener un reparto justo, se toma la media de dichas contribuciones para todos los órdenes posibles. Observe la situación anterior en la siguiente tabla:

Orden	**CM de Ana**	**CM de Beto**	**CM de Caro**
ABC	0	1,500	1,500
ACB	0	1,800	1,200
BAC	1,200	300	1,500
BCA	1,200	300	1,500
CAB	600	1,800	600
CBA	1,200	1,200	600
Media	700	1,150	1,150

Enseguida reescribimos el valor de Shapley para mostrar por qué estos dos procedimientos dan el mismo resultado.

$$\phi_i(v) = \sum_{D \in P(N \setminus \{i\})} \frac{|D|!(n-|D|-1)!}{n!}[v(D \cup \{i\}) - v(D)].$$

Por un lado, $[v(D \cup \{i\}) - v(D)]$ es la contribución marginal del jugador i a la coalición D, para cualquier coalición D a la que no pertenezca i, por otro $|D|!$ mide cuantas combinaciones posibles se pueden tener del conjunto D, es decir, cuantas combinaciones hay antes de que llegue el jugador i a la fila, $(n - |D| - 1)!$ mide cuantas combinaciones de los jugadores hay después de que llega el jugador i y finalmente $n!$ mide el número de filas distintas posibles. Por lo tanto el valor $\phi_i(v)$ es la media tomada sobre todas las filas posibles de la contribución marginal del jugador i al conjunto de jugadores que le precede.

Enseguida se exponen algunas observaciones respectivas al valor de Shapley, que serán de utilidad en la demostración del Teorema 3.10.

- Observación 1. Los pesos $q(|C|)$ en la fórmula del valor ϕ_i satisfacen $q(|C|) \geq 0$ $\forall\ |C| = 1, 2, \ldots, n$ y además se tiene que $\sum_{C \in \varphi(i)} q(|C|) = 1$.

  La no negatividad de $q(|C|)$ es trivial. Enseguida vamos a ver que la suma de todos los valores $q(|C|)$ es igual a uno.

  Observe que el número de coaliciones que contienen al jugador i y tienen t miembros es igual al número de coaliciones con $(t - 1)$ miembros que pueden ser formadas con los $(n - 1)$ jugadores. Entonces cada coalición de $(t - 1)$ miembros formada del conjunto de jugadores $N \setminus \{i\}$ nos permite formar una coalición diferente, con t miembros y que contiene al jugador i. Por lo que

$$\frac{(n-1)!}{(t-1)!(n-t)!}$$

  resultan ser todas las coaliciones con t jugadores que contienen al jugador i. De la discusión anterior se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sum_{C \in \varphi(i)} q(|C|) &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(t-1)!(n-t)!} q(t) \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(t-1)!(n-t)!} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \\ &= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

  Se tiene entonces que podemos reescribir $q(|C|)$, considerando $t = |C|$ y tener

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \\ &= \frac{(t-1)!(n-t)!}{n(n-1)!} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{t-1}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor $q(t)$ se puede interpretar de la siguiente manera. La probabilidad de elegir a un jugador de entre n jugadores es $\frac{1}{n}$, la probabilidad de que un jugador pueda estar en una coalicion formada por $t-1$ miembros es $\frac{1}{\binom{n-1}{t-1}}$, por lo que $q(t)$ se tiene del producto de estas dos probabilidades.

- Observación 2. Se tiene que para toda C en $P(N)$ que no contiene al jugador i, $v(C) - v(C \setminus \{i\}) = 0$.
  Entonces la suma del valor $\phi_i(v)$ se puede tomar sobre $\varphi(i)$ en lugar de $P(N)$ y tener

$$\sum_{C \in P(N)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})] = \sum_{C \in \varphi(i)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})].$$

Enseguida se expone la prueba del Teorema 3.10.
Demostración. Primero vamos a demostrar que el valor ϕ satisface los cuatro axiomas mencionados anteriormente.

1. **Eficiencia.** Queremos demostrar que

$$v(N) = \textstyle\sum_{i \in N} \phi_i(v).$$

Tenemos

$$\phi_i(v) = \sum_{C \in P(N)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})]$$

con $q(t) = \dfrac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$ y $q(t+1) = \dfrac{(t)!(n-t-1)!}{n!}$.

Entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N}\phi_i &= \sum_{i\in N}\sum_{C\in P(N)} q(|C|)[v(C)-v(C\backslash\{i\})]\\
&= \sum_{C\in P(N)}\sum_{i\in N} q(|C|)[v(C)-v(C\backslash\{i\})]\\
&= \sum_{C\in P(N)}\sum_{i\in C} q(|C|)[v(C)-v(C\backslash\{i\})]\\
&= \sum_{C\in P(N)} |N|q(|C|)v(C) - \sum_{C\in P(N)}\sum_{i\in C} q(|C|)[v(C\backslash\{i\})]\\
&= |N|q(|N|)v(N) + \sum_{C\subsetneq N} |C|q(|C|)v(C) - \sum_{C\in P(N)} q(|C|)\sum_{i\in C} v(C\backslash\{i\})\\
&= |N|q(|N|)v(N) + \sum_{C\subsetneq N} |C|q(|C|)v(C) - \sum_{C\subsetneq N} (|N|-|C|)q(|C|+1)v(C)\\
&= |N|q(|N|)v(N) + \sum_{C\subsetneq N} |C|q(|C|)v(C) - \sum_{C\subsetneq N} |C|q(|C|)v(C)\\
&= |N|q(|N|)v(|N|)\\
&= v(N).
\end{aligned}
$$

La igualdad anterior a la antepenúltima igualdad se obtiene al observar que hay $|N|-|C|$ diferentes subconjuntos en los que al remover el elemento i nos dan la coalición C. Finalmente, la antepenúltima igualdad se obtiene usando el hecho de que $|C|q(|C|) = (|N|-|C|)q(|C|+1)$.

2. **Simetría.**

Consideremos los siguientes subconjuntos de P(N):

$$P_o = \{C \in P(N) : i \notin C \ y \ j \notin C\},$$

$$
\begin{aligned}
P_{ij} &= \{C \in P(N) : i \in C \ y \ j \in C\},\\
P_i &= \{C \in P(N) : i \in C \ y \ j \notin C\},\\
P_j &= \{C \in P(N) : i \notin C \ y \ j \in C\}.
\end{aligned}
$$

Note que si $C \in P_i$ entonces $C \setminus \{i\} \in P_o$. Además si $C \in P_{ij}$ entonces $C \setminus \{i\} \in P_j$. De manera análoga se tiene que si $C \in P_j$ entonces $C \setminus \{j\} \in P_o$.

Además para cualesquiera dos jugadores simétricos i, j se tiene

$$
\begin{aligned}
v(C \setminus \{i\}) &= v(C \setminus \{i,j\} \cup \{j\})\\
&= v(C \setminus \{i,j\} \cup \{i\})\\
&= v(C \setminus \{j\}) \text{ para toda } C \in P_{ij}.
\end{aligned}
$$

De la discusión anterior se tienen las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{C\in\varphi(i)} q(c)[v(C) - v(C\setminus\{i\})] \\
&= \sum_{C\in P_{ij}} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{i\})] + \sum_{C\in P_i} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{i\})] \\
&= \sum_{C\in P_{ij}} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{i\})] + \sum_{C\in P_o} q(|C|+1)[v(C\cup\{i\}) - v(C)] \\
&= \sum_{C\in P_{ij}} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{j\})] + \sum_{C\in P_o} q(|C|+1)[v(C\cup\{j\}) - v(C)] \\
&= \sum_{C\in P_{ij}} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{j\})] + \sum_{C\in P_j} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{j\})] \\
&= \sum_{C\in\varphi(j)} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{j\})] \\
&= \phi_j(v).
\end{aligned}
$$

La cuarta igualdad se obtiene por la simetría de los jugadores i, j.

3. **Jugador nulo**.

   Supongamos que para algún $i \in N$ se tiene
   $v(C) - v(C\setminus\{i\}) = v(\{i\})\ \forall\ C \in \varphi(i)$.

   Entonces queremos demostrar que $\phi_i(v) = v(\{i\})$.

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{C\in\varphi(i)} q(|C|)[v(C) - v(C\setminus\{i\})] \\
&= v(\{i\})[\sum_{C\in\varphi(i)} q(|C|)] \\
&= v(\{i\}).
\end{aligned}
$$

   La tercera igualdad se tiene por la Observación 1.

4. **Aditividad.**
   Queremos demostrar que $\phi_i(v+w) = \phi_i(v) + \phi_i(w)$.

