



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

---

# Aspectos Matemáticos de la Tomografía Computarizada

Tesis que para obtener el título de

Licenciado en Matemáticas Aplicadas

presenta

Imelda Trejo Lorenzo

bajo la dirección del

Dr. Jaime Cruz Sampedro

PACHUCA, HIDALGO. ABRIL DE 2008.

---

## Resumen

---

En este trabajo se estudian algunos aspectos matemáticos del problema de reconstrucción de una función de dos variables a partir de sus proyecciones. Primeramente tratamos el caso en el que se conocen todas las proyecciones y luego aquél en el que éstas se conocen solamente para un número finito de direcciones uniformemente distribuidas.

**Abstract.** In this work we study some mathematical aspects of the problem of reconstruction of a function in two variables starting from its projections. First we treat the case for which all the projections are known, and then the case when the projections are known only on a finite number of uniformly distributed directions.

*Este trabajo está dedicado a toda mi familia, en especial a mis papás,  
Isabel Lorenzo Martín y José Trejo Martínez.*

---

## Agradecimientos

---

Mis agradecimientos a todos los miembros de mi jurado de tesis por sus observaciones y correcciones. Un reconocimiento muy especial al Dr. Rubén Alejandro Martínez Avendaño por haber leído cuidadosamente este trabajo y por haberme guiado en la presentación de algunas demostraciones de los teoremas del Apéndice A. A la Dra. Olivia Carolina Gutú Ocampo, por haberme auxiliado en el uso de  $\text{\LaTeX}$ . Finalmente, estoy muy agradecida con el Dr. Jaime Cruz Sampedro, por haberme brindado todo su apoyo, paciencia y asesoría para la elaboración del presente trabajo. También, le agradezco al Dr. Cruz por haberme prestado toda la bibliografía que necesité y por su asistencia en la redacción de esta tesis.

---

## Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Museo</b>	<b>3</b>
<b>2. Tomografía Computarizada</b>	<b>7</b>
2.1. Reseña histórica . . . . .	7
2.2. Modelo matemático de la CT . . . . .	9
2.3. Planteamiento del problema . . . . .	11
<b>3. La Transformación de Radon</b>	<b>13</b>
3.1. Notación y terminología . . . . .	13
3.2. La transformación de Radon en espacios de Schwartz . . . . .	16
3.3. Reconstrucción de una función cuando se conocen todas sus proyecciones	19
3.4. La transformación de Radon en $L^2$ . . . . .	21
<b>4. Reconstrucción de una Función de dos Variables a Partir de un     Número Finito de sus Proyecciones</b>	<b>25</b>
4.1. Proyecciones de una función . . . . .	25
4.2. Funciones crestas . . . . .	27
4.3. Reconstrucción óptima de una función a partir de sus proyecciones . .	36
4.3.1. Aproximación polinomial óptima . . . . .	43

4.3.2. Consistencia . . . . .	45
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>A. Algunos Resultados Básicos de Análisis</b>	<b>51</b>
A.1. Espacios de Hilbert . . . . .	51
A.2. La transformación de Fourier . . . . .	61
<b>B. Los Polinomios de Chebyshev de Segunda Clase</b>	<b>65</b>
<b>C. Algunas Sumas Auxiliares</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

---

## Introducción

---

Uno de los desarrollos tecnológicos más impresionantes de las últimas décadas es la imagenología médica, la cual ha revolucionado las técnicas para prevenir, diagnosticar y dar tratamiento a una gran cantidad de enfermedades. Con las modernas técnicas de imagenología es posible “ver” el interior del cuerpo humano de manera precisa, segura y conveniente para localizar y evaluar tumores, sangre coagulada u otras patologías, que anteriormente eran imposibles de localizar y evaluar sin realizar algún tipo de cirugía.

Es bien conocido que el gran avance de la computación de los últimos años ha jugado un papel fundamental en el desarrollo e implementación de una técnica imagenológica muy exitosa conocida como Tomografía Computarizada (CT, por sus siglas en inglés), la cual fue inventada independientemente en los años sesenta del siglo XX por el físico sudafricano *Allan MacLeod Cormack (1924-1998)* y el ingeniero inglés *Godfrey Newbold Hounsfield (1919-2004)* [3, 4, 10], a quienes en 1979 se les otorgó el premio Nóbel de medicina por este grandioso invento.

Aunque menos reconocido, el papel desempeñado por la matemática en el desarrollo de los grandes avances tecnológicos de la imagenología médica también ha sido fundamental. En 1917 el matemático austriaco *Johann Radon (1887-1956)* demostró matemáticamente que es posible recobrar una función de dos variables si se conocen las integrales de la misma en todas las líneas del plano [16]. Este resultado equivale a que se puede reconstruir la imagen de un objeto bidimensional si se conoce suficiente información del objeto en cada una de las líneas que lo cruzan. En la práctica esta información se obtiene al hacer pasar haces de rayos X a través del objeto estudiado, midiendo la atenuación que sufren éstos al interactuar con el objeto.

Los resultados matemáticos de Radon anteriormente mencionados, así como los análogos que obtuvo para funciones de tres variables, permanecieron olvidados por mucho tiempo hasta que Cormack y Hounsfield los retomaron casi cincuenta años

después. Este olvido se debió seguramente a que las limitaciones tecnológicas de la época de Radon hicieron inconcebible la implementación práctica de sus investigaciones.

Una seria dificultad en la aplicación de los resultados de Radon es que en la vida real solamente se puede obtener información del objeto para haces de líneas en un número finito de direcciones (las direcciones en las cuales se apuntan los haces de rayos X). Esto conduce al problema matemático de encontrar la mejor aproximación de la imagen que se puede conseguir con la información disponible del objeto estudiado, así como un algoritmo eficiente para obtenerla. Al abordar estos problemas, Cormack y Hounsfield abrieron un amplio campo de investigación el cual es actualmente muy activo y está siendo desarrollado por expertos en computación, física, ingeniería, matemática y medicina.

A continuación estudiamos el problema anterior desde el punto de vista matemático, siguiendo de cerca el trabajo [12] de *B. F. Logan y L. A. Shepp*.

Esta tesis está organizada de la manera siguiente. Iniciamos con una breve reseña histórica de la CT, luego presentamos una descripción matemática del modelo que sustenta esta técnica de reconstrucción y formulamos las preguntas específicas que abordaremos en este trabajo; continuamos con la exposición de las bases matemáticas que emplearemos para dar solución a los problemas planteados y, finalmente, presentamos un método matemático para la reconstrucción de una función de dos variables, a partir de un número finito de sus proyecciones. Anexamos también tres apéndices que incluyen algunos resultados básicos del análisis y cálculos auxiliares para el desarrollo del estudio aquí realizado.



# CAPÍTULO 1

---

Museo

---



Joseph Fourier, 1768-1830 [27].



Wilhelm Konrad Röntgen, 1845-1923, Premio Nóbel de Física en 1901 [31].



Johann Radon, 1887-1956 [29].



John von Neumann, 1903-1957 [32].



Laurent Moïse Schwartz, 1915-2002, Medalla Fields en 1950 [28].



Godfrey Newbold Hounsfield, 1919-2004, Premio Nóbel de Medicina en 1979 [30].



Allan MacLeod Cormack, 1924-1998, Premio Nóbel de Medicina en 1979 [30].

---

### Tomografía Computarizada

---

La palabra tomografía proviene de las raíces griegas *tomos* y *grafía* que significan, respectivamente, “sección” o “corte” y “escritura”. Por esta razón podríamos decir que etimológicamente tomografía significa *imagen seccional*. Hoy en día la palabra tomografía es un término genérico que se usa para referir a cualquier técnica de reconstrucción de imágenes transversales de un objeto sólido.

Gracias a los grandes avances computacionales de las últimas décadas se ha logrado desarrollar una gran variedad de algoritmos que integran imágenes seccionales y permiten visualizar tridimensionalmente la estructura interna de casi cualquier objeto sólido. Este proceso es paradigma de lo que se conoce actualmente como Tomografía Computarizada.

En este capítulo presentamos una reseña histórica del desarrollo de la tomografía, luego formulamos el modelo matemático de la CT y finalmente planteamos los problemas que se estudiarán en este trabajo.

### 2.1. Reseña histórica

La historia probablemente comenzó en 1895 cuando el físico alemán *Wilhelm Konrad Röntgen (1845-1923)* descubrió los rayos X, al observar cómo se había velado accidentalmente una placa fotográfica. La trascendencia física y médica de este descubrimiento fue reconocida al otorgársele a Röntgen el Premio Nóbel de física en 1901.

Röntgen descubrió además la propiedad penetrante de los rayos X sobre la materia y la acción de éstos sobre las películas químicas de placas fotográficas y pantallas fluorescentes. Con estas propiedades de los rayos X fue posible obtener imágenes

bidimensionales o radiografías del interior del cuerpo humano y aunque estos avances tecnológicos revolucionaron la práctica médica de principios del siglo XX, ya que permitieron ver claramente huesos, cavidades y objetos extraños dentro del cuerpo humano, no fueron suficientes para detectar la compleja anatomía de los tejidos suaves tales como músculos, tendones, nervios y vasos sanguíneos.

Un importante progreso se dio cuando se logró medir la cantidad de rayos X absorbida por distintos materiales, por medio de un detector tan sensible que es capaz de registrar la diferencia entre 99 y 100 hojas de papel delgado [20]. Este avance permitió asociar a cada material una única función llamada *coeficiente de atenuación*, la cual mide la capacidad del material para absorber o dispersar la radiación de rayos X y es característica de cada material. Los datos que se obtienen al radiar un objeto por medio de rayos X desde distintas direcciones suelen referirse como las *proyecciones* del objeto.

En 1917 Radon demostró matemáticamente [16] que es posible reconstruir un objeto bidimensional o tridimensional si se conocen todas sus proyecciones. Sin embargo, sus trabajos permanecieron olvidados casi cincuenta años, hasta que a mediados de los sesentas fueron retomados por Cormack y Hounsfield, quienes los usaron para desarrollar de manera independiente los principios de la CT.

Alrededor de 1955, siendo residente físico en el Departamento de Radiología del Hospital Groote Schuur en Cape Town, Sudáfrica, y encargado de supervisar el uso de radioisótopos y de la calibración de los dispositivos para medir la cantidad de radiación a la que estaban expuestos los trabajadores de ese departamento, Cormack observó de manera directa graves deficiencias en los diagnósticos y tratamientos del cáncer en los pacientes. Motivado por estos problemas, Cormack inició una serie de experimentos y análisis para mejorar esos tratamientos, cuyos resultados se publicaron en 1963 y 1964. Cormack fue el primero en analizar la posibilidad de examinar el cuerpo humano analizando con una computadora la información obtenida por medio de sus proyecciones [22]. En 1963 y 1964, siendo profesor de la Universidad de Tufts, E.E.U.U., Cormack desarrolló algunas ecuaciones que más tarde servirían para reconstruir con la ayuda de una computadora las imágenes de la estructura interna de un objeto, a partir de información obtenida con el uso de rayos X.

Como sucedió con los trabajos de Radon, los trabajos de Cormack tampoco despertaron el interés de la comunidad científica. Sería hasta 1972 cuando Hounsfield publicó sus investigaciones y mostró al mundo el primer tomógrafo computarizado o escáner EMI, destinado inicialmente para uso clínico del cerebro, cuando se reconoció la importancia de las contribuciones de Cormack.