   En principio, observemos que

$$
[(v+w)(C) - (v+w)(C\setminus\{i\})] = [v(C) - v(C\setminus\{i\})] + [w(C) - w(C\setminus\{i\})].
$$

Luego, para todo jugador $i \in N$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_i(v+w) &= \sum_{C \in P(N)} q(|C|)[(v+w)(C) - (v+w)(C \setminus \{i\})] \\
&= \sum_{C \in P(N)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})] + \sum_{C \in P(N)} q(|C|)[w(C) - w(C \setminus \{i\})] \\
&= \phi_i(v) + \phi_i(w).
\end{aligned}$$

Ahora vamos a demostrar que ϕ es único. La demostración se realizará en dos partes.

1. Demostraremos que a partir de los axiomas de eficiencia, simetría y jugador nulo, el valor ϕ se define como un valor único para un conjunto particular de juegos, los cuales llamaremos funciones características simples y se definen a continuación:

   Sea $T \in G := P(N) \setminus \{\emptyset\}$, definimos la siguiente función para cualquier subconjunto $C \in P(N)$

   $$u_T(C) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq C \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

2. Vamos a demostrar que dado un conjunto finito de jugadores N con $|N| = n$, las funciones características simples $\mathcal{L} = \{u_T \ : T \in G\}$ forman una base del espacio lineal $\Gamma(N)$. Luego como $\mathcal{L} = \{u_T \ : T \in G\}$ es una base, si $(N, v) \in \Gamma(N)$ podemos escribir

   $$v = \sum_{T \in G} \lambda_T u_T$$

   con $\lambda_T \in \mathbb{R}$. Además, la expresión anterior es la única forma de expresar v como una combinación lineal de las funciones características simples.

Volvamos a la definición de función característica simple.

$$u_T(C) = \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq C \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Vamos a demostrar que a partir de los axiomas de eficiencia, simetría y jugador nulo, podemos determinar el valor $\phi_i(u_T)$.

Notemos que para cualquier $C \in \varphi(i)$ el jugador $i \notin T$ es un jugador nulo. Observemos ésto con los dos siguientes casos:

1. $T \subseteq C$. Como $i \notin T$, entonces $T \subseteq C \setminus \{i\}$, por lo que $u_T(C \setminus \{i\}) = 1$. Luego $u_T(C) - u_T(C \setminus \{i\}) = 0$.

2. $T \nsubseteq C$. Probaremos $u_T(C \setminus \{i\}) = 0$.

   Supongamos $u_T(C \setminus \{i\}) = 1$, entonces se tendría que $T \subseteq C \setminus \{i\} \subseteq C \setminus \{i\} \cup \{i\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto $u_T(C \setminus \{i\}) = 0$.

Entonces para el jugador $i \notin T$, un jugador nulo, se tiene que $\phi_i(u_T) = u_T(\{i\}) = 0$, pues $T \subsetneq \{i\}$.

Ahora consideremos dos jugadores $i, j \in T$. Luego, para cualquier coalición C tal que $i, j \notin C$ se tiene que T no es un subconjunto de $C \cup \{i\}$ ni de $C \cup \{j\}$. Entonces $u_T(C \cup \{i\}) = u_T(C \cup \{j\})$ y por el axioma de simetría se tiene que $\phi_i(u_T) = \phi_j(u_T)$.

Finalmente, por el axima de eficiencia se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= u_T(N) \\ &= \sum_{i \in N} \phi_i(u_T) \\ &= \sum_{i \in T} \phi_i(u_T) + \sum_{i \notin T} \phi_i(u_T) \\ &= |T|\phi_i(u_T), \end{aligned}$$

para todo $i \in T$. La última igualdad se tiene por la simetría de los jugadores en T y del hecho de que todo jugador que no está en T es un jugador nulo. Por lo tanto, los primeros tres axiomas describen un único valor ϕ para toda función característica simple dado por

$$\phi_i(u_T) = \begin{cases} 1/|T| & \text{si } i \in T \\ 0 & \text{si } i \notin T. \end{cases}$$

Note que análogamente a lo anterior, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\phi_i(\lambda u_T) = \begin{cases} \lambda/|T| & \text{si } i \in T \\ 0 & i \notin T. \end{cases}$$

Ahora vamos a demostrar la parte 2. Recordemos que

$$\Gamma(N) = \{v : P(N) \to \mathbb{R},\ v(\{\emptyset\}) = 0\}.$$

Toda función característica v en $\Gamma(N)$ está descrita por un vector x de números reales en $\mathbb{R}^p$ con $p = 2^n - 1$. Cada componente de x representa el valor de cada subconjunto de $P(N)$. Consideremos ahora el conjunto de funciones características simples

$$\mathcal{L} = \{u_T \in \mathbb{R}^p : \ T \in G\}$$

De un resultado de Álgebra Lineal sabemos que todo vector de $\mathbb{R}^p$ puede ser expresado de manera única como una combinación lineal de cualesquiera p vectores linealmente independientes. Entonces vamos a demostrar que la colección de vectores en $\mathcal{L}$ es linealmente independiente.

Supongamos por contradicción que los vectores en $\mathcal{L}$ son linealmente dependientes, entonces debe existir un vector $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}^p$ que denotaremos como λ_T, para $T \in G$ tal que

$$\sum_{T \in G} \lambda_T u_T = 0.$$

Sea $S \in G$ con $|S| = 1$. Entonces se tiene que

$$u_S(S) = -(1/\lambda_S)[\sum_{T \in G \backslash S} \lambda_T u_T(S)]$$

si $\lambda_S \neq 0$. Pero por un lado $u_S(S) = 1$ por la definición de juego simple y por el otro

$$\sum_{T \in G \backslash S} \lambda_T u_T(S) = 0,$$

pues ninguna coalición $T \neq S$ con $|T| \geq |S|$ puede estar contenida en S. Por lo tanto $\lambda_S = 0$. Análogamente se hace esto para $|S| \geq 2$. Consideremos $S \in G$ con $|S| = 2$. Nuevamente, por dependencia lineal se tiene

$$u_S(S) = -(1/\lambda_S)[\sum_{T \in G \backslash S} \lambda_T u_T(S)]$$

si $\lambda_S \neq 0$. Ahora, tenemos que por un lado $u_S(S) = 1$ por la definición de juego simple y por el otro

$$\sum_{T \in G \backslash S} \lambda_T \cdot u_T(S) = 0,$$

puesto que ya se vío que los λ_S para todas las coaliciones de cardinalidad igual a uno son cero y además ninguna coalición $T \neq S$ con $|T| \geq |S|$ puede estar contenida en S, de lo cual se concluye nuevamente que $\lambda_S = 0$. Se demuestra por inducción que $\lambda_S = 0$ para S de cualquier cardinalidad. Por lo tanto, los vectores en $\mathcal{L}$ son linealmente independientes, es decir, para cualquier $v \in \Gamma(N)$ hay un único $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tal que

$$v = \sum_{T \in G} \lambda_T u_T.$$

Entonces por el axioma de aditividad el único valor para la función característica v está dado por

$$\phi_i(v) = \sum_{T \in G} \phi_i(\lambda_T u_T)$$

y como ya vimos que el valor $\phi_i(\lambda_T \cdot u_T)$ se determina de manera única a partir de los axiomas de eficiencia, simetría y jugador nulo, el valor de Shapley $\phi_i(v)$ que satisface los mismos axiomas es único. ■

Enseguida se expone un ejemplo en el que se observa como se comportan el núcleo y el valor de Shapley.

Ejemplo 3.2.3. *Supongamos que se tiene un mercado en el que hay un vendedor (jugador 1) de cierto bien que no podemos dividir en partes (pensemos, por ejemplo, en una casa) y dos compradores (jugador 2 y jugador 3) que desean comprar ese bien. Los valores que se le asignan a las coaliciones son, en este caso, un reflejo del éxito o fracaso de la negociación entre el vendedor y el comprador. Asignamos valor a todas las posibles coaliciones de la siguiente forma: si hay vendedor y comprador el negocio se lleva a cabo, es decir,* $v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = 1$. *Si sólo hay comprador o vendedores, el negocio no se lleva a cabo, es decir,* $v(\{2,3\}) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$.

Recuerde que una solución debe significar una repartición del valor total de la gran coalición, de tal manera que a cada jugador le corresponda su aportación a ella. Para determinar el nivel de esta aportación analizamos el juego con las dos soluciones anteriores: el núcleo y el valor de Shapley.

Veamos que pasa con el núcleo. Si este asigna x_1 al jugador 1, x_2 al jugador 2 y x_3 al jugador 3, entonces se debe tener por lo menos

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 1\\
&x_1 + x_2 \geq v(\{1,2\}),\\
&x_1 + x_3 \geq v(\{1,3\}),\\
&x_2 + x_3 \geq v(\{2,3\}),\\
&x_1 \geq v(\{1\}),\\
&x_2 \geq v(\{2\}),\\
&x_3 \geq v(\{3\}).
\end{aligned}$$

Con un poco de aritmética se tiene que la asignación del núcleo para este juego es

$$C(v) = \{(1,0,0)\}.$$

Es decir, el vendedor tiene todo el poder y los compradores tienen la misma posibilidad de comprar. Ahora veamos que pasa con el valor Shapley.

Tenemos que

$$\phi_i(v) = \sum_{C \in P(N)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})].$$

Recordemos que es suficiente considerar

$$\phi_i(v) = \sum_{C\in\varphi(i)} q(|C|)[v(C) - v(C \setminus \{i\})].$$

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,3\} - v(\{3\}))] + q(1)[v(\{1\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(1-0) + \frac{1}{6}(1-0) + \frac{1}{6}(1-0) + \frac{1}{3}(0) \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) &= q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + q(1)[v(\{1\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(1-1) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(1-0) + \frac{1}{3}(0) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v) &= q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + q(1)[v(\{3\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(1-1) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(1-0) + \frac{1}{3}(0) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos que $\phi(v) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ es la asignación del valor de Shapley. Note que esta solución muestra importancia para los compradores, lo cual no sucede con el núcleo. De ésto se tiene que el valor de Shapley para este juego no pertenece al núcleo, pues de no ser así, se tendría que esta asignación de utilidad además de ser una asignación que satisface ciertas propiedades razonables, es una asignación que no podrá ser bloqueada por ninguna otra asignación de la gran coalición.

Veamos otro ejemplo en el que se presenta la misma situación.

Ejemplo 3.2.4. *Consideremos nuevamente el Ejemplo 3.1.6. Veamos cuál es la asignación del valor de Shapley para ese juego de negociación.*

$$
\begin{aligned}
\phi_1(v) &= q(3)[v(\{1,2,3\} - v(\{2,3\}))] + q(2)[v(\{1,2\} - v(\{2\}))] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,3\} - v(\{3\}))] + q(1)[v(\{1\} - v(\{\emptyset\}))] \\
&= \frac{1}{3}(3-0) + \frac{1}{6}(2-0) + \frac{1}{6}(3-0) + \frac{1}{3}(1) \\
&= \frac{13}{6}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2(v) &= q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + q(1)[v(\{1\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(3-3) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(2-1) + \frac{1}{3}(0) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_3(v) &= q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + q(1)[v(\{3\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(3-2) + \frac{1}{6}(0-0) + \frac{1}{6}(3-1) + \frac{1}{3}(0) \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Tenemos que $\phi(v) = (\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$ es la asignación del valor de Shapley, y nuevamente, esta asignación no pertenece al núcleo del juego.

Ahora volvamos a analizar el juego, pero ahora sin considerar el jugador 2, el cual tiene una pago de valor 0 en el núcleo del juego original. Entonces tenemos $N = \{1, 3\}$ con la siguiente función característica: $v'(N) = 3,\ v'(\{1\}) = 1,\ v'(\{3\}) = 0$.

Veamos que pasa con el núcleo. Si x_1, x_3 son las asignaciones del núcleo se debe por lo menos tener

$x_1 + x_3 = 3,$
$x_1 \geq 1,$
$x_3 \geq 0.$

Ahora veamos que pasa con el valor de Shapley.

$$
\begin{aligned}
\phi_1(v') &= q(2)[v'(\{1,3\}) - v'(\{3\})] + q(1)[v'(\{1\}) - v'(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{2}(3-0) + \frac{1}{2}(1-0) \\
&= 2.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v') &= q(2)[v'(\{1,3\}) - v'(\{1\})] + q(1)[v'(\{3\}) - v'(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{2}(3-1) + \frac{1}{2}(0-0) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

En este caso se tiene que el valor de Shapley $\phi(v') = (2,1)$ pertenece al núcleo. El núcleo y el valor de Shapley para este juego se muestran en la Figura 3.2.

Note que no siempre que el núcleo asigne una utilidad cero a un jugador i en el juego original v, en el nuevo juego (el cual se obtiene al considerar únicamente los jugadores $N\backslash\{i\}$) el valor de Shapley pertenece al núcleo del nuevo juego. Veamos un ejemplo.

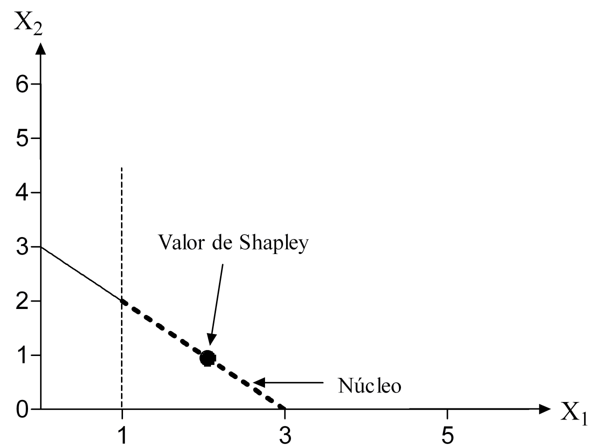

Figura 3.2: Asignaciones del Núcleo y del Valor de Shapley.

Ejemplo 3.2.5. *Consideremos un conjunto N de cuatro jugadores $N = \{1,2,3,4\}$, con la siguiente función característica:*

$v(N) = 8$,
$v(\{1,2,3\}) = 6$,
$v(\{1,2,4\}) = 4$,
$v(\{1,3,4\}) = 6$,
$v(\{2,3,4\}) = 6$,
$v(\{1,2\}) = 4$,
$v(\{1,3\}) = 6$,
$v(\{1,4\}) = 2$,
$v(\{2,3\}) = 6$,
$v(\{2,4\}) = 2$,

$v(\{3,4\}) = 3,$
$v(\{i\}) = 0, \quad i = 1,2,3,4.$

El núcleo está determinado por los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) que satisfacen:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8,$
$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6,$
$x_1 + x_2 + x_4 \geq 4,$
$x_1 + x_3 + x_4 \geq 6,$
$x_2 + x_3 + x_4 \geq 6,$
$x_1 + x_2 \geq 4,$
$x_1 + x_3 \geq 6,$
$x_1 + x_4 \geq 2,$
$x_2 + x_3 \geq 6,$
$x_2 + x_4 \geq 2,$
$x_3 + x_4 \geq 3,$
$x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3,4.$

Después de realizar los cálculos correspondientes se tiene que la asignación del núcleo para este juego es:

$$C(v) = \{(2,2,4,0)\}.$$

Veamos que pasa con el valor de Shapley

$$\begin{aligned}
\phi_1(v) &= q(4)[v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,2,4\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\
&\quad + q(3)[v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\})] + q(3)[v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,4\}) - v(\{4\})] + q(1)[v(\{1\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{12}(2) + \frac{1}{12}(3) + \frac{1}{12}(4) + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(2) \\
&= \frac{23}{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v) &= q(4)[v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,3,4\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})] \\
&\quad + q(3)[v(\{1,2,4\}) - v(\{1,2\})] + q(3)[v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,2\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{3\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{2,4\}) - v(\{4\})] + q(1)[v(\{2\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{12}(2) + \frac{1}{12}(3) + \frac{1}{12}(4) + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(2) \\
&= \frac{23}{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v) &= q(4)[v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,2,4\})] + q(3)[v(\{1,2,3\}) - v(\{1,2\})] \\
&\quad + q(3)[v(\{1,3,4\}) - v(\{2,4\})] + q(3)[v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,3\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{2,3\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{3,4\}) - v(\{4\})] + q(1)[v(\{3\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{4}(4) + \frac{1}{12}(2) + \frac{1}{12}(4) + \frac{1}{12}(4) + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(6) + \frac{1}{12}(3) \\
&= \frac{37}{12}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_4(v) &= q(4)[v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,2,3\})] + q(3)[v(\{1,2,4\}) - v(\{1,2\})] \\
&\quad + q(3)[v(\{1,3,4\}) - v(\{1,3\})] + q(3)[v(\{2,3,4\}) - v(\{2,3\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{1,4\}) - v(\{1\})] + q(2)[v(\{2,4\}) - v(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v(\{3,4\}) - v(\{3\})] + q(1)[v(\{4\}) - v(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{12}(2) + \frac{1}{12}(2) + \frac{1}{12}(3) \\
&= \frac{13}{12}.
\end{aligned}$$

Tenemos que $\phi(v) = (\frac{23}{12}, \frac{23}{12}, \frac{37}{12}, \frac{13}{12})$ en la asignación del valor de Shapley.

Ahora consideremos el juego formado por $N = \{1,2,3\}$ jugadores, pues nos olvidamos del jugador 4 que tuvo una asignación de valor cero en el núcleo.