No obstante que Hounsfield construyó su primer escáner en 1967, debido a que hubo que corregirle varias fallas técnicas, este tomógrafo computarizado se usó por primera vez hasta 1972 en el Hospital Morley en Inglaterra [21]. Como dato curioso, nos parece interesante mencionar que Hounsfield realizó todos sus experimentos en los Laboratorios Centrales de Investigación de la compañía EMI (industria de música y electrónica), empresa que pudo financiar las investigaciones de Hounsfield, así como

---

la producción y distribución masiva de su invento por todo el mundo, en gran parte, gracias a las enormes ganancias que obtuvo por la venta de discos del grupo musical *The Beatles*. Por esta razón algunos afirman que el escáner EMI es el gran legado de los The Beatles para la humanidad [24].

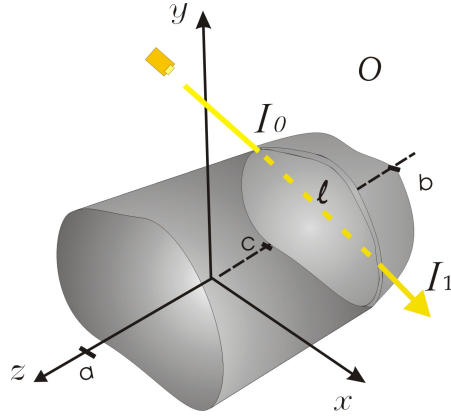
El descubrimiento de la CT marcó el inicio de un intenso trabajo de investigación, tanto físico y tecnológico como matemático, pues una vez mostrado el gran poder de la CT en los diagnósticos médicos, rápidamente se construyeron aparatos más sofisticados, empleando diferentes tipos de radiación tales como rayos gamma, rayos alfa y rayos beta; así como ultrasonido, resonancia magnética nuclear, iones y electrones, etc., dando lugar a distintas técnicas tomográficas [25]. De esta manera la CT amplió sus aplicaciones no sólo en medicina si no también en otras disciplinas. Por ejemplo, en la industria permitió detectar defectos en el interior de las máquinas, localizar fuentes de mantos petroleros y realizar predicciones meteorológicas, por mencionar sólo algunas [9, 11, 14]. Inclusive el arte ha sido beneficiado por la CT, ya que los detalles mostrados en las imágenes son tan ricos que permiten analizar las técnicas empleadas y determinar la autenticidad de las obras.

## 2.2. Modelo matemático de la CT

Aunque hoy en día la CT emplea diferentes tipos de radiación para la obtención de los datos que permiten reconstruir las imágenes, en casi todos los casos la idea principal para obtener estos datos sigue esencialmente el mismo principio [5, 14]. Este principio se apoya básicamente en el hecho de que el objeto radiado absorbe y dispersa parte de la radiación que lo atraviesa. La absorción y dispersión de rayos X de cada material es un hecho muy útil para la CT, las cuales se cuantifican por medio de una función conocida como *coeficiente de atenuación*; este coeficiente juega un papel muy importante en la reconstrucción de imágenes dado que cada material tiene un coeficiente característico determinado por sus propiedades físicas. Por esta razón, nos concentraremos en la construcción de un modelo matemático, que nos permitirá plantear de manera precisa el proceso de reconstrucción del coeficiente de atenuación de un material, a partir de sus proyecciones.

A continuación describimos el modelo de la CT de rayos X. Como en [5], tendremos en cuenta las siguientes suposiciones:

1. Los rayos X viajan en líneas rectas y los haces considerados son monocromáticos.
2. Al interactuar con la materia los rayos X se atenúan, es decir, su intensidad decrece excepto cuando interactúan con el aire.
3. Cada material está caracterizado por su coeficiente de atenuación,  $\mu$ .

Figura 2.1: Objeto  $O$ .

4. La intensidad  $I$  de cada haz de rayos X se atenúa de acuerdo con la *ley de Beer*

$$\frac{dI}{ds} = -\mu I,$$

en donde  $ds$  denota la longitud de arco de la trayectoria descrita por el haz.

Consideremos una fuente de rayos X que inciden en un objeto tridimensional  $O$ , el cual absorbe radiación de acuerdo con un coeficiente de atenuación  $\mu$ , que supondremos continuo. Si fijamos un sistema de coordenadas  $x, y, z$ , como se muestra en la figura, entonces el coeficiente de atenuación de cada rebanada o corte transversal de  $O$  estará dado por

$$\mu_c(x, y) = \mu(x, y, c),$$

con  $c \in [a, b]$ , fijo, y  $x, y \in \mathbb{R}$ . Por simplicidad denotaremos

$$\mu_c(x, y) = f(x, y).$$

Al interactuar el haz de rayos X con la rebanada, de acuerdo con la Ley de Beer, la intensidad  $I$  del haz satisface

$$\frac{dI}{ds} = -f(x, y)I.$$

Si denotamos con  $\ell$  la trayectoria descrita por el haz de rayos X y con  $I_0$  e  $I_1$  sus respectivas intensidades, antes y después de atravesar el corte, entonces la atenuación promedio de la intensidad del haz al atravesar totalmente el corte es

$$\int_{I_0}^{I_1} \frac{dI}{I} = - \int_{\ell} f(x, y) ds.$$



Por lo tanto,

$$\log\left(\frac{I_0}{I_1}\right) = \int_{\ell} f(x, y) ds,$$

cantidad que Radon denominó proyección de  $f$  a lo largo de  $\ell$ . Es importante notar que el valor que está a la izquierda de la igualdad anterior es justamente lo que se mide al radiar el objeto estudiado con rayos X. Si estas mediciones se realizan en muchas direcciones es natural preguntarse:

*¿Es posible determinar  $f$  si se conocen todas sus proyecciones?*

Una respuesta afirmativa implicaría que se puede reconstruir la imagen de cada corte de  $O$  y de ahí la imagen completa de  $O$ .

Radon demostró que si  $f$  es continua y de soporte compacto entonces está determinada de manera única por todas sus proyecciones; más aún, Radon dio una fórmula explícita para recobrar  $f$ .

Aparentemente el trabajo de Radon resuelve completamente el problema de reconstrucción, sin embargo, en la práctica no se conocen todas las proyecciones de  $f$  ya que es imposible hacer una infinidad de mediciones. Además, debido a que el exceso de radiación es dañino para el paciente, es recomendable minimizar la exposición del mismo a los rayos X. Por lo tanto surge la pregunta:

*¿Qué podemos reconstruir de  $f$  si solamente se conoce un número finito de sus proyecciones?*

Este es el verdadero problema de la CT y en este trabajo estudiaremos algunos aspectos matemáticos del mismo, como se hace en el artículo [12] de Logan y Shepp. Entre otros resultados se obtienen fórmulas que en distintos sentidos proporcionan aproximaciones óptimas de  $f$  en términos de un número finito de sus proyecciones.

Es importante notar que no se puede hallar una reconstrucción exacta del objeto, pues el modelo antes descrito es sólo una aproximación a la realidad y más aún, solamente se conoce un número finito de proyecciones. No obstante, este problema se ha atacado de muy diversas maneras con excelentes resultados. Por ejemplo, se han desarrollado técnicas de reconstrucción muy exitosas tales como la Phantom, la Filter Back-projection y las de discretización (ver por ejemplo [3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14]).

## 2.3. Planteamiento del problema

A continuación planteamos de manera precisa los problemas que estudiaremos en esta tesis.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el objeto  $O$ , considerado en el modelo descrito en la sección anterior, está contenido en la esfera de radio uno con centro en el origen. Por lo tanto, el coeficiente de atenuación de cada rebanada de  $O$  será una función con soporte contenido en el disco unitario  $D$ , representado por una función  $f$  en el espacio  $L^2(D)$  de las funciones medibles en  $D$  con valores reales

tales que

$$\int_D |f(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

Para  $t \in \mathbb{R}$  y  $\omega = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$  fijos, definimos la proyección de  $f$  sobre la línea  $\ell_{t, \theta}$ , dada por  $x \cos \theta + y \text{sen } \theta = t$ , como

$$P_f(t, \theta) = \int_{\ell_{t, \theta}} f ds,$$

en donde la última integral es una integral de línea en el sentido usual.

En este trabajo nos concentraremos en los problemas siguientes:

1. Suponiendo que se conoce  $P_f(t, \theta)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ , demostrar que  $f$  está determinada de manera única y hallar una expresión de  $f$  en términos de sus proyecciones.
2. Suponiendo que se conoce  $P_f(t, \theta_j)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\theta_j = j\pi/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ :

a) Demostrar que existe una infinidad de funciones  $g \in L^2(D)$  tales que

$$P_g(t, \theta_j) = P_f(t, \theta_j),$$

para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

b) Hallar la mejor aproximación polinomial de  $f$  en promedio cuadrático. Es decir, de todos los polinomios  $p(x, y)$  de grado  $n-1$  determinados por las  $n$  proyecciones de  $f$ , encontrar el que minimiza

$$\int_D |p(x, y) - f(x, y)|^2 dx dy.$$

- c) Encontrar la mejor aproximación, en promedio cuadrático,  $g$  de  $f$ , así como una expresión explícita de  $g$ , en términos de las  $n$  proyecciones conocidas de  $f$ .
  - d) Demostrar que cuando el número  $n$  de proyecciones conocidas de  $f$  tiende a infinito, las aproximaciones encontradas tienden a  $f$  en  $L^2(D)$ .
3. Determinar condiciones para decidir si una colección de proyecciones  $\{P_0(t), P_1(t), \dots, P_{n-1}(t)\}$  proviene de alguna función  $g \in L^2(D)$ .

## CAPÍTULO 3

---

### La Transformación de Radon

---

Los problemas matemáticos de la CT en esta tesis los dividiremos en dos casos, el primero consiste en recobrar una función cuando se conocen todas sus proyecciones y el segundo en estudiar que tanto se puede recobrar una función si se conocen sólo algunas de sus proyecciones.

En este capítulo presentamos la definición de la transformación de Radon, establecemos algunas de sus propiedades básicas y presentamos la solución de Radon al problema de reconstrucción para funciones en la clase de Schwartz, en el caso cuando se conocen todas las proyecciones de la función estudiada.

### 3.1. Notación y terminología

Debido a que la formulación de los problemas aquí tratados es esencialmente la misma en cualquier número de variables, utilizaremos notación y terminología de  $\mathbb{R}^n$ .

Sean  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  elementos de  $\mathbb{R}^n$ , se define el producto interno de  $x$  con  $y$  como

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

y la norma de  $x$  como

$$|x| = (x \cdot x)^{1/2}.$$

La bola unitaria cerrada de  $\mathbb{R}^n$  está dada por

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

y la esfera unitaria por

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Dados  $t \in \mathbb{R}$  y  $\omega \in S^{n-1}$  definimos el hiperplano  $H_{t,\omega}$  de  $\mathbb{R}^n$  como

$$H_{t,\omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \omega = t\} \quad (3.1)$$

y si elegimos vectores  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  tales que  $\omega, v_1, \dots, v_{n-1}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $H_{t,\omega}$  se puede describir como

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = t\omega + s_1v_1 + s_2v_2 + \dots + s_{n-1}v_{n-1}, \quad s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto, si  $f$  es integrable sobre  $H_{t,\omega}$  entonces

$$\int_{H_{t,\omega}} f d\sigma = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t\omega + s_1v_1 + \dots + s_{n-1}v_{n-1}) ds_1 ds_2 \dots ds_{n-1}.$$

Es importante notar que  $H_{t,\omega} = H_{-t,-\omega}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $\omega \in S^{n-1}$ .

Todo vector unitario  $\omega \in S^1$  es de la forma  $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , así que para  $n = 2$  escribiremos  $\ell_{t,\theta}$  en lugar de  $H_{t,\omega}$ . Luego, cada línea  $\ell_{t,\theta}$  estará dada por

$$\ell_{t,\theta} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \cdot \omega = t\}$$

y parametrizada por

$$\ell_{t,\theta} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = t\omega + s\hat{\omega}, s \in \mathbb{R}\},$$

en donde  $\omega$  es ortogonal a  $\ell_{t,\theta}$ ,  $\hat{\omega} = v_1 = (-\sin \theta, \cos \theta)$  y  $t$  es la distancia de  $\ell_{t,\theta}$  al origen, ver figura 3.1.

Si  $f$  es integrable sobre  $\ell_{t,\theta}$ , la integral de  $f$  a lo largo de la línea  $\ell_{t,\theta}$  está dada por

$$\begin{aligned} \int_{\ell_{t,\theta}} f ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t\omega + s\hat{\omega}) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds. \end{aligned}$$

Para introducir la definición del espacio de Schwartz es conveniente presentar la siguiente notación. Si  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  es un multi-índice, es decir, una  $n$ -ada de enteros no negativos, usaremos la notación

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \text{y} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Si  $\alpha$  y  $\beta$  son multi-índices y  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , definimos la seminorma  $\|f\|_{\alpha,\beta}$  de  $f$  como

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)|.$$

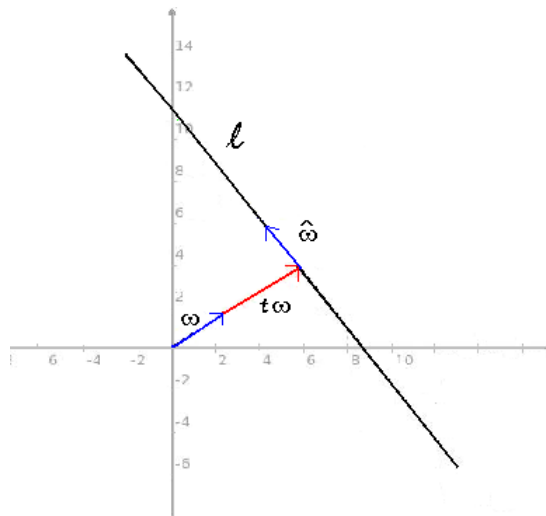


Figura 3.1: Descripción de la recta  $\ell$ .

**Definición 3.1.** El espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  se define como el conjunto de funciones  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} < \infty,$$

para todos los multi-índices  $\alpha, \beta$ .

Se verifica fácilmente que el espacio de Schwartz es un subespacio vectorial de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , el espacio de funciones medibles de  $\mathbb{R}^n$  tales que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

dotado de un producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \quad (3.2)$$

y de la norma dada por

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle,$$

en donde dos funciones  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  son iguales si el conjunto de los  $x$  tales que  $f(x) \neq g(x)$  es de medida cero. También se verifica fácilmente que  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , el conjunto de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en  $\mathbb{R}^n$ , es un subespacio denso en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  con respecto a la norma de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  y que la función  $f(x) = e^{-|x|^2}$  es un elemento del espacio de Schwartz que no es de soporte compacto.

## 3.2. La transformación de Radon en espacios de Schwartz

**Definición 3.2.** Si  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in S^{n-1}$  y  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , definimos la *transformación de Radon* de  $f$  como

$$\mathbf{R}f(t, \omega) = \int_{H_{t, \omega}} f d\sigma. \quad (3.3)$$

Observemos que la integral en el lado derecho de (3.3) está bien definida, pues si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\sup_{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}} \{(1 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n |f(t\omega + s_1 v_1 + \dots + s_{n-1} v_{n-1})|\} = C < \infty.$$

Por lo tanto, para todo  $s_1, \dots, s_{n-1}$  se tiene

$$|f(t\omega + s_1 v_1 + \dots + s_{n-1} v_{n-1})| \leq \frac{C}{(1 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n}$$

y como el lado derecho de esta última desigualdad está en  $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$  entonces también el lado izquierdo lo está.

Para dar al lector una idea de como actúa la transformación de Radon, calcularemos  $\mathbf{R}f(t, \omega)$  para  $f(x) = e^{-|x|^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\omega \in S^{n-1}$ .

Si  $\omega, v_1, \dots, v_{n-1}$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{R}f(t, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-(t^2 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)} ds_1 \dots ds_{n-1} \\ &= e^{-t^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \right)^{n-1} \\ &= \pi^{\frac{n-1}{2}} e^{-t^2}. \end{aligned}$$

### Propiedades de la Transformación de Radon

Es fácil verificar que

1. La transformación de Radon es lineal; esto es, si  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $c \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathbf{R}(cf) = c\mathbf{R}f \quad \text{y} \quad \mathbf{R}(f + g) = \mathbf{R}f + \mathbf{R}g.$$

2. La transformación de Radon es una función par; es decir,

$$\mathbf{R}f(t, \omega) = \mathbf{R}f(-t, -\omega), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \omega \in S^{n-1}.$$

Para cada  $\omega$  fijo en  $S^{n-1}$  definimos la transformación  $\mathbf{R}_\omega$  en el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  como  $\mathbf{R}_\omega f(t) = \mathbf{R}f(t, \omega)$ , para toda  $t \in \mathbb{R}$ . A la función  $\mathbf{R}_\omega f$  se le conoce como la *proyección de  $f$  en la dirección  $\omega$* . Por esta razón, como se hará en el siguiente capítulo, frecuentemente resulta conveniente utilizar la notación  $P_f(t, \omega)$  en vez de  $\mathbf{R}_\omega f(t)$ .

**Lema 3.3.** *Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $\omega \in S^{n-1}$ , entonces la función  $\mathbf{R}_\omega f$  pertenece a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .*

*Demostración.* Como  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces para todo  $k$  y  $m$  en  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  tenemos

$$\sup_{t, \dots, s_{n-1}} \left\{ (1 + |t|^k)(1 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n \left| \frac{d^m}{dt^m} f(t\omega + \dots + s_{n-1}v_{n-1}) \right| \right\} = C < \infty.$$

Por lo tanto, para todo  $t \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\begin{aligned} \left| t^k \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{R}_\omega f(t) \right| &= \left| t^k \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{d^m}{dt^m} f(t\omega + s_1 v_1 + \dots + s_{n-1} v_{n-1}) ds_1 \cdots ds_{n-1} \right| \\ &\leq \frac{C|t|^k}{1 + |t|^k} \int \frac{ds_1 \cdots ds_{n-1}}{(1 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n} \\ &\leq C \int \frac{ds_1 \cdots ds_{n-1}}{(1 + s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2)^n}. \end{aligned}$$

Como el lado derecho de esta última desigualdad es un número positivo independiente de  $t$ , entonces para todo  $k$  y  $m$  en  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  tenemos

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^k \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{R}_\omega f(t) \right| < \infty,$$

es decir,  $\mathbf{R}_\omega f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . ■

En seguida establecemos una relación muy importante entre las transformaciones de Fourier y de Radon, la cual nos permitirá resolver algunos de los problemas planteados en el Capítulo 2. Con este fin primeramente recordamos al lector la definición de transformación de Fourier en el espacio de Schwartz.

**Definición 3.4.** Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , definimos la *transformada de Fourier* de  $f$  como la función  $\hat{f}$  dada por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad (3.4)$$

y la *transformada inversa de Fourier* de  $f$  como la función  $\check{f}$  dada por

$$\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi \quad (3.5)$$

Ocasionalmente escribiremos  $\hat{f} = \mathfrak{F}(f)$  y  $\check{f} = \mathfrak{F}^{-1}(f)$ .

Las propiedades de la transformación de Fourier que emplearemos en esta tesis se enuncian y demuestran en el Apéndice A.

**Teorema 3.5.** (*Teorema central de las rebanadas*)

Si  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\omega \in S^{n-1}$  y  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(r\omega).$$

*Demostración.* En vista de que  $\mathbf{R}_\omega f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , para cada  $\omega \in S^{n-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}f(t, \omega) e^{-irt} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(t\omega + \sum s_j v_j) e^{-irt} ds_1 \cdots ds_{n-1} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-irx \cdot \omega} dx \\ &= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \hat{f}(r\omega). \end{aligned}$$

En la primera igualdad empleamos la definición de transformación de Fourier en  $\mathbb{R}$ , luego la definición de transformación de Radon de  $f$  y finalmente hicimos el cambio de variables  $x = t\omega + \sum_{j=0}^{n-1} s_j v_j$ , del cual se sigue que  $t = x \cdot \omega$ . ■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema central de las rebanadas.

**Corolario 3.6.** Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es tal que  $\widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) = 0$  para todo  $r \in \mathbb{R}$  y  $\omega \in S^{n-1}$ , entonces  $f \equiv 0$ .

*Demostración.* Por el Teorema 3.5 y la hipótesis del corolario tenemos que

$$\hat{f}(r\omega) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) = 0$$

para todo  $r \in \mathbb{R}$  y  $\omega \in S^{n-1}$  y por lo tanto  $\hat{f}(\xi) = 0$  para toda  $\xi \in \mathbb{R}^n$ . Luego, por la inyectividad de la transformación de Fourier, Teorema A.29, concluimos que  $f \equiv 0$ .

■



### 3.3. Reconstrucción de una función cuando se conocen todas sus proyecciones

En esta sección demostramos que las proyecciones de  $f$  determinan a  $f$  de manera única y presentamos la fórmula de reconstrucción de Radon.

El Teorema 3.5 muestra que al calcular la transformación de Fourier en  $\mathbb{R}$  de la transformación de Radon obtenemos la transformación de Fourier de  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ . Este hecho nos permite utilizar la transformación inversa de Fourier para recuperar a  $f$ , como se indica en el siguiente teorema.

**Teorema 3.7.** (*Fórmula de inversión de Radon*)

Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1} dr d\omega. \quad (3.6)$$

*Demostración.* Por la fórmula de inversión de Fourier (3.5), si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi.$$

Luego, si hacemos el cambio de variables  $\xi = r\omega$  en coordenadas esféricas y aplicamos el Teorema 3.5 tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \hat{f}(r\omega) e^{irx \cdot \omega} r^{n-1} dr d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) e^{irx \cdot \omega} r^{n-1} dr d\omega \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) e^{irx \cdot \omega} |r|^{n-1} dr d\omega, \end{aligned}$$

en donde hemos aplicado la Propiedad 2 de la transformada de Radon para obtener la última igualdad. ■

Observamos así que si conocemos todas las proyecciones de  $f$  entonces  $f$  se puede recuperar realizando las operaciones siguientes:

1. Para cada  $\omega$  se calcula la transformada de Fourier de la proyección  $\mathbf{R}_\omega f$ .
2. Para cada  $\omega$  se calcula la integral radial de la transformada de Fourier obtenida en 1; es decir, se calcula

$$\varphi \mathbf{R} f(t, \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) e^{irt} |r|^{n-1} dr.$$

3. Finalmente, se recupera  $f(x)$  realizando la proyección inversa

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} (\varphi \mathbf{R})f(x \cdot \omega, \omega) d\omega.$$

Al discretizar la fórmula de inversión de Radon por medio de sumas de Riemann y calcular las sumas resultantes por medio de una computadora, se obtiene el algoritmo de reconstrucción de imágenes conocido en la literatura de CT como *Filtered Back-Projection*.

De acuerdo al siguiente teorema, para  $n$  impar la fórmula de inversión de Radon se simplifica sustancialmente.