Entonces los valores de las nuevas coaliciones podrían ser consideradas de la siguiente forma:

$$v'(N) = 8,\ v'(\{1,2\}) = 4,\ v'(\{1,3\}) = 6\ v'(\{2,3\}) = 6$$

$$v'(\{1\}) = 2,\ v'(\{2\}) = 2\ v'(\{3\}) = 3$$

Veamos que pasa con el núcleo de este nuevo juego. Nuevamente, si el núcleo asigna x_1 al jugador 1, x_2 al jugador 2 y x_3 al jugador 3, se debe tener por lo menos

$x_1 + x_2 + x_3 = 8,$
$x_1 + x_2 \geq v'(\{1,2\},$
$x_1 + x_3 \geq v'(\{1,3\}),$
$x_2 + x_3 \geq v'(\{2,3,\}),$
$x_1 \geq v'(\{1\}),$
$x_2 \geq v'(\{2\}),$
$x_3 \geq v'(\{3\}).$

Con un poco de aritmética se tiene que la asignación del núcleo para este juego es

$$C(v') = \{(2,2,4)\}.$$

Veamos que pasa con el valor de Shapley para este nuevo juego.

$$\begin{aligned}
\phi_1(v') &= q(3)[v'(\{1,2,3\}) - v'(\{2,3\})] + q(2)[v'(\{1,2\}) - v'(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v'(\{1,3\}) - v(\{3\})] + q(1)[v'(\{1\}) - v'(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(8-6) + \frac{1}{6}(4-2) + \frac{1}{6}(6-3) + \frac{1}{3}(2) \\
&= \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(v') &= q(3)[v'(\{1,2,3\}) - v'(\{1,3\})] + q(2)[v'(\{2,3\}) - v'(\{3\})] \\
&\quad + q(2)[v'(\{1,2\}) - v(\{1\})] + q(1)[v'(\{1\}) - v'(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(8-6) + \frac{1}{6}(4-2) + \frac{1}{6}(6-3) + \frac{1}{3}(2) \\
&= \frac{13}{6}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_3(v') &= q(3)[v'(\{1,2,3\}) - v'(\{1,2\})] + q(2)[v'(\{2,3\}) - v'(\{2\})] \\
&\quad + q(2)[v'(\{1,3\}) - v'(\{1\})] + q(1)[v'(\{3\}) - v'(\{\emptyset\})] \\
&= \frac{1}{3}(8-4) + \frac{1}{6}(6-2) + \frac{1}{6}(6-2) + \frac{1}{3}(3) \\
&= \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

Tenemos que $\phi(v') = (\frac{13}{6}, \frac{13}{6}, \frac{11}{3})$ es la asignación del valor de Shapley, la cual no pertenece al núcleo del juego.

Del ejemplo anterior concluimos que si se tiene un juego en el cual el núcleo asigna una utilidad cero a uno de los jugadores, no siempre en el nuevo juego (el cual se obtiene cuando no se considera este jugador) el valor de Shapley de este nuevo juego pertenece al núcleo del mismo.

Capítulo 4

Aplicaciones

En el presente capítulo se van a aplicar cada una de las soluciones que se estudiaron en los capítulos anteriores, a la situación de quiebra presentada en la empresa DINA CAMIONES S. A. DE C. V. ubicada en Cd. Sahagún Hgo., la cual dada su situación financiera y tras una larga negociación con el Sindicato Nacional Independiente de Trabajadores de la Industria Automotriz Similares y Conexos, se vió en la necesidad de liquidar a los 506 empleados que laboraban en la empresa, pagando a cada uno de los trabajadores una cantidad correspondiente al pago de indeminización más otra por concepto de gastos de previsión social y gratificaciones extraordinarias. Es ésta última parte la que entra en proceso de negociación entre el sindicato y la empresa.

En lo que sigue se verá como es que se pudo haber distribuido entre los trabajadores de la empresa la parte correspondiente a previsión social y gratificaciones extraordinarias aplicando las soluciones ya estudiadas. Posteriormente se realizará una comparación entre lo que éstas soluciones indican y lo que se hizo en la realidad. Al final del capítulo se presentan varias tablas en las que se muestra lo que cada trabajador demandaba y lo que la empresa le pagó.

Entonces, según los datos obtenidos, nuestro juego está formado por 506 jugadores, quienes están negociando la repartición de una cantidad M=\$148,547,843 equivalente a la suma de las demandas de cada uno de los 506 trabajadores (150 % sobre indeminización bruta).

4.1

DINA y la solución de Negociación de Nash

En esta sección se trata de aplicar la Solución de Negociación de Nash al caso de DINA. El análisis se realizará por casos, por lo que se tendrán diferentes juegos de negociación y en todos éstos la utilidad de cada uno de los jugadores se representará por la cantidad de dinero que éstos obtengan.

Al final de esta sección se presentan unas tablas en las que se muestran las demandas que cada uno de los 506 trabajadores tenía en contra de la empresa. Toda la información se manejará en datos enteros.

Veamos entonces que pasa con los diferentes casos:

1. En este caso vamos a suponer que el reparto de M se reliza únicamente entre los 506 trabajadores, que cada uno de los trabajadores tiene derecho a pedir todo el dinero en juego y que el punto de desacuerdo es $d = (0, 0, \cdots, 0)$. Por tanto, el conjunto de acuerdos factibles resultante es el siguiente:

$$S = \{s = (s_1, \ldots, s_{506}) \in \mathbb{R}^{506} : s_1 + s_2 + \cdots + s_{506} \leq M)\}.$$

   Como la asignación de utilidad para cada jugador se representa por la cantidad de dinero obtenida, $u_i(s) = s_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, 506$. Luego

$$U = \{(u_1(s), u_2(s), \ldots, u_{506}(s)) \ : s \in S\}.$$

   Para encontrar la solución de negociación de Nash hay que encontrar el punto que maximiza la función $g(s) = \prod_{i=1}^{506}(u_i(s) - d_i)$ en U. Observe que el conjunto de asignación de utilidades U para los 506 jugadores es compacto, convexo y simétrico. Aplicando el Teorema de la Solución de Negociación de Nash se tiene que la única solución de negociación para este juego es la simétrica (división equitativa) y que ésta es eficiente, independiente de alternativas irrelevantes e independiente de transformaciones lineales. Por lo tanto, la solución de negociación de Nash indica que hay que dar $\frac{M}{506}$ a cada trabajador, es decir $\$293, 573$ a cada uno.

2. Este caso es análogo al anterior, sólo que ahora vamos a considerar las demandas de cada uno de los 506 trabajadores, las cuales se denotan por D_i. El conjunto S resultante para este juego es el siguiente

$$S = \{(s_1, \ldots, s_{506}) \in \mathbb{R}^{506} : \quad 0 \leq s_i \leq D_i, \ i = 1, 2, \ldots, 506\}.$$

Observe que como la cantidad de activos disponibles M es precisamente la suma de las demandas de los 506 jugadores, se tiene lo suficiente para dar a cada jugador lo que le corresponde. Por tanto, la solución de negociación de Nash indica que hay que pagar a cada uno de los 506 trabajadores lo que cada uno demanda ,es decir, $D_i,\ i = 1, 2, \ldots, 506$.

3. En este caso, el juego de negociación sigue siendo no simétrico con $d = (0, 0, \cdots, 0)$, pero ahora se considera la empresa para la distribución de M, la cual no tiene restricción sobre la cantidad de activos de la que puede disponer. Por lo que se tiene el siguiente conjunto de resultados factibles:

$$S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{507}) : \quad 0 \leq s_i \leq D_i,\ i = 1, 2, \ldots, 506\ s_1 + s_2 + \cdots + s_{507} \leq M\}.$$

Note que ahora ya no se cuenta con los activos suficientes para pagar a cada uno de los 506 trabajadores y a la empresa lo que se les debe. Para encontrar la solución de negociación de Nash a este problema se aplica el método visto en la Pág. 19. Realizando los cálculos correspondientes se tiene que la solución de negociación de Nash indica que hay que pagar a cada uno de los primeros 482 trabajadores con las demandas más pequeñas lo que cada uno demanda mientras que el resto de los activos $\$11,012,926$ se reparte equitativamente entre los 24 trabajadores restantes más la empresa, es decir, cada uno de éstos recibe $\$440,877$. No obstante, esta repartición podría generar cierta inconformidad entre los 24 trabajadores restantes y la empresa, pues aunque son quienes tienen las demandas más grandes, no son liquidados en su totalidad. En las siguientes tablas se muestran con (*) los demandas que no son liquidadas en su totalidad.

Note que en ninguno de los casos anteriores, la repartición de M que indica la solución de negociación de Nash se aproxima a la repartición que se hizo en la realidad. Uno se podría preguntar si se puede lograr ésto eligiendo algún punto de desacuerdo distinto a $d = (0, 0, \cdots, 0)$. Sin embargo ésto nunca va a ocurrir, puesto que la función que indica el producto de Nash respecto al punto de desacuerdo $g(u_1, u_2, \ldots, u_{506}) = (u_1 - d_1)(u_2 - d_2) \cdots (u_{506} - d_{506})$ no tiene máximos en el interior de su dominio, para ninguna elección de $d = (d_1, d_2, \ldots, d_{506})$ y se puede ver que en todos los casos anteriores la repartición que se hizo en la realidad siempre está en el interior de su dominio.