**Teorema 3.8.** *Si  $n = 2k + 1$  y  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces*

$$f(x) = \frac{(-1)^k}{2(2\pi)^{2k}} \int_{S^{n-1}} (\mathbf{R}_\omega f)^{(2k)}(x \cdot \omega) d\omega, \quad (3.7)$$

en donde  $g^{(2k)}(t)$  denota la  $2k$ -ésima derivada de  $g(t)$ .

*Demostración.* Utilizando la fórmula de inversión de Radon, la identidad

$$r^{2k} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) = \mathfrak{F} \left( (-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \mathbf{R}_\omega f(t) \right) (r),$$

que se obtiene de la fórmula (A.10) del Capítulo A, y la fórmula de inversión de Fourier tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2(2\pi)^{2k+\frac{1}{2}}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r) e^{irx \cdot \omega} r^{2k} dr d\omega \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^{2k}} \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F} \left( (-1)^k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \mathbf{R}_\omega f(t) \right) (r) e^{irx \cdot \omega} dr d\omega \\ &= \frac{(-1)^k}{2(2\pi)^{2k}} \int_{S^{n-1}} (\mathbf{R}_\omega f)^{(2k)}(x \cdot \omega) d\omega. \end{aligned}$$

■

Para ejemplificar la fórmula del Teorema 3.8 encontraremos la función  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  cuya transformada de Radon es

$$\mathbf{R}f(t, \omega) = \pi e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \omega \in S^2.$$

Al calcular la segunda derivada de  $\mathbf{R}f(t, \omega)$  respecto de  $t$  obtenemos

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{R}f(t, \omega) = \pi(4t^2 - 2)e^{-t^2}.$$

Luego por la fórmula (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} (4(x \cdot \omega)^2 - 2)e^{-(x \cdot \omega)^2} d\omega \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (4(x \cdot \omega)^2 - 2)e^{-(x \cdot \omega)^2} \sin \varphi d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

donde  $\omega = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$ . Por lo tanto, al hacer una rotación que transforma al vector  $(0, 0, 1)$  en el vector  $\omega$ , se obtiene

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (4|x|^2 \cos^2 \varphi - 2)e^{-|x|^2 \cos^2 \varphi} \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Finalmente, haciendo  $u = |x| \cos \varphi$  obtenemos

$$f(x) = -\frac{1}{2|x|} \int_0^{|x|} (4u^2 - 2)e^{-u^2} du = e^{-|x|^2}.$$

Note que la expresión obtenida para  $f$  concuerda con el ejemplo de la Sección 3.2 para  $n = 3$ .

Si el lector intenta resolver el ejercicio anterior en el caso  $n = 2$ , se convencerá fácilmente que en general la aplicación analítica de la fórmula de inversión de Radon no resulta tan sencilla como lo es para  $n = 3$ ; además, en la práctica solamente se conoce una colección finita de valores de  $\mathbf{R}_\omega f(t)$ . Por esta razón, el uso de los métodos de discretización y algoritmos computacionales (por ejemplo el Filter Back-projection) resultan ser muy útiles en la práctica, para la reconstrucción de imágenes.

### 3.4. La transformación de Radon en $L^2$

El siguiente teorema nos proporciona una identidad para la transformada de Radon, análoga a la identidad de Parseval para la transformada de Fourier.

**Teorema 3.9.** (*Identidad de Parseval para la transformación de Radon*)

Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |r|^{n-1} |\widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r)|^2 dr d\omega.$$

*Demostración.* Aplicando la identidad de Parseval para la transformada de Fourier (A.12), cambiando a coordenadas esféricas y utilizando el Teorema 3.5 tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} |\widehat{f}(r\omega)|^2 dr d\omega \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} |\widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r)|^2 dr d\omega \\
&= \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty |r|^{n-1} |\widehat{\mathbf{R}_\omega f}(r)|^2 dr d\omega.
\end{aligned}$$

Para obtener la última igualdad se usó la Propiedad 2 de la transformación de Radon.

■

Este resultado sugiere que la transformación de Radon no se puede extender a un operador lineal continuo de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ , en donde la norma de este último espacio está dada por

$$\|f\| = \int_{S^{n-1}} \int_{-\infty}^\infty |f(r, \omega)|^2 dr d\omega.$$

En efecto, consideremos la sucesión de funciones  $f_k$  en  $L^2(\mathbb{R}^2)$  dada por

$$f_k(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/4}}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq k^2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se verifica fácilmente que

$$\mathbf{R}f_k(\omega, t) \geq \begin{cases} \frac{2}{(1+t^2)^{1/4}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k^2-t^2}{1+t^2}}\right), & \text{si } |t| \leq k, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, para  $k$  suficientemente grande y  $|t| \leq k/2$  se tiene

$$\mathbf{R}f_k(t, \omega) \geq \frac{2 \arctan(1)}{(1+t^2)^{1/4}},$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{R}f_k\|^2 &\geq \int_0^{2\pi} \int_{-k}^k \frac{4}{\sqrt{1+t^2}} \arctan^2\left(\sqrt{\frac{k^2-t^2}{1+t^2}}\right) dt \\
&\geq 16\pi \arctan^2(1) \int_0^{k/2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt
\end{aligned}$$

y por lo tanto,  $\|\mathbf{R}f_k\|$  tiende a infinito cuando  $k$  tiende a infinito. Por otra parte, si  $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/4}}$  entonces  $f_k^2$  es una sucesión creciente de funciones medibles no negativas que converge en todo punto de  $\mathbb{R}^2$  a  $f^2$ . Por el teorema de la convergencia monótona se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_k\|^2 = \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = 2\pi.$$

Por lo tanto no puede existir  $M \geq 0$  tal que

$$\|\mathbf{R}f\| \leq M\|f\|,$$

para toda  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , ya que si este fuera el caso entonces para toda  $k$  se tendría

$$\|\mathbf{R}f_k\| \leq M\|f_k\|,$$

de donde se obtendría una contradicción al hacer tender  $k$  a infinito.

No obstante al resultado anterior, a continuación demostramos que la transformación de Radon es continua como transformación de  $L^2(B_n)$  en  $L^2(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ .

**Teorema 3.10.** *Si  $f \in C_0^\infty(B_n)$  entonces*

$$\|\mathbf{R}f\| \leq (\mu(B_{n-1})\mu(S^{n-1}))^{1/2} \|f\|, \quad (3.8)$$

en donde  $\mu(B_{n-1})$  denota el volumen de la bola unitaria en  $\mathbb{R}^{n-1}$  y  $\mu(S^{n-1})$  el área de la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Por la desigualdad de Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |\mathbf{R}_\omega f(t)|^2 dt &\leq \int_{-1}^1 \left( \int_{H_{t,\omega} \cap B_n} |f| d\sigma \right)^2 dt \\ &\leq \int_{-1}^1 \left[ \left( \int_{H_{t,\omega} \cap B_n} |f|^2 d\sigma \right) \left( \int_{H_{t,\omega} \cap B_n} d\sigma \right) \right] dt \\ &\leq \mu(B_{n-1}) \|f\|^2, \end{aligned}$$

en donde  $H_{t,\omega}$  es como en (3.1). Por lo tanto,

$$\|\mathbf{R}f\|^2 = \int_{S^{n-1}} \int_{-1}^1 |\mathbf{R}f(t, \omega)|^2 dt d\omega \leq \mu(B_{n-1})\mu(S^{n-1}) \|f\|^2,$$

de donde se sigue (3.8). ■

**Corolario 3.11.** *La transformación*

$$\mathbf{R} : C_0^\infty(B_n) \longrightarrow L^2([-1, 1] \times S^{n-1})$$

*dada por*

$$\mathbf{R}f(t, \omega) = \int_{H_{t, \omega}} f d\sigma$$

*tiene una única extensión lineal continua*

$$\mathbf{R} : L^2(B_n) \longrightarrow L^2([-1, 1] \times S^{n-1}).$$

*Demostración.* Si  $f \in L^2(B_n)$  entonces existe una sucesión  $\{f_k\}$  en  $C_0^\infty(B_n)$  que converge a  $f$  en  $L^2(B_n)$ . Luego, poniendo  $M = (\mu(B_{n-1})\mu(S^{n-1}))^{1/2}$ , por (3.8) se tiene

$$\|\mathbf{R}f_k\| \leq M\|f_k\|$$

y al hacer tender  $k$  a infinito obtenemos

$$\|\mathbf{R}f\| \leq M\|f\|.$$

■

---

### Reconstrucción de una Función de dos Variables a Partir de un Número Finito de sus Proyecciones

---

Aunque en el capítulo anterior se demostró que una función se puede reconstruir si se conocen todas sus proyecciones, en las aplicaciones sólo se puede conocer un número finito de éstas y por lo tanto el problema práctico consiste en encontrar la mejor aproximación de una función, en términos del número finito de sus proyecciones conocidas.

En este capítulo encontraremos la mejor aproximación en promedio cuadrático de una función  $f \in L^2(D)$  en términos de  $n$  proyecciones conocidas, las cuales se suponen uniformemente distribuidas, y encontraremos una fórmula explícita para esta aproximación, así como para el polinomio, determinado por las  $n$  proyecciones dadas, que mejor aproxima a  $f$ . Demostraremos además que cuando  $n$  tiende a infinito las aproximaciones encontradas tienden a  $f$  en  $L^2(D)$ . Aunque el material presentado en este capítulo sigue esencialmente a Logan y Shepp [12], es pertinente mencionar que la convergencia en  $L^2(D)$  de las aproximaciones a la función  $f$ , así como el Teorema 4.8 son contribuciones de la autora junto con su director de tesis. También es pertinente mencionar que en [7] se demuestra un resultado un poco más fuerte que el Teorema 4.8 con argumentos similares a los empleados por la autora de esta tesis.

#### 4.1. Proyecciones de una función

Por simplicidad, en este capítulo denotaremos con  $D$  al disco unitario cerrado en  $\mathbb{R}^2$ . En la notación del capítulo anterior  $D = B_2$ . Luego, todo vector unitario  $\omega \in S^1$  se puede expresar como  $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Si  $f \in L^2(D)$  escribiremos  $P_f(t, \theta)$  en lugar de  $\mathbf{R}_\omega f(t)$  y nos referiremos a esta función como la proyección de

$f$  en la dirección  $\theta$ , la cual estará dada por

$$P_f(t, \theta) = \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} f(t \cos \theta - s \operatorname{sen} \theta, t \operatorname{sen} \theta + s \cos \theta) ds, \quad (4.1)$$

para  $|t| \leq 1$  y  $P_f(t, \theta) = 0$  para  $|t| > 1$ .

El problema de reconstrucción de una función cuando sólo se conoce un número finito de proyecciones no es sencillo. Esto se debe en gran medida a que para cualquier número finito de direcciones dadas, existen funciones no cero cuyas proyecciones se anulan en esas direcciones, como se muestra a continuación.