Demandas de los 506 trabajadores de la empresa DINA CAMIONES S.A. de C.V. en orden ascendente.
Las demandas están dadas en pesos.

46,411	102,753	191,097	259,287	290,353
46,411	104,166	191,097	261,593	294,323
46,411	105,965	193,350	263,201	297,971
46,411	114,598	193,350	264,206	298,400
46,411	115,000	193,994	264,306	298,615
46,411	116,505	194,252	276,725	299,044
46,411	147,170	196,162	280,856	300,332
46,411	147,985	196,784	280,991	300,439
46,411	148,892	198,875	280,991	300,439
86,991	148,892	198,875	280,991	300,546
87,081	149,432	198,875	280,991	300,654
87,081	157,140	198,875	280,991	301,083
87,261	158,862	199,378	280,991	301,083
87,261	158,862	200,785	280,991	301,083
87,442	158,862	200,785	280,991	301,083
87,893	159,677	205,991	280,991	301,083
88,344	159,677	209,849	280,991	301,298
88,344	159,778	209,875	280,991	302,371
88,344	161,309	210,090	280,991	303,122
88,344	162,034	212,450	280,991	303,700
88,344	162,034	212,450	280,991	304,243
88,344	162,578	213,201	281,493	304,517
88,344	162,578	214,856	281,493	304,517
88,344	164,934	214,918	281,493	304,517
88,344	175,256	214,918	281,493	304,606
88,344	177,065	214,918	281,493	304,787
88,524	177,065	214,918	281,493	306,118
89,336	177,065	217,067	281,493	306,963
90,328	177,065	218,977	281,493	307,324
90,509	177,065	219,882	281,493	307,324
90,689	178,472	222,297	281,493	309,023
90,780	178,472	229,512	282,700	309,023
90,780	178,472	230,048	283,403	309,131
90,780	178,673	234,126	283,403	309,131
91,945	178,673	234,447	283,403	309,435
91,945	178,673	234,877	283,403	309,435
92,035	179,779	235,091	283,403	309,435
93,303	180,252	235,306	283,403	309,435
94,027	180,583	235,306	283,403	309,435
94,208	180,583	235,306	284,710	313,488
94,389	180,583	235,735	286,479	314,099
96,200	180,583	236,915	287,423	314,862
99,241	181,186	236,915	287,423	316,671
100,541	181,186	238,096	287,624	318,380
101,541	181,286	238,418	287,624	318,682
101,722	181,286	238,418	287,624	321,983
102,084	181,286	245,500	288,026	322,199
102,251	187,663	252,490	288,831	322,300
102,351	190,560	253,034	289,132	322,501
102,652	190,560	254,756	290,245	326,923

Demandas de los 506 trabajadores de la empresa DINA CAMIONES
S.A. de C.V. en orden ascendente.
Las demandas están dadas en pesos.

327,225	338,884	349,638	369,221	410,833	
327,928	338,884	349,638	369,972	413,636	
332,094	338,884	350,643	369,972	415,361	
332,094	339,185	350,643	370,616	416,219	
334,461	339,286	351,246	372,010	416,327	
334,863	339,487	351,246	372,976	419,439	
336,493	339,487	351,246	373,083	419,801	
336,815	339,487	351,408	373,620	419,868	
336,815	339,487	359,086	373,835	421,200	
337,459	339,487	360,314	373,835	421,200	
337,459	339,682	360,875	373,835	421,200	
337,577	339,682	361,066	373,835	424,589	
337,678	340,291	361,066	374,908	425,069	
337,678	340,391	361,066	377,991	425,293	
337,678	340,391	361,495	378,215	426,526	
337,678	340,391	361,709	378,215	426,526	
337,778	340,391	361,709	378,215	426,526	
337,778	340,391	361,790	378,775	426,862	
337,778	340,459	361,817	381,298	427,647	
337,778	340,592	361,924	381,690	428,992	
337,778	340,678	361,924	381,914	431,671	
337,778	341,397	361,924	387,070	433,173	
337,879	341,397	361,924	388,435	434,148	
337,879	341,397	362,031	388,636	434,260	
337,931	341,429	362,139	389,424	434,260	
338,080	341,497	362,139	390,657	437,680	
338,180	342,301	362,568	390,881	439,528	
338,180	342,402	362,675	390,881	440,470	
338,281	342,402	362,782	392,002	441,972	*
338,281	342,402	362,782	392,398	441,994	*
338,281	342,402	362,997	392,398	443,115	*
338,281	342,402	362,997	392,675	443,227	*
338,281	342,402	363,855	393,460	445,918	*
338,381	342,603	363,922	394,115	447,711	*
338,381	342,854	363,963	394,391	449,591	*
338,482	342,904	363,963	395,081	451,844	*
338,582	343,608	363,963	399,893	451,844	*
338,582	343,608	364,821	401,519	451,952	*
338,582	343,608	364,928	402,539	451,952	*
338,582	343,608	365,036	403,558	456,118	*
338,582	344,914	365,036	405,489	458,696	*
338,582	347,126	365,250	407,313	459,705	*
338,582	347,930	365,680	407,957	460,041	*
338,582	348,734	365,680	407,957	460,377	*
338,582	348,734	366,109	407,957	469,120	*
338,582	348,734	366,109	407,957	470,690	*
338,582	348,835	366,423	408,064	470,690	*
338,683	348,935	367,026	408,386	472,371	*
338,683	348,935	367,026	410,273	472,371	*
338,683	348,935	367,127	410,273	475,397	*
338,683	349,437	367,396	410,446	484,028	*
				491,202	*

4.2

DINA y la solución de negociación de Kalai Smorodinsky

En esta sección se trata de ver cuál sería la solución de negociación de Kalai Smorodinsky para la negociación realizada entre el sindicato y la empresa. Recordemos que la solución Kalai Smorodinsky reparte de manera proporcional los activos disponibles.

Como en la sección anterior $M = \$148,547,843$ es la cantidad a distribuirse entre los jugadores y la utilidad de cada uno de éstos se representa por la cantidad de dinero obtenida. Ahora cada una de las demandas de los jugadores se van a representar por μ_i. Nuevamente el análisis se va a realizar por casos.

1. En este caso, igual que en la sección anterior vamos a suponer que el reparto se realiza únicamente entre los 506 trabajadores de la empresa, quienes tienen derecho a pedir todo el dinero en juego, es decir $\mu_i = M$ para $i = 1, 2, \ldots, 506$. El conjunto de negociación resultante para este juego de negociación es el siguiente:

   $$S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{506}) : 0 \leq s_i \leq M,\ i = 1, 2, \ldots, 506\ s_1 + s_2 + \cdots + s_{506} \leq M)\}.$$

   Se tiene que $\mu = (M, M, \ldots, M)$ es el vector de utilidades máximas para este juego, por lo que la línea Kalai Smorodinsky se encuentra parametrizada por la ecuación $u = t\mu \quad 0 \leq t \leq 1$.

   Para encontrar la solución KS a este juego, lo que hay que hacer es encontrar el valor máximo de t de tal forma que $u = t_{max}\mu\ \in U$.

   Consideremos el conjunto

   $$K = \{s \in S :\ (u_1(s), \ldots, u_{506}(s)) \in U, \tfrac{u_1(s)}{\mu_1} = \cdots = \tfrac{u_{506}(s)}{\mu_{506}}\}$$

   Entonces, si se define la constante $t = \frac{u_1(s)}{\mu_1} = \cdots = \frac{u_{506}(s)}{\mu_{506}}$, se puede tener cada $u_i(s) = t\mu_i$. Como se quiere que se agoten todos los activos disponibles sustituimos cada $u_i(s)$ en la ecuación $u_1(s) + u_2(s) + \cdots + u_{506}(s) = M$. Con ello se tiene que $t_{max} = \frac{M}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{506}}$, es decir, $t_{max} = \frac{M}{506M}$. De ahí que $t_{max} = \frac{1}{506}$. Se tiene entonces que la solución Kalai Smorodinsky indica la repartición equitativa de los activos M entre los 506 trabajadores de la empresa. Note que tanto en este caso como en el caso 1 de la sección anterior el conjunto de asignación de utilidades U es compacto, convexo y simétrico. De ahí que ambas soluciones coinciden.

2. Este caso se consideran los 506 trabajadores de la empresa junto con sus respectivas demandas para la distribución de M y $d = (0, 0, \cdots, 0)$. El conjunto de resultados factibles para este juego de negociación es el siguiente:

   $$S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{506}) : \ \ 0 \leq s_i \leq \mu_i, \ i = 1, 2, \ldots, 506, \ s_1 + s_2 + \cdot + s_{506} \leq M)\}.$$

   En principio, se tiene que el vector de utilidades máximas está dado por $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{506})$, por lo que la línea Kalai Smorodinsky se encuentra parametrizada por la ecuación $u = t\mu \quad 0 \leq t \leq 1$. Luego, se quiere encontrar el valor máximo de t de tal forma que $u = t_{max}\mu \ \in U$.

   Considere el conjunto

   $$K = \{s \in S : \ (u_1(s), \ldots, u_{506}(s)) \in U, \tfrac{u_1(s)}{\mu_1} = \cdots = \tfrac{u_{506}(s)}{\mu_{506}}\}.$$

   Nuevamente, si se define la constante $t = \frac{u_1(s)}{\mu_1} = \cdots = \frac{u_{506}(s)}{\mu_{506}}$, se puede tener cada $u_i(s) = t\mu_i$. Como se quiere que se agoten todos los activos disponibles sustituimos cada $u_i(s)$ en la ecuación $u_1(s) + u_2(s) + \cdots + u_{506}(s) = M$. Con ello se tiene que $t_{max} = \frac{M}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{506}}$, pero como $M = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{506}$, entonces la constante $t_{max} = 1$. Por tanto, la solución de negociación Kalai Smorodinsky indica que hay que repartir a cada jugador lo que cada uno demanda, es decir, hay que pagar a cada trabajador lo que a este le corresponde. Esta solución coincide con la solución de negociación de Nash que se obtuvo en el segundo caso, puesto que U sigue siendo un conjunto compacto y convexo.

3. En este otro caso, vamos a considerar los 506 trabajadores junto con la empresa para la distribución de M. Aqui la empresa tiene derecho a pedir todo el dinero en juego, por lo que ahora $M < \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{507}$. Se tiene entonces que:

   $$S = \{(s_1, s_2, \ldots, s_{507}) : \ \ 0 \leq s_i \leq \mu_i, \ i = 1, 2, \ldots, 507 \ s_1 + s_2 + \cdot + s_{507} \leq M)\}.$$

   Ahora el vector de utilidades máximas está dado por $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{507})$, por lo que la línea Kalai Smorodinsky se encuentra parametrizada por la ecuación $u = t\mu \quad 0 \leq t \leq 1$.

   El conjunto K se define como

   $$K = \{s \in S : \ (u_1(s), \ldots, u_{507}(s)) \in U, \tfrac{u_1(s)}{\mu_1} = \cdots = \tfrac{u_{507}(s)}{\mu_{507}}\}.$$

   Se define la constante $t = \frac{u_1(s)}{\mu_1} = \cdots = \frac{u_{507}(s)}{\mu_{507}}$, para poder expresar cada $u_i(s) = t\mu_i$. Nuevamente, como se quiere que se agoten todos los activos disponibles sustituimos cada $u_i(s)$ en la ecuación $u_1(s) + u_2(s) + \cdots + u_{506}(s) = M$. Con ello se tiene que $t_{max} = \frac{M}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{507} + \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{507}}$. Luego, la constante $t_{max} = \frac{1}{2}$.

   Por tanto, la solución de negociación Kalai Smorodinsky indica que hay que repartir a cada jugador la mitad de lo que cada uno demanda.

Obsérvese que los resultados que se tienen con esta solución para los diferentes juegos de negociación que se plantearon no se aproximan a la distribución que se hizo en la realidad. Sin embargo se podría lograr ésto suponiendo que la empresa tiene derecho a pedir el doble de los activos disponibles, de esta forma

$$\begin{aligned} t_{max} &= \frac{M}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{507} + 2(\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{507})} \\ &= \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

por lo que que cada uno de los 506 trabajadores recibe una tercera parte de lo que demanda y la empresa se queda con el resto de los activos disponibles.

4.3

DINA y el valor de Shapley

En esta sección se trata de ver cómo es que se distribuye el total de activos de la empresa DINA CAMIONES entre ésta y sus distintos empleados. Es decir, se quiere repartir una cantidad de dinero $M = \$148,547,843$ entre 506 empleados quienes exigen a la empresa una cantidad de dinero μ_i $i = 1, 2, \ldots, 506$ (mostradas en las tablas de la sección 4.1) y la empresa, quien demanda todos los activos, M. Observe que la cantidad de dinero disponible es insuficiente para pagar a cada parte de la negociación lo que cada uno demanda.

Como en la secciones anteriores, el análisis se va a realizar para distintos juegos, en el sentido de que se tienen distintas funciones características.

1. Este primer juego va a estar descrito por $N = 506$ jugadores. Además vamos a suponer que la decisión de distribuir la cantidad M se va llevar a cabo si se tiene una coalición formada por la mayoria de jugadores. Entonces se tiene la siguiente función característica v para cualquier coalición C:

$$v(C) = \begin{cases} M & \text{si } C \geq 254 \text{ jugadores,} \\ 0 & C < 254 \text{ jugadores.} \end{cases}$$

   Por eficiencia en el valor de Shapley, se debería tener que

$$\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{506} = M$$

Observe además que los 506 jugadores son simétricos entre sí, es decir, $v(C \cup \{i\}) = v(C \cup \{j\})$ para toda $C \in P(N)$ con $i, j \notin C, i = 1, 2 \ldots, 506$, $j = 1, 2, \ldots, 506$. Entonces por eficiencia y simetría en el valor de Shapley se tiene que $\phi_i = M/506$ para toda $i = 1, 2 \ldots, 506$. Es decir, se tiene la distribución equitativa de M entre los 506 jugadores, \$293, 573 se pagan a cada trabajador.

2. Supongamos ahora que se quiere distribuir la cantidad M entre los 506 trabajadores y la empresa, pero ahora considerando las demandas de cada parte. En vista de que las herramientas computacionales no son capaces de realizar cálculos con 2^{507} elementos, que son todas las coaliciones que resultan de tomar $N = 507$ jugadores vamos a enfocar el juego de una manera un tanto diferente. Para considerar los 506 jugadores junto con la empresa en esta distribución, vamos a agruparlos en siete categorías de acuerdo a la cantidad de dinero que el total de los miembros de esa categoría demanda, como se tiene a continuación:

Categoría	**Demanda**
A	\$3, 481, 888
B	\$11, 384, 544
C	\$24, 191, 869
D	\$48, 600, 921
E	\$32, 245, 754
F	\$28, 642, 867
G	\$148, 547, 843

Cada una de las categorías está formada por todos los jugadores cuyas demandas se encuentran en cierto rango como se muestra en la siguiente tabla:

Categoría	**Rango**
A	$0 \leq \mu_i < \$100,000$
B	$\$100,000 \leq \mu_i < \$200,000$
C	$\$200,000 \leq \mu_i < \$300,000$
D	$\$300,000 \leq \mu_i < \$350,000$
E	$\$350,000 \leq \mu_i < \$400,000$
F	$\$400,000 \leq \mu_i < \$500,000$
G	$\$500000 \leq \mu_i$

Se tienen entonces siete categorías, entre las cuales se va a distribuir la cantidad M. En este caso $N = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, es decir, las categorías son los jugadores, donde el jugador G representa a la empresa. El valor que la función característica v asigna a cada coalición lo vamos a suponer como el valor que cada una de éstas puede lograr; se paga todo a los jugadores que no forman parte de la coalición y lo que resta después de cada asignación es lo que cada coalición puede conseguir. Supongamos por ejemplo, que se tiene la coalición $\{EABFG\}$, como los jugadores C y D no forman parte de esta coalición se paga a cada uno de éstos lo que demandan, es decir se pagan $\$24,191,869$ a D y $\$48,600,921$ a C. El resto de los activos $\$75,755,053$ es el valor que se le asigna a la coalición $\{EABFG\}$. Con los siete jugadores que describen el juego se pueden formar un total de $2^7 = 128$ coaliciones. Los valores de cada coalición se muestran en la tabla que se encuentra al final de esta sección. Para cualquier otra coalición distinta de las que se encuentran en la tabla el valor de ésta es cero.

La distribución de M que se tiene de acuerdo al valor de Shapley es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi_A &= \$1,740,944, \\
\phi_B &= \$5,692,272, \\
\phi_C &= \$12,095,935, \\
\phi_D &= \$24,300,461, \\
\phi_E &= \$16,122,877, \\
\phi_F &= \$14,321,434, \\
\phi_G &= \$73,849,313.
\end{aligned}$$

Ahora, la pregunta es ¿cómo se distribuye este valor entre los integrantes de cada categoría? Observe que se tienen muchas formas de repartir nuevamente este valor. Vamos a proponer que los integrantes de cada categoría se reparten equitativamente este valor. De esta manera se tiene la siguiente asignación:

- Dentro de la categoría A que está formada por 42 trabajadores, cada uno de los trabajadores obtiene $\$41,451$.
- En la categoría B, cada uno de los 70 trabajadores que la conforman obtiene $\$81,318$.
- Dentro de la categoría C, que está formada por 93 trabajadores, cada trabajador obtiene $\$130,064$.
- En la categoría D, cada uno de los 147 trabajadores obtiene $\$165,309$.
- En la categoría E, cada uno de los 87 trabajadores que la forman obtiene $\$185,320$.
- En la categoría F, cada uno de los 67 trabajadores obtiene $\$213,753$.
- Finalmente la categoría G, la cual esta formada únicamente por la empresa obtiene un total de $\$73,849,313$.