Primeramente consideramos un ejemplo sencillo de una función no cero cuyas proyecciones se anulan en las direcciones  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\theta_3 = \frac{3\pi}{4}$ . Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2) \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} P_f(t, \theta_0) &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (t^2 - s^2) \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s \, ds = 0, \\ P_f(t, \theta_1) &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} (s^2 - t^2) \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t \, ds = 0, \\ P_f(t, \theta_2) &= -2 \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} ts \operatorname{sen}\left(\frac{t-s}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t+s}{\sqrt{2}}\right) ds = 0, \\ P_f(t, \theta_3) &= 2 \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} ts \operatorname{sen}\left(\frac{t+s}{\sqrt{2}}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{t-s}{\sqrt{2}}\right) ds = 0. \end{aligned}$$

Ahora consideramos un ejemplo más general, el cual muestra una función no cero cuyas proyecciones se anulan en  $n$  direcciones dadas. Fijemos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  y consideremos el polinomio en dos variables dado por

$$q(x, y) = (-x \operatorname{sen} \theta_1 + y \cos \theta_1) \cdots (-x \operatorname{sen} \theta_n + y \cos \theta_n).$$

Sea  $Q$  el operador diferencial que se obtiene al reemplazar  $x$  por  $-i\partial/\partial x$  y  $y$  por  $-i\partial/\partial y$  en  $q(x, y)$ . Si  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  entonces de (A.10) la transformada de Fourier de  $f = Qg$  está dada por

$$\hat{f}(x) = q(x)\hat{g}(x).$$

Escribiendo  $\omega_j = (\cos \theta_j, \operatorname{sen} \theta_j)$  y observando que  $q(t\omega_j) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ , por el Teorema 3.5 tenemos que

$$\widehat{P}_f(t, \theta_j) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(t\omega_j) = (2\pi)^{1/2} q(t\omega_j) \hat{g}(t\omega_j) = 0, \quad (4.2)$$



para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ , y por la inyectividad de la transformación de Fourier concluimos que  $P_f(t, \theta_j) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Por otra parte, se puede demostrar [6] que si las proyecciones de una función  $f \in L^2(D)$  se anulan para una infinidad de direcciones, entonces  $f(x, y) = 0$  para casi todo  $(x, y) \in D$ .

## 4.2. Funciones crestas

En esta sección introducimos una clase de funciones que jugarán un papel fundamental en nuestro estudio del problema de reconstrucción de una función.

**Definición 4.1.** Sea  $\theta \in [0, 2\pi]$  y  $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ . Una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se denomina *función cresta en la dirección  $\theta$*  si existe  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \rho(x \cdot \omega)$ , para casi todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Por ejemplo  $f(x, y) = \sin x$  es una función cresta en la dirección  $\theta = 0$  y  $f(x, y) = \cos(x + y)$  es una función cresta en la dirección  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Observe que para cada función cresta hay una familia de rectas paralelas, cuya unión es el plano, a lo largo de cada una de las cuales esta función es constante.

La siguiente proposición nos provee de una colección de funciones crestas.

**Proposición 4.2.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  y  $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$  entonces  $g(x) = P_f(x \cdot \omega, \theta)$  es una función cresta en la dirección  $\theta$ .

*Demostración.* Por el Teorema de Fubini, la función  $\rho(t) = P_f(t, \theta)$  está definida para casi todo  $t \in \mathbb{R}$  y para casi todo  $x \in \mathbb{R}^2$  se cumple  $g(x) = \rho(x \cdot \omega)$ . ■

Por comodidad en la notación, si  $f(x, y)$  es una función cresta en la dirección  $\theta$  tal que  $f(x, y) = \rho((x, y) \cdot \omega)$  escribiremos  $\rho(x, y)$  en vez de  $f(x, y)$ . En seguida estudiamos algunas propiedades de las funciones crestas.

**Proposición 4.3.** Sea  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Si  $\rho, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$  y  $\rho$  es una función cresta en la dirección  $\theta$  entonces

$$\langle g, \rho \rangle = \int_{\mathbb{R}} P_g(t, \theta) \rho(t) dt.$$

*Demostración.* Sea  $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$  y  $\hat{\omega} = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . Si hacemos el cambio de

variables  $x = t\omega + s\hat{\omega}$  entonces

$$\begin{aligned}\langle g, \rho \rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\rho(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(x)\rho(x \cdot \omega)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g(t\omega + s\hat{\omega})\rho(t)dt ds.\end{aligned}$$

Luego, por el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\langle g, \rho \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \rho(t) \int_{\mathbb{R}} g(t\omega + s\hat{\omega})ds dt. \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(t)P_g(t, \theta)dt.\end{aligned}$$

■

**Proposición 4.4.** *Sea  $g \in L^2(D)$  una función cresta en la dirección  $\theta$ , es decir*

$$g(x, y) = \rho(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

*entonces la función  $\rho \in L^2([-1, 1], \sqrt{1-t^2})$ .*

*Demostración.* Primero observemos que

$$\begin{aligned}P_g(t, \theta) &= \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \rho((t\omega + s\hat{\omega}) \cdot \omega) ds \\ &= 2\rho(t)\sqrt{1-t^2}.\end{aligned}$$

Luego de la Proposición 4.3, tenemos

$$\|g\|^2 = \langle g, g \rangle = \int_{-1}^1 \rho(t)P_g(t, \theta) dt = 2 \int_{-1}^1 \rho^2(t)\sqrt{1-t^2} dt.$$

Finalmente, como  $g \in L^2(D)$  entonces

$$\int_{-1}^1 \rho^2(t)\sqrt{1-t^2} dt < \infty.$$

■

De la misma forma como definimos las funciones crestas, definiremos los polinomios crestas.

**Definición 4.5.** Sea  $\theta \in [0, 2\pi]$  y sea  $q(x, y) = \sum_{j+k \leq N} a_{jk} x^j y^k$  un polinomio en  $x, y$  de grado  $N$ . Decimos que  $q(x, y)$  es un polinomio cresta de grado  $N$  en la dirección  $\theta$  si existe un polinomio  $q(t)$  de grado  $N$  tal que

$$q(x, y) = q(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Lema 4.6.** Sean  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$   $n$  ángulos distintos módulo  $\pi$ . Si  $p(x, y)$  es un polinomio de grado  $n - 1$  entonces existen  $n$  polinomios crestas  $\rho_j(x, y)$  de grado  $n - 1$ , en las direcciones  $\theta_j$  respectivamente, tales que

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j),$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

*Demostración.* Supongamos que el lema es falso. Entonces existe un polinomio  $q(x, y)$  de grado  $n - 1$  que es ortogonal al subespacio generado por el conjunto de los polinomios crestas de grado  $n - 1$  en las direcciones  $\theta_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ .

De la definición de proyección (4.1) tenemos que  $P_q(t, \theta_j)$  es el producto de la función  $\sqrt{1 - t^2}$  con un polinomio cresta de grado  $n - 1$  en la dirección  $\theta_j$ , es decir  $P_q(t, \theta_j) = \rho_j(t) \sqrt{1 - t^2}$ . Luego, de la Proposición 4.3, se tiene

$$\int_{-1}^1 P_q(t, \theta_j) \rho_j(t) dt = \int_{-1}^1 \rho_j^2(t) \sqrt{1 - t^2} dt = \langle q, \rho_j \rangle = 0.$$

Por lo tanto,

$$P_q(t, \theta_j) = 0 \text{ para toda } t \in [-1, 1] \text{ y } j = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (4.3)$$

Si fijamos  $t$  en la definición de proyección (4.1) entonces  $e^{i(n-1)\theta} P_q(t, \theta)$  es un polinomio en  $e^{i\theta}$  de grado  $2(n - 1)$ ; es decir,

$$e^{i(n-1)\theta} P_q(t, \theta_j) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{i(k+n-1)\theta} + \sum_{k=0}^{n-1} b_k e^{-i(n-1-k)\theta},$$

en donde los  $a_k$  y  $b_k$  son constantes en  $\mathbb{C}$ , y por lo tanto tiene a lo más  $2n - 2$  ceros. Por otro lado, combinando (4.3) con la propiedad  $P_q(t, \theta + \pi) = P_q(-t, \theta)$  tenemos que  $e^{i(n-1)\theta} P_q(t, \theta)$  tiene  $2n$  ceros; a saber,  $e^{i\theta_j}$  y  $e^{i(\theta_j + \pi)}$ , para  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ , lo cual es imposible a menos que  $e^{i(n-1)\theta} P_q(t, \theta) \equiv 0$ . Por lo tanto  $P_q(t, \theta) = 0$  para todo  $t \in [-1, 1]$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Ya que la transformada de Radon es inyectiva se sigue

que  $q(x, y) \equiv 0$  para casi todo  $(x, y) \in D$ . Por continuidad de  $q(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in D$  y por lo tanto, del Principio de Continuación Analítica [13], para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . ■

A continuación enunciamos y demostramos un resultado que jugará un papel muy importante es esta tesis. Comenzamos con el caso más sencillo.

**Teorema 4.7.** *Sea  $\theta \in \mathbb{R}$ . El conjunto  $M_\theta$  de todas las  $g \in L^2(D)$  para las cuales existe  $\rho : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x, y) = \rho(x \cos \theta + y \sin \theta)$ , para casi todo  $(x, y) \in D$ , es subespacio lineal cerrado de  $L^2(D)$ .*

*Demostración.* Claramente  $M_\theta$  es un subespacio lineal de  $L^2(D)$ . Para demostrar que  $M_\theta$  es cerrado, probaremos que si  $\{g_n\}$  una sucesión en  $M_\theta$  y  $g \in L^2(D)$  es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\| = 0,$$

entonces existe  $\rho : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x, y) = \rho(x \cos \theta + y \sin \theta)$ , para casi todo  $(x, y) \in D$ . Por el Teorema A.6 existe una subsucesión  $\{g_{n_k}\}$  de  $\{g_n\}$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(x, y) = g(x, y),$$

para casi todo  $(x, y) \in D$ . Por otro lado, para cada  $g_{n_k}$  existe  $\rho_{n_k} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$g_{n_k}(x, y) = \rho_{n_k}(x \cos \theta + y \sin \theta),$$

para casi todo  $(x, y) \in D$ . Por lo tanto, para casi todo  $t \in [-1, 1]$  existe

$$\rho(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{n_k}(t).$$

Claramente

$$g(x, y) = \rho(x \cos \theta + y \sin \theta),$$

para casi todo  $(x, y) \in D$ . ■

Aunque el subespacio  $M_\theta$  es cerrado en  $L^2(D)$ , para todo  $\theta \in \mathbb{R}$ , debido a que cada uno de estos subespacios es de dimensión infinita, no se sigue inmediatamente que si  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$  es un subespacio cerrado de  $L^2(D)$ , ya que, como se puede ver en el Apéndice A, la suma de subespacios cerrados de dimensión infinita no es necesariamente un subespacio cerrado. Por esta razón es importante demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 4.8.** *Para  $j = 1, 2, \dots, k$  y  $\theta_j$  ángulos igualmente espaciados en  $[0, 2\pi]$ , sea  $M_{\theta_j}$ , en donde  $M_{\theta_j}$  se define como en el Teorema 4.7. Entonces  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2} + \dots + M_{\theta_k}$  es un subespacio vectorial cerrado de  $L^2(D)$ .*

Fácilmente se verifica que  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2} + \cdots + M_{\theta_k}$  es un subespacio vectorial de  $L^2(D)$ . Para demostrar que este subespacio es cerrado procederemos por inducción. El caso  $k = 1$  se sigue del Teorema 4.7 con  $\theta_1 = \theta$ .

Para  $k = 2$ , en virtud de los Teoremas A.15 y A.17, demostrar que  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$  es cerrado es equivalente a demostrar que el ángulo  $\Phi$  entre  $M_{\theta_1}$  y  $M_{\theta_2}$  es positivo. Le recordamos al lector que  $\Phi$  es el ángulo en  $[0, \pi/2]$  que satisface

$$\cos \Phi = \sup \left\{ \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\| \|g\|} \right\}, \quad (4.4)$$

en donde el supremo se toma sobre todas las funciones no nulas  $f \in M_{\theta_1}$  y  $g \in M_{\theta_2}$ , tal que  $\langle f, h \rangle = \langle g, h \rangle = 0$  para toda  $h \in M_{\theta_1} \cap M_{\theta_2}$ . Usando los polinomios de Chebyshev de segunda clase, que se definen a continuación y cuyas propiedades se demuestran en el Apéndice B, encontraremos una expresión para (4.4).

**Definición 4.9.** Los polinomios de Chebyshev de segunda clase  $U_\alpha$  se definen como

$$U_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen}(\alpha + 1)\tau}{\text{sen } \tau}, \quad t = \cos \tau, \quad \tau \in [0, \pi] \quad \text{y} \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

**Proposición 4.10.** Sean  $M_{\theta_1}$  y  $M_{\theta_2}$  como en el Teorema 4.8. Si  $\Phi$  es el ángulo entre  $M_{\theta_1}$  y  $M_{\theta_2}$ , entonces

$$\cos \Phi = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta_1 = \theta_2 \text{ mód } \pi; \\ \max_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2-\theta_1)}{(\alpha+1)\text{sen}(\theta_2-\theta_1)} \right|, & \text{si } \theta_1 \neq \theta_2 \text{ mód } \pi. \end{cases} \quad (4.6)$$

*Demostración.* Primero observemos que si  $\theta_1 = \theta_2 \text{ mód } \pi$  entonces  $M_{\theta_1} = M_{\theta_2}$ , de donde se sigue que  $\cos \Phi = 1$ .

Supongamos ahora que  $\theta_1 \neq \theta_2 \text{ mód } \pi$  y sean  $f \in M_{\theta_1}$  y  $g \in M_{\theta_2}$  funciones no cero tal que  $\langle f, c \rangle = 0 = \langle g, c \rangle$  para toda función constante  $c$ . De la Proposición 4.4 se tiene que  $f, g \in L^2([-1, 1], \sqrt{1-t^2})$  y por el Teorema B.2 tenemos

$$f(x, y) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha U_\alpha(x \cos \theta_1 + y \text{sen } \theta_1) \quad \text{y} \quad g(x, y) = \sum_{\beta=1}^{\infty} b_\beta U_\beta(x \cos \theta_2 + y \text{sen } \theta_2).$$

Note que  $a_0 = b_0 = 0$  porque  $U_0$  es constante. Así, de la Proposición B.2 y de la

desigualdad de Schwarz obtenemos

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &= \left| \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} a_{\alpha} b_{\alpha} \right| \\ &\leq \sup_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right| \sum_{\alpha=1}^{\infty} |a_{\alpha} b_{\alpha}| \\ &\leq \sup_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right| \|f\| \|g\|, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\| \|g\|} \leq \sup_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right|.$$

Luego,

$$\cos \Phi \leq \sup_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right|.$$

Como el lado derecho de esta última desigualdad tiende a cero cuando  $\alpha$  tiende a infinito, se sigue que el supremo se alcanza y por lo tanto

$$\cos \Phi = \max_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right|.$$

■

Observemos que para  $\theta_1 = 0$  y  $\theta_2 = \pi/2$ , del Teorema 4.10, tenemos que el  $\cos \Phi = 1/3$ . De donde se sigue que  $\Phi \approx 78^\circ$  y por lo tanto  $M_0 + M_{\pi/2}$  es cerrado.

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de la Proposición 4.10.

**Corolario 4.11.** Sean  $M_{\theta_1}$  y  $M_{\theta_2}$  como en el Teorema 4.8, entonces  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$  es cerrado.

*Demostración.* Si  $\theta_1 = \theta_2 \pmod{\pi}$  entonces  $M_{\theta_1} = M_{\theta_2}$  y por el Teorema 4.7 concluimos que  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2} = M_{\theta_1}$  es cerrado. Supongamos ahora que  $\theta_1 \neq \theta_2 \pmod{\pi}$ . Ya que  $\theta_1 \neq \theta_2 \pmod{\pi}$ , se tiene que

$$\left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right| < 1$$

para todo  $\alpha \geq 1$ . Luego, por Teorema 4.10 el ángulo  $\Phi$  entre  $M_{\theta_1}$  y  $M_{\theta_2}$  satisface

$$\cos \Phi = \max_{\alpha \geq 1} \left| \frac{\text{sen}(\alpha+1)(\theta_2 - \theta_1)}{(\alpha+1) \text{sen}(\theta_2 - \theta_1)} \right| < 1$$

y en consecuencia  $\Phi$  es positivo. Por lo tanto, de los Teoremas A.15 y A.17,  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$  es cerrado. ■

Note que la Proposición 4.10 es valido para todo  $\theta_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2$ , y por lo tanto, el Corolario 4.11 también lo es. Para continuar con la inducción primero enunciamos y demostramos la siguiente proposición.

**Proposición 4.12.** *Dado  $\theta_j \in [0, 2\pi]$ , denotemos con  $U_{\alpha,j}$  el polinomio en  $\mathbb{R}^2$  dado por  $U_{\alpha,j}(x, y) = U_\alpha(x \cos \theta_j + y \sen \theta_j)$ . Entonces  $U_{\alpha,j} \in M_{\theta_1} + M_{\theta_2} + \cdots + M_{\theta_k}$  para todo  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ .*

*Demostración.* Cada  $U_{\alpha,j}$ ,  $\alpha = 0, 1, 2, \dots, k - 1$ , es un polinomio de grado  $\alpha \leq k - 1$  en  $\mathbb{R}^2$  y por el Lema 4.6, dados los ángulos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  existen  $k$  polinomios crestas  $q_m$  tal que el polinomio

$$U_{\alpha,j}(x, y) = \sum_{m=1}^k q_m(x \cos \theta_m + y \sen \theta_m).$$

Por lo tanto,  $U_{\alpha,j} \in M_{\theta_1} + M_{\theta_2} + \cdots + M_{\theta_k}$ . ■

El paso inductivo de  $k$  a  $k + 1$  de la demostración del Teorema 4.8 lo ilustramos a continuación con el paso de 2 a 3.

En vista del Teorema 4.7,  $M_{\theta_3}$  es cerrado y por el Corolario 4.11 también lo es  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$ . Si denotamos con  $\Theta$  el ángulo entre los subespacios cerrados  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$  y  $M_{\theta_3}$ , demostraremos que  $\cos \Theta < 1$ .

Observemos que las funciones constantes y el polinomio  $U_1(x \cos \theta_3 + y \sen \theta_3)$  están en  $(M_{\theta_1} + M_{\theta_2}) \cap M_{\theta_3}$ . La última afirmación se sigue del Corolario 4.12. Por lo tanto, si  $f \in M_{\theta_1} + M_{\theta_2}$  y  $g \in M_{\theta_3}$  son funciones tales que  $\langle f, h \rangle = \langle g, h \rangle = 0$  para todo  $h \in (M_{\theta_1} + M_{\theta_2}) \cap M_{\theta_3}$  entonces, de la Proposición 4.4 y el Teorema B.2, tenemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x \cos \theta_1 + y \sen \theta_1) + f_2(x \cos \theta_2 + y \sen \theta_2) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} (a_{\alpha,1} U_{\alpha,1} + a_{\alpha,2} U_{\alpha,2}) \end{aligned}$$

y

$$g(x, y) = \sum_{\beta=2}^{\infty} b_{\beta,3} U_{\beta,3}.$$

Denotemos con  $\mathcal{L}_3$  el espacio generado por el polinomio  $U_{\alpha,3}$ , con  $\mathcal{L}_{1,2}$  el espacio generado por los polinomios  $U_{\alpha,1}$  y  $U_{\alpha,2}$  y con  $\Theta_\alpha$  el ángulo entre  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_{1,2}$ . Al realizar

el producto interno de  $f$  con  $g$ , usando la desigualdad de Schwartz, tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle f, g \rangle| &\leq \sum_{\alpha=2}^{\infty} |\langle a_{\alpha,1}U_{\alpha,1} + a_{\alpha,2}U_{\alpha,2}, b_{\alpha,3}U_{\alpha,3} \rangle| \\
&\leq \sum_{\alpha=2}^{\infty} \cos \Theta_{\alpha} \|a_{\alpha,1}U_{\alpha,1} + a_{\alpha,2}U_{\alpha,2}\| \|b_{\alpha,3}U_{\alpha,3}\| \\
&\leq \sup_{\alpha \geq 2} \cos \Theta_{\alpha} \sum_{\alpha=2}^{\infty} \|a_{\alpha,1}U_{\alpha,1} + a_{\alpha,2}U_{\alpha,2}\| |b_{\alpha,3}| \\
&\leq \sup_{\alpha \geq 2} \cos \Theta_{\alpha} \|f\| \|g\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\cos \Theta \leq \sup_{\alpha \geq 2} \cos \Theta_{\alpha}. \quad (4.7)$$

A continuación demostraremos que  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \cos \Theta_{\alpha} = 0$  y que  $\cos \Theta_{\alpha} < 1$  para todo  $\alpha \geq 2$ , de donde concluiremos que

$$\cos \Theta \leq \max_{\alpha \geq 2} \cos \Theta_{\alpha} < 1.$$

Como  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_{1,2}$  son de dimensión finita tenemos

$$\cos \Theta_{\alpha} = \|P_{\mathcal{L}_{1,2}} U_{\alpha,3}\|,$$

en donde  $P_{\mathcal{L}_{1,2}} U_{\alpha,3}$  es la proyección de  $U_{\alpha,3}$  sobre  $\mathcal{L}_{1,2}$ . Haciendo un cálculo sencillo, aunque algo tedioso, se verifica que

$$\|P_{\mathcal{L}_{1,2}} U_{\alpha,3}\|^2 = \frac{\langle U_{\alpha,3}, U_{\alpha,2} \rangle^2 + \langle U_{\alpha,3}, U_{\alpha,1} \rangle^2 - 2\langle U_{\alpha,3}, U_{\alpha,1} \rangle \langle U_{\alpha,3}, U_{\alpha,2} \rangle \langle U_{\alpha,2}, U_{\alpha,1} \rangle}{1 - \langle U_{\alpha,2}, U_{\alpha,1} \rangle^2}. \quad (4.8)$$

Luego, si denotamos con  $G(u_1, u_2, u_3)$  el Gramiano de los vectores  $u_1, u_2, u_3$ , es decir

$$G(u_1, u_2, u_3) = \det \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_3, u_1 \rangle & \langle u_3, u_2 \rangle & \langle u_3, u_3 \rangle \end{pmatrix}$$

observamos que

$$\cos^2 \Theta_{\alpha} = 1 - \frac{G(U_{\alpha,3}, U_{\alpha,2}, U_{\alpha,1})}{G(U_{\alpha,2}, U_{\alpha,1})}$$

y ya que los polinomios  $U_{\alpha,1}, U_{\alpha,2}$  y  $U_{\alpha,3}$  son linealmente independientes, para todo  $\alpha \geq 2$ , entonces  $G(U_{\alpha,3}, U_{\alpha,2}, U_{\alpha,1}) > 0$  y por lo tanto,

$$\cos^2 \Theta_{\alpha} < 1,$$



para todo  $\alpha \geq 2$ . Además, de la Proposición B.2 para  $j \neq k$  se tiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle U_{\alpha,j}, U_{\alpha,k} \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin(\alpha + 1)(\theta_k - \theta_j)}{(\alpha + 1) \sin(\theta_k - \theta_j)} = 0. \quad (4.9)$$

Así, de (4.8) tenemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \cos \Theta_\alpha = 0.$$

Por lo tanto,  $\cos \Theta < 1$ , de donde se sigue como antes que  $M_{\theta_1} + M_{\theta_2} + M_{\theta_3}$  es cerrado.