Recordemos que el reparto obtenido con el valor de Shapley se obtiene como media de las contribuciones marginales de cada una de las categorías a todas las posibles coaliciones de las que puede formar parte, en este sentido podemos decir que esta solución reflejaría de forma "justa" la cantidad que recibe cada una de las categorías. Note además que como se están considerando las demandas de cada uno de los integrantes del juego, la empresa resulta ser la más beneficiada.

C	$v(C)$	C	$v(C)$
$ABCDEFG$	\$148, 547, 843	$ABCDFG$	\$116, 302, 089
$BCDEFG$	\$145, 065, 955	$ACDEFG$	\$137, 163, 299
$EABCDG$	\$119, 904, 976	$EABCFG$	\$99, 946, 922
$BCDFG$	\$112, 820, 201	$CDEFG$	\$133, 681, 411
$ACDGF$	\$104, 917, 545	$ADEFG$	\$112, 971, 430
$BDEFG$	\$120, 874, 086	$ABDFG$	\$92, 110, 220
$ABDEG$	\$95, 713, 107	$EACDG$	\$108, 520, 432
$EBCDG$	\$116, 423, 088	$ABCDG$	\$87, 659, 222
$EABCG$	\$71, 304, 055	$EABFG$	\$75, 755, 053
$EACFG$	\$88, 562, 378	$EBCFG$	\$96, 465, 034
$ABCFG$	\$67, 701, 168	$CDFG$	\$101, 435, 657
$EFDG$	\$109, 489, 542	$AFDG$	\$101, 435, 657
$BDFG$	\$88, 628, 332	$ADEG$	\$84, 328, 563
$BDEG$	\$92, 231, 219	$BDAG$	\$563, 166, 24
$ECDG$	\$101, 435, 657	$ACDG$	\$84, 177, 334
$BCDG$	\$84, 177, 334	$EABG$	\$59, 919, 511
$EACG$	\$59, 919, 511	$EBCG$	\$67, 822, 167
$ABCG$	\$39, 058, 301	$EAFG$	\$85, 080, 490
$ECFG$	\$85, 080, 490	$EBFG$	\$85, 080, 490
$ABFG$	\$43, 509, 299	$ACFG$	\$56, 316, 624
$BCFG$	\$64, 219, 280	EDG	\$80, 846, 675
FDG	\$77, 243, 788	ADG	\$52, 082, 809
BDG	\$84, 177, 334	CDG	\$72, 792, 790
EAG	\$35, 727, 642	EBG	\$43, 630, 298
ECG	\$56, 437, 623	ABG	\$14, 866, 432
ACG	\$27, 673, 757	BCG	\$35, 576, 413
EFG	\$109, 489, 542	AFG	\$32, 124, 755
BFG	\$40, 027, 411	CFG	\$52, 834, 736
DG	\$48, 600, 921	EG	\$32, 245, 754
AG	\$3, 481, 888	BG	\$11, 384, 544
CG	\$24, 191, 869	FG	\$28, 642, 867

4.4

DINA y el Núcleo

En esta sección se analizará cuáles son los acuerdos de distribución de M entre los 506 trabajadores que se encuentran en el Núcleo del juego. Nuevamente el juego va a estar descrito por $N = 506$ jugadores, junto con la siguiente fución característica:

$$v(C) = \begin{cases} M & \text{si } C \geq 254 \text{ jugadores,} \\ 0 & C < 254 \text{ jugadores.} \end{cases}$$

para toda coalición C en $P(N)$.

Entonces si $(x_1, x_2, \ldots, x_{506})$ es la asignación del núcleo, se debe por lo menos tener que $x_1+x_2+\ldots+x_{506} = M$, es decir, que se agoten todos los activos disponibles, que para cualquier coalición formada por la mayoría de los jugadores la suma de la asignación de cada uno de sus miembros sea al menos tan buena como M y que para el resto de las coaliciones la suma de la asignación de cada miembro de la coalición sea mayor o igual a cero.

Para ver que el conjunto de vectores que satisfacen las condiciones anteriores es vacío, vamos a analizar el caso de $N = 3$ jugadores.

Entonces si (x_1, x_2, x_3) es un vector que pertenece al núcleo del juego, se debe por lo menos tener:

1. $x_1 + x_2 + x_3 = M$
2. $x_1 + x_2 \geq M$
3. $x_1 + x_3 \geq M$
4. $x_2 + x_3 \geq M$
5. $x_1 \geq 0$
6. $x_2 \geq 0$
7. $x_3 \geq 0$

Ahora si se suman las ecuaciones 2, 3 y 4 se tendría la siguiente desigualdad: $x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{3}{2}M$, lo cual nos lleva a una contradicción. Entonces para este caso particular $C(v) = \emptyset$. En general, se tiene que la región factible que describe las condiciones del núcleo para el caso de $N = 506$ jugadores es vacía. Por tanto se tiene $C(v) = \emptyset$, es decir, para esta función característica no existe alguna distribución de M entre la gran coalición que no pueda ser bloqueada por ninguna otra coalición.

4.5

Conclusiones

Resultaría bastante importante conocer los criterios en los que se basó la negociación entre el titular del CCT y DINA CAMIONES para acordar la liquidación que se dío en la realidad. Hay que tener en cuenta que las soluciones que aplicamos a esta situación, se aplicaron bajo ciertos supuestos, lo cual originó distintos juegos de negociación entre la empresa y sus trabajadores. Además hay que considerar que existen distintos factores ya sea económicos, políticos, entre otros, que no se están considerando, a partir de ésto las soluciones pueden o no aproximarse a la realidad.

Ya vimos que en lo que se refiere a juegos de negociación simétricos, la solución simétrica de Nash que en nuestro caso fue dar a cada jugador $293,573 resulta ser la más justa; lo mismo se tiene para la solución de negociación de Kalai-Smorodinsky, pero cuando todos los jugadores tienen derecho a exigir todo el dinero en juego. Vimos también que cuando ya se considerán las demandas de cada uno de los trabajadores, si lo que se va a distribuir es precisamente lo que se está exigiendo, tanto la solución de Nash como la solución de Kalai Smorodinsky indican que simplemente hay que pagar a cada trabajador lo que exige. Sin embargo cuando la cantidad de activos disponibles ya no es suficiente para pagar a cada trabajador lo que demanda, la solución Kalai Smorodinsky, que indica que hay que liquidar a cada trabajador de manera proporcional a lo que cada uno de éstos exige, parece ser más justa en comparación con la solución de Nash que crea antiguedad en los trabajadores, favoreciendo a los trabajores con las demandas más pequeñas.

En cuanto al a solución simétrica que se obtuvo con el valor de Shapley, es decir, pagar los $293,573 resulta un tanto razonable pensar que la distribición se va a llevar a cabo si se tiene una coalición formada por la mayoría de trabajadores. En el caso 2, la asignación que indica el valor de Shapley se ve afectada por la manera en que se realiza la clasificación de las categorías, por lo que según nuestro caso, la empresa fue la más beneficiada.

En las siguientes tablas se muestra una lista de lo que cada uno de los 506 trabajadores demandaba a la empresa y lo que la empresa le pagó.

Demanda	Pago	Demanda	Pago	Demanda	Pago
46,411	26,202	102,753	58,012	191,097	32,752
46,411	26,202	104,166	58,810	191,097	33,202
46,411	26,202	105,965	59,826	193,350	33,776
46,411	26,202	114,598	64,700	193,350	36,528
46,411	26,202	115,000	64,927	193,994	36,656
46,411	26,202	116,505	65,777	194,252	37,136
46,411	26,202	147,170	83,090	196,162	46,911
46,411	26,202	147,985	83,550	196,784	47,171
46,411	26,202	148,892	84,062	198,875	47,460
86,991	49,113	148,892	84,062	198,875	47,460
87,081	49,164	149,432	84,367	198,875	47,632
87,081	49,164	157,140	88,719	198,875	50,089
87,261	49,266	158,862	89,691	199,378	50,638
87,261	49,266	158,862	89,691	200,785	50,638
87,442	49,368	158,862	89,691	200,785	50,638
87,893	49,622	159,677	90,152	205,991	50,898
88,344	49,877	159,677	90,152	209,849	50,898
88,344	49,877	159,778	90,209	209,875	50,930
88,344	49,877	161,309	91,073	210,090	51,418
88,344	49,877	162,034	91,482	212,450	51,649
88,344	49,877	162,034	91,482	212,450	51,649
88,344	49,877	162,578	91,790	213,201	51,822
88,344	49,877	162,578	91,790	214,856	51,822
88,344	49,877	164,934	93,120	214,918	52,573
88,344	49,877	175,256	98,948	214,918	55,864
88,344	49,877	177,065	99,969	214,918	56,440
88,524	49,979	177,065	99,969	214,918	56,440
89,336	50,437	177,065	99,969	217,067	56,440
90,328	50,997	177,065	99,969	218,977	56,440
90,509	51,099	177,065	99,969	219,882	56,440
90,689	51,201	178,472	100,763	222,297	56,889
90,780	51,252	178,472	100,763	229,512	56,889
90,780	51,252	178,472	100,763	230,048	56,889
90,780	51,252	178,673	100,877	234,126	56,953
91,945	51,910	178,673	100,877	234,447	56,953
91,945	51,910	178,673	100,877	234,877	56,953
92,035	51,961	179,779	101,501	235,091	57,306
93,303	52,677	180,252	101,768	235,306	57,456
94,027	53,086	180,583	101,955	235,306	57,562
94,208	53,188	180,583	101,955	235,306	57,562
94,389	53,290	180,583	101,955	235,735	57,562
96,200	54,313	180,583	101,955	236,915	57,562
99,241	56,029	181,186	102,296	236,915	57,754
100,541	56,763	181,186	102,296	238,096	57,754
101,541	57,328	181,286	102,352	238,418	57,786
101,722	57,430	181,286	102,352	238,418	57,786
102,084	57,635	181,286	102,352	245,500	57,786
102,251	57,729	187,663	105,953	252,490	59,819
102,351	57,785	190,560	107,588	253,034	60,742
102,652	57,955	190,560	107,588	254,756	60,742

Demanda	Pago	Demanda	Pago	Demanda	Pago
259,287	146,391	290,353	163,931	327,225	184,749
261,593	147,693	294,323	166,173	327,928	185,146
263,201	148,601	297,971	168,232	332,094	187,498
264,206	149,169	298,400	168,475	332,094	187,498
264,306	149,225	298,615	168,596	334,461	188,835
276,725	156,237	299,044	168,838	334,863	189,062
280,856	158,569	300,332	169,565	336,493	189,982
280,991	158,646	300,439	169,626	336,815	190,164
280,991	158,646	300,439	169,626	336,815	190,164
280,991	158,646	300,546	169,686	337,459	190,527
280,991	158,646	300,654	169,747	337,459	190,527
280,991	158,646	301,083	169,989	337,577	190,594
280,991	158,646	301,083	169,989	337,678	190,651
280,991	158,646	301,083	169,989	337,778	190,707
280,991	158,646	301,083	169,989	337,879	190,764
280,991	158,646	301,083	169,989	337,879	190,764
280,991	158,646	301,298	170,111	337,931	190,794
280,991	158,646	302,371	170,717	338,080	190,878
280,991	158,646	303,122	171,141	338,180	190,934
280,991	158,646	303,700	171,467	338,180	190,934
280,991	158,646	304,243	171,774	338,281	190,991
281,493	158,929	304,517	171,928	338,281	190,991
281,493	158,929	304,517	171,928	338,381	191,048
281,493	158,929	304,517	171,928	338,381	191,048
281,493	158,929	304,606	171,979	338,482	191,105
281,493	158,929	304,787	172,081	338,582	191,161
281,493	158,929	306,118	172,832	338,683	191,218
281,493	158,929	306,963	173,309	338,884	191,332
281,493	158,929	307,324	173,513	338,884	191,332
281,493	158,929	307,324	173,513	338,884	191,332
281,493	158,929	309,023	174,472	339,185	191,502
282,700	159,610	309,023	174,472	339,286	191,559
283,403	160,007	309,131	174,533	339,487	191,672
283,403	160,007	309,131	174,533	339,487	191,672
283,403	160,007	309,435	174,705	339,487	191,672
283,403	160,007	309,435	174,705	339,487	191,672
283,403	160,007	309,435	174,705	339,487	191,672
283,403	160,007	309,435	174,705	339,682	191,782
283,403	160,007	309,435	174,705	339,682	191,782
284,710	160,745	313,488	176,993	340,291	192,126
286,479	161,744	314,099	177,338	340,391	192,183
287,423	162,277	314,862	177,769	340,459	192,221
287,423	162,277	316,671	178,790	340,592	192,296
287,624	162,391	318,380	179,755	340,678	192,345
287,624	162,391	318,682	179,926	341,397	192,751
287,624	162,391	321,983	181,790	341,429	192,769
288,026	162,617	322,199	181,912	341,497	192,807
288,831	163,072	322,300	181,969	342,301	193,261
289,132	163,242	322,501	182,082	342,402	193,318
290,245	163,870	326,923	184,579	342,603	193,432

Demanda	Pago	Demanda	Pago	Demanda	Pago
342,854	193,573	369,221	208,460	410,833	231,954
342,904	193,602	369,972	208,884	413,636	233,537
343,608	193,999	369,972	208,884	415,361	234,511
344,914	194,736	370,616	209,248	416,219	234,995
347,126	195,985	372,010	210,035	416,327	235,056
347,930	196,439	372,976	210,580	419,439	236,813
348,734	196,893	373,083	210,641	419,801	237,018
348,835	196,950	373,620	210,944	419,868	237,055
348,935	197,007	373,835	211,065	421,200	237,808
349,437	197,290	373,835	211,065	421,200	237,808
349,638	197,404	373,835	211,065	421,200	237,808
350,643	197,971	373,835	211,065	424,589	239,721
351,246	198,311	374,908	211,671	425,069	239,992
351,408	198,403	377,991	213,412	425,293	240,118
359,086	202,738	378,215	213,538	426,526	240,815
360,314	203,431	378,215	213,538	426,526	240,815
360,875	203,748	378,215	213,538	426,526	240,815
361,066	203,856	378,775	213,854	426,862	241,004
361,066	203,856	381,298	215,279	427,647	241,447
361,066	203,856	381,690	215,500	428,992	242,207
361,495	204,098	381,914	215,627	431,671	243,719
361,709	204,219	387,070	218,538	433,173	244,567
361,709	204,219	388,435	219,308	434,148	245,118
361,790	204,265	388,636	219,422	434,260	245,181
361,817	204,280	389,424	219,867	434,260	245,181
361,924	204,340	390,657	220,563	437,680	247,112
362,031	204,401	390,881	220,689	439,528	248,156
362,139	204,462	390,881	220,689	440,470	248,687
362,139	204,462	392,002	221,322	441,972	249,535
362,568	204,704	392,398	221,546	441,994	249,548
362,675	204,764	392,398	221,546	443,115	250,181
362,782	204,825	392,675	221,702	443,227	250,244
362,782	204,825	393,460	222,146	445,918	251,763
362,997	204,946	394,115	222,515	447,711	252,776
362,997	204,946	394,391	222,671	449,591	253,837
363,855	205,431	395,081	223,061	451,844	255,109
363,922	205,468	399,893	225,778	451,844	255,109
363,963	205,492	401,519	226,696	451,952	255,170
364,821	205,976	402,539	227,272	451,952	255,170
364,928	206,036	403,558	227,847	456,118	257,522
365,036	206,097	405,489	228,937	458,696	258,978
365,250	206,218	407,313	229,967	459,705	259,547
365,680	206,461	407,957	230,331	460,041	259,737
366,109	206,703	407,957	230,331	460,377	259,927
366,109	206,703	407,957	230,331	469,120	264,863
366,423	206,880	407,957	230,331	470,690	265,750
367,026	207,221	408,064	230,391	470,690	265,750
367,026	207,221	408,386	230,573	472,371	266,699
367,127	207,278	410,273	231,638	472,371	266,699
367,396	207,430	410,273	231,638	475,397	268,407
367,396	207,430	410,446	231,736	484,028	273,280

Bibliografía

[1] Charalambos D. Aliprantis, Subir K. Chakrabarti, *Games and Decision Making*, Oxford Univessity Press, New York, 2000. ISBN 0-19-512609-2.

[2] Roy Gardner, *Games for Business and Economics*. Antoni Bosch Ed., New York, 1996. ISBN 84-85855-78-7.

[3] Jurgen Eichberger, *Game Theory for Economists*. Academic Press, San Diego California, 1993. ISBN 0-12-233620-8.

[4] Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein, *A Course in Game Theory*. The MIT Press, London, England, 1994. ISBN 0-262-15041-7.

[5] Hans J. M. Peters, *Axiomatic Bargaining Game Theory*. Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 1992. ISBN 0-79-23-18-73.

[6] Contrato Colectivo de Trabajo 2000-2002, Dina Camiones S.A. de C.V.

[7] Convenio Dina Camiones S.A. de C.V. y el Sindicato Nacional Independiente de Trabajadores de la Industria Automotriz, Similares y Conexos, 13 de Febrero del 2002.