El argumento general es enteramente similar aunque un poco más tedioso.

El siguiente conjunto juega un papel importante en nuestro estudio del problema de reconstrucción.

**Definición 4.13.** Dados  $n \in \mathbb{N}$  y  $\omega_j = (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$  con  $\theta_j = j\pi/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , definimos  $R_n^2(D)$  como el conjunto de las  $g \in L^2(D)$  para las cuales existen funciones crestas  $\rho_j \in L^2(D)$  tales que  $g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x \cdot \omega_j)$ , para casi todo  $x \in D$ .

Note que  $R_n^2(D)$  es un subespacio lineal de  $L^2(D)$ , el cual consiste de sumas finitas de funciones crestas en las direcciones  $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ . En particular, para  $n = 1$  se tiene que  $R_1^2(D)$  es el subespacio de funciones  $g(x, y)$  que dependen sólo de  $x$ .

La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del Teorema 4.8, con  $\theta_j = j\pi/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Proposición 4.14.**  $R_n^2(D)$  es un subespacio cerrado de  $L^2(D)$ .

Es importante observar que si  $\mathcal{P}_n(D)$  denota el conjunto de polinomios en  $x$  y  $y$  de grado menor o igual a  $n-1$ , entonces el Lema 4.6 nos dice que

$$\mathcal{P}_n(D) \subset R_n^2(D). \quad (4.10)$$

El Teorema 4.14 es un detalle que Logan y Shepp [12] pasaron por alto y la demostración que aquí presentamos es una contribución original de la autora, junto con su director de tesis. Es pertinente mencionar que este detalle también fue notado por Hamaker y Solmon [7] y que estos últimos autores demuestran un resultado más fuerte que el nuestro con argumentos similares a los dados arriba. Por otra parte, también es pertinente mencionar que el estudio de este problema ha generado una interesante línea de investigación en análisis y ecuaciones diferenciales parciales [2, 7, 19].

### 4.3. Reconstrucción óptima de una función a partir de sus proyecciones

En esta sección suponemos que se conoce  $P_f(t, \theta_j)$  para  $\theta_j = j\pi/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  y  $t \in \mathbb{R}$ , es decir se conocen las proyecciones de  $f$  en  $n$  direcciones uniformemente distribuidas, y a partir de esta información nos proponemos encontrar y caracterizar la mejor aproximación cuadrática de  $f$ .

Utilizando el ejemplo 4.2 y la linealidad de la transformación de Radon se puede ver fácilmente que existen muchas funciones  $g \in L^2(D)$  tales que

$$P_g(t, \theta_j) = P_f(t, \theta_j) \text{ para cada } j = 0, 1, \dots, n-1 \text{ y todo } t \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Por esta razón es conveniente introducir el conjunto

$$\Pi_f^n = \{g \in L^2(D) : P_g(t, \theta_j) = P_f(t, \theta_j) \text{ para casi todo } t \in [-1, 1] \text{ y } j = 0, \dots, n-1\},$$

el cual será de utilidad en la formulación y demostración del siguiente teorema.

**Teorema 4.15.** *Dados  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in L^2(D)$  y  $P_f(t, \theta_j)$ , para  $t \in [-1, 1]$  y  $\theta_j = j\pi/n$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , existe una única  $g_n \in \Pi_f^n$  tal que*

$$\|f - g_n\| \leq \|f - h\| \quad \text{y} \quad \langle f - g_n, h \rangle = 0$$

para toda  $h \in R_n^2(D)$  y

$$\|g_n\| \leq \|h\|$$

para toda  $h \in \Pi_f^n$ . Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\| = 0.$$

*Demostración.* Como  $R_n^2(D)$  es cerrado y  $L^2(D)$  es un espacio de Hilbert, por el Teorema A.8 existe una única  $g_n \in R_n^2(D)$  tal que para toda  $h \in R_n^2(D)$  se satisface

$$\|f - g_n\| \leq \|f - h\| \quad \text{y} \quad \langle f - g_n, h \rangle = 0.$$

Por lo tanto, para demostrar la primera desigualdad enunciada en el teorema basta demostrar que  $g_n \in \Pi_f^n$ . Como  $g_n \in R_n^2(D)$  entonces

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x \cdot \omega_j)$$

y dado que  $P_{f-g_n}(t, \theta)$  es una función cresta en  $R_n^2(D)$ , por la Proposición 4.3 tenemos

$$\int_{-1}^1 P_{f-g_n}^2(t, \theta_j) dt = \langle f - g, P_{f-g_n}(t, \theta_j) \rangle = 0.$$

Por lo tanto,  $P_{f-g_n}(t, \theta_j) = 0$  para casi todo  $t \in [-1, 1]$  y por la linealidad de la proyección concluimos que

$$P_{g_n}(t, \theta_j) = P_f(t, \theta_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \text{ para casi todo } t \in [-1, 1].$$

Solamente nos resta demostrar que se cumple la segunda desigualdad enunciada en el teorema. Utilizando nuevamente la Proposición 4.3, para toda  $h \in \Pi_f^n$  tenemos

$$\langle h, g_n \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \langle h, \rho_j \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 P_h(t, \theta_j) \rho_j(t) dt = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 P_{g_n}(t, \theta_j) \rho_j(t) dt = \|g_n\|^2.$$

Así que,

$$0 \leq \|h - g_n\|^2 = \|h\|^2 - 2\langle h, g_n \rangle + \|g_n\|^2 = \|h\|^2 - \|g_n\|^2.$$

De esta manera,

$$\|g_n\| \leq \|h\|.$$

Ahora demostraremos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\| = 0. \quad (4.12)$$

Dado que el conjunto  $C(D)$  de las funciones continuas en  $D$  es denso en  $L^2(D)$ , para  $\epsilon > 0$  existe  $\gamma \in C(D)$  tal que

$$\|f - \gamma\| \leq \epsilon/2.$$

Por otro lado, por el Teorema de Stone-Weierstrass [18], existe un polinomio  $p$  tal que

$$\|\gamma - p\|_\infty \leq \epsilon/2\sqrt{\pi}$$

por lo tanto,

$$\|\gamma - p\|^2 = \int_D |\gamma(x, y) - p(x, y)|^2 dx dy \leq \int_D \|\gamma - p\|_\infty^2 dx dy \leq \epsilon^2/4,$$

de donde se tiene

$$\|\gamma - p\| < \epsilon/2.$$

Luego, para  $N = (\text{grado de } p) + 1$ , de (4.10), si  $n \geq N$  entonces  $p \in \mathcal{P}_N(D) \subset R_n^2(D)$ , por lo tanto

$$\|f - g_n\| \leq \|f - p\| \leq \|f - \gamma\| + \|\gamma - p\| \leq \epsilon,$$

de donde (4.12) se sigue. ■

El siguiente resultado es una generalización natural del Teorema 4.15 para funciones en  $L^2(B_n)$  que se demuestra análogamente. Para enunciarlo es conveniente definir  $\Pi_f^m$  como el conjunto de  $g \in L^2(B_n)$  tales que

$$\mathbf{R}_{\omega_j} g(t) = \mathbf{R}_{\omega_j} f(t), \quad \text{para casi todo } t \in [-1, 1] \text{ y } j = 0, 1, \dots, m-1.$$

**Teorema 4.16.** *Dados  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in L^2(B_n)$  y  $\mathbf{R}_{\omega_j} f(t)$ , para  $t \in [-1, 1]$  y  $\omega_j \in S^{n-1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , existe una única  $g_m \in \Pi_f^m$  tal que*

$$\|f - g_m\| \leq \|f - h\| \quad y \quad \langle f - g_m, h \rangle = 0$$

para toda  $h \in R_m^n(B_n)$  y

$$\|g_m\| \leq \|h\|$$

para toda  $h \in \Pi_f^m$ . Además,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - g_m\| = 0.$$

En vista de la primera desigualdad del Teorema 4.15, la función  $g_n$  suministrada por ese teorema se conoce como la mejor aproximación cuadrática de  $f$  en términos de las proyecciones conocidas de esta última. A continuación hallaremos una expresión para  $g_n$  en términos de  $P_f(t, \theta_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ . Ya que

$$g_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j) \quad (4.13)$$

será suficiente encontrar una expresión para cada función cresta  $\rho_j$  en términos de las proyecciones conocidas de  $f$ .

Para empezar, note que si  $\rho \in L^2(D)$  es una función cresta en la dirección  $\theta_0 = 0$ , entonces su proyección en la dirección  $\theta$  está dada por

$$P_\rho(x, \theta) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \rho(x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta) dy. \quad (4.14)$$

Haciendo  $x = \cos \tau$ , con  $\tau \in (0, \pi)$  obtenemos

$$P_\rho(\cos \tau, \theta) = \int_{-\operatorname{sen} \tau}^{\operatorname{sen} \tau} \rho(\cos \tau \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta) dy. \quad (4.15)$$

Luego, si  $u = \cos \tau \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$  tenemos

$$P_\rho(\cos \tau, \theta) = \frac{-1}{\operatorname{sen} \theta} \int_{\cos(\tau-\theta)}^{\cos(\tau+\theta)} \rho(u) du$$

y sustituyendo  $u$  por  $\cos t$  se tiene

$$P_\rho(\cos \tau, \theta) = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \int_{\tau-\theta}^{\tau+\theta} h(t) dt, \quad (4.16)$$

en donde  $h(t) = \rho(\cos t) \operatorname{sen} t$ . En general si  $\rho_j$  es una función cresta en la dirección  $\theta_j$  tenemos

$$P_{\rho_j}(x, \theta) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \rho_j(x \cos(\theta - \theta_j) - y \operatorname{sen}(\theta - \theta_j)) dy,$$

y entonces al reemplazar  $\theta$  por  $\theta - \theta_j$  en las ecuaciones (4.14) y (4.16) vemos que

$$P_{\rho_j}(\cos \tau, \theta) = \frac{1}{\text{sen}(\theta - \theta_j)} \int_{\tau - (\theta - \theta_j)}^{\tau + (\theta - \theta_j)} h_j(t) dt,$$

en donde

$$h_j(t) = \rho_j(\cos t) \text{sen } t. \quad (4.17)$$

Por lo tanto, de (4.13) tenemos

$$P_{g_n}(\cos \tau, \theta) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\text{sen}(\theta - \theta_j)} \int_{\tau - (\theta - \theta_j)}^{\tau + (\theta - \theta_j)} h_j(t) dt. \quad (4.18)$$

Si escribimos  $\Pi_{g_n}(\tau, \theta) = P_{g_n}(\cos \tau, \theta)$  y denotamos con  $\Pi_{g_n}(\tau, \theta)$  a la extensión impar de esta función en el intervalo  $(-\pi, \pi)$ , entonces su expansión en serie de Fourier está dada por

$$\Pi_{g_n}(\tau, \theta) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{\Pi}_{g_n}(\alpha, \theta) \text{sen } \alpha\tau, \quad (4.19)$$

en donde

$$\hat{\Pi}_{g_n}(\alpha, \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Pi_{g_n}(\tau, \theta) \text{sen } \alpha\tau d\tau. \quad (4.20)$$

Por otro lado, la expansión en serie de Fourier de  $h_j(\tau)$  en  $(-\pi, \pi)$  está dada por

$$h_j(\tau) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{h}_j(\alpha) \text{sen } \alpha\tau, \quad (4.21)$$

en donde

$$\hat{h}_j(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} h_j(\tau) \text{sen } \alpha\tau d\tau.$$

Luego, si sustituimos (4.18) en (4.20), empleando la ecuación (4.21), obtenemos

$$\hat{\Pi}_{g_n}(\alpha, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\text{sen}(\theta - \theta_j)} \sum_{\beta=1}^{\infty} \hat{h}_j(\beta) \int_0^{\pi} \text{sen } \alpha\tau \int_{\tau - (\theta - \theta_j)}^{\tau + (\theta - \theta_j)} \text{sen } \beta t dt d\tau.$$

Después de realizar los cálculos correspondientes tenemos

$$\hat{\Pi}_{g_n}(\alpha, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\text{sen } \alpha(\theta - \theta_j)}{\text{sen}(\theta - \theta_j)} \hat{h}_j(\alpha)$$

y si escribimos  $\hat{\Pi}_k(\alpha) = \hat{\Pi}_{g_n}(\alpha, \theta_k)$  y sustituimos  $\theta_k = k\pi/n$ , entonces

$$\hat{\Pi}_k(\alpha) = \frac{2}{\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\text{sen } \alpha(k-j)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(k-j)\frac{\pi}{n}} \hat{h}_j(\alpha), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.22)$$

en donde, por convención  $\text{sen } \alpha(k-j)\frac{\pi}{n} / \text{sen}(k-j)\frac{\pi}{n} = \alpha$  si  $k = j$ . Observe que al hacer  $\alpha = nm$  en la ecuación (4.22) se tiene

$$\hat{h}_j(nm) = \frac{1}{2} \hat{\Pi}_j(nm), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.23)$$

de donde se concluye que  $\hat{h}_j(nm)$  está determinada por las proyecciones de  $g$ . Ya que en general  $\rho_j$  está determinada por  $h_j$ , la observación anterior nos motiva a resolver el sistema de ecuaciones (4.22) para  $\hat{h}_k(\alpha)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$  y  $\alpha = 1, 2, \dots$ , en términos de  $\hat{\Pi}_k(\alpha)$ . Para este fin note que la matriz del sistema (4.22) es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\text{sen } \alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} & \frac{\text{sen } 2\alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } 2\frac{\pi}{n}} & \cdots & \frac{\text{sen}(n-1)\alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}} \\ \frac{\text{sen } \alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} & \alpha & \frac{\text{sen } \alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} & \cdots & \frac{\text{sen}(n-2)\alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen}(n-2)\frac{\pi}{n}} \\ \frac{\text{sen } 2\alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } 2\frac{\pi}{n}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\text{sen } \alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} \\ \frac{\text{sen}(n-1)\alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen}(n-1)\frac{\pi}{n}} & \frac{\text{sen}(n-2)\alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen}(n-2)\frac{\pi}{n}} & \cdots & \frac{\text{sen } \alpha \frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}} & \alpha \end{pmatrix}$$

y que la entrada  $S_{m,j}$  de  $A^2$  es

$$S_{m,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{sen } \alpha(m-k)\frac{\pi}{n} \text{sen } \alpha(k-j)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m-k)\frac{\pi}{n} \text{sen}(k-j)\frac{\pi}{n}}.$$

En el Apéndice C, verificamos que

$$\frac{1}{n} S_{m,j} = (2\mu + 1) \frac{\text{sen } \alpha(m-j)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}} - \mu(\mu + 1)n\delta_{mj},$$

en donde  $\delta_{mj} = 1$  si  $m = j$  y  $\delta_{mj} = 0$  si  $m \neq j$  y  $\mu = [\frac{\alpha}{n}]$  denota la parte entera de  $\alpha/n$ , es decir

$$\mu = n\alpha + \nu, \quad 0 \leq \nu \leq n-1. \quad (4.24)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{n} A^2 = (2\mu + 1)A - \mu(\mu + 1)nI, \quad (4.25)$$

en donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n \times n$ . A partir de esta ecuación podemos ver que para  $\alpha \geq n$  el sistema de ecuaciones (4.22) tiene la única solución dada por

$$\hat{h}_k(\alpha) = \frac{(2\mu + 1)\alpha}{2\mu(\mu + 1)n} \hat{\Pi}_k(\alpha) - \frac{\alpha}{2\mu(\mu + 1)n^2} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{\Pi}_m(\alpha) \frac{\text{sen } \alpha(k-m)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(k-m)\frac{\pi}{n}}, \quad (4.26)$$

para  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Por otro lado, si  $\alpha = 1, 2, \dots, n - 1$  entonces (4.22) tiene solución si

$$\hat{\Pi}_k(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \hat{\Pi}_m(\alpha) \frac{\text{sen } \alpha(k-m)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(k-m)\frac{\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (4.27)$$

y en este caso, comparando (4.22) con (4.27), podemos tomar la solución dada por

$$\hat{h}_k(\alpha) = \frac{\alpha}{2n} \hat{\Pi}_k(\alpha), \quad 1 \leq \alpha \leq n - 1 \quad \text{y} \quad k = 0, 1, \dots, n - 1, \quad (4.28)$$

que por (4.23) y (4.26) es válida también para  $\alpha = n$ .

A partir de las identidades (4.21), (4.26) y (4.28) obtenemos una expresión para  $h_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n - 1$ . Para esto, primero escribimos

$$h_j(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} h_{jk}(\tau),$$

en donde  $h_{jk}(\tau)$  es el sumando de  $h_j(\tau)$  que multiplica a  $\hat{\Pi}_k(\tau)$  en (4.26) y (4.28). Por lo tanto, de las ecuaciones (4.26) y (4.28) encontramos

$$\hat{h}_{jj}(\alpha) = \frac{\alpha}{2n} \hat{\Pi}_j(\alpha), \quad 1 \leq \alpha \leq n \quad (4.29)$$

y

$$\hat{h}_{jj}(\alpha) = \left[ \frac{1}{2} + \frac{\nu(n-\nu)}{2\mu(\mu+1)n^2} \right] \hat{\Pi}_j(\alpha), \quad \text{si } \alpha \geq n, \quad (4.30)$$

y para  $j \neq k$

$$\hat{h}_{jk}(\alpha) = 0, \quad 0 \leq \alpha \leq n \quad (4.31)$$

y

$$\hat{h}_{jk}(\alpha) = -\frac{\alpha}{2\mu(\mu+1)n^2} \frac{\text{sen } \alpha(j-k)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(j-k)\frac{\pi}{n}} \hat{\Pi}_j(\alpha), \quad \alpha \geq n. \quad (4.32)$$

De las ecuaciones (4.29), y (4.30) y de la expansión de la serie de Fourier de  $h_{jj}(\tau)$  obtenemos

$$\begin{aligned} h_{jj}(\tau) &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\alpha}{2n} \hat{\Pi}_j(\alpha) \text{sen } \alpha\tau \\ &+ \sum_{\alpha=n}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} + \frac{\nu(n-\nu)}{2\mu(\mu+1)n^2} \right] \hat{\Pi}_j(\alpha) \text{sen } \alpha\tau. \end{aligned}$$

Luego, observando que

$$\hat{\Pi}_j(\alpha) \text{sen } \alpha\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi_j(t) \cos \alpha(\tau - t) dt,$$

tenemos

$$h_{jj}(\tau) = \frac{1}{2}\Pi_j(\tau) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi_j(t)K_0(\tau - t)dt, \quad (4.33)$$

en donde

$$K_0(\tau) = - \sum_{\alpha=1-n}^{n-1} \left(1 - \frac{|\alpha|}{n}\right) e^{i\alpha\tau} + 2 \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu(n - \nu)}{\mu(\mu + 1)n^2} \cos \alpha\tau.$$

De manera análoga obtendremos una expresión para  $h_{jk}$ . Para esto primero observemos que

$$\int_0^{\pi} \Pi_k(t) \operatorname{sen} \alpha t \operatorname{sen} \alpha \tau \operatorname{sen} \alpha(j - k) \frac{\pi}{n} dt = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} [\Pi_k(t + (j - k)\pi/n) - \Pi_k(t - (j - k)\pi/n)] \operatorname{sen} \alpha(\tau - t) dt.$$

Luego de (4.31), (4.32) y de la expansión de la serie de Fourier de  $h_{jk}(\tau)$  tenemos

$$h_{jk}(\tau) = \frac{1}{2\pi \operatorname{sen}(j - k) \frac{\pi}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} [\Pi_k(t + (j - k)\pi/n) - \Pi_k(t - (j - k)\pi/n)] K_1(\tau - t) dt, \quad (4.34)$$

en donde

$$K_1(\tau) = - \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\alpha}{2n^2 \mu(\mu + 1)} \operatorname{sen} \alpha\tau.$$

Usando (4.33) y (4.34) se ve claramente que  $h_j(\tau)$  se puede expresar explícitamente en términos de las proyecciones de  $f$  y consecuentemente también  $\rho_j(\tau)$ . Por lo tanto, por (4.13),  $g_n$  también se puede expresar explícitamente en términos de las proyecciones de  $f$ .

En el Apéndice C verificamos que

$$K_0(\tau) = -\frac{1}{n} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n\tau}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\tau}{2}} \right)^2 + \frac{[2 \cos \frac{n\tau}{2} - |\operatorname{sen} \frac{n\tau}{2}| T(\frac{n\tau}{2})] [\cos \frac{\tau}{2} \operatorname{sen} \frac{n\tau}{2} - n \operatorname{sen} \frac{\tau}{2} \cos \frac{n\tau}{2}]}{n^2 \operatorname{sen}^3 \frac{\tau}{2}},$$

en donde  $T(\tau) = \pi - 2|\tau|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$  y que

$$K_1(\tau) = \frac{|\operatorname{sen} \frac{n\tau}{2}| T(\frac{n\tau}{2}) [n \operatorname{sen} \tau \cos \frac{n\tau}{2} - \operatorname{sen} \frac{n\tau}{2}]}{4n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2}} + \frac{\operatorname{sen} n\tau}{2n} \log(2 \operatorname{sen} \frac{n\tau}{2}) + \frac{\operatorname{sen} n\tau - n \operatorname{sen} \tau}{8n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\tau}{2}}.$$

lo cual permite tener una expresión más manejable para  $g_n$ .



### 4.3.1. Aproximación polinomial óptima

En esta sección encontramos una fórmula explícita para el polinomio de grado  $n - 1$  determinado por  $n$  proyecciones de  $f$  que mejor aproxima a  $f$  en  $L^2(D)$ .

Sea  $\mathcal{P}_n(D)$  como en (4.10) y denotemos con  $p_n$  al polinomio en  $\mathcal{P}_n(D)$  que mejor aproxima a  $f$  en  $L^2(D)$ ; es decir, que para todo  $q \in \mathcal{P}_n(D)$  se satisface

$$\|f - p_n\| \leq \|f - q\| \quad \text{y} \quad \langle f - p_n, q \rangle = 0.$$

Ya que  $\mathcal{P}_n(D) \subset R_n^2(D)$ , si  $g_n$  es la función dada por el Teorema 4.15, entonces para todo  $q \in \mathcal{P}_n(D)$  se tiene

$$\langle f - g_n, q \rangle = 0$$

y por lo tanto

$$\langle g_n - p_n, q \rangle = \langle f - p_n, q \rangle - \langle f - g_n, q \rangle = 0.$$

De esta manera concluimos que  $p_n$  es la proyección ortogonal de  $g_n$  sobre  $\mathcal{P}_n(D)$ . A continuación encontramos una expresión explícita para este polinomio en términos de las  $n$  proyecciones de  $f$ .

De (4.13) tenemos

$$g_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j),$$

en donde

$$\rho_j(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j) = \frac{h_j(\cos^{-1}(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j))}{\operatorname{sen} \cos^{-1}(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j)}$$

y de (4.21) obtenemos

$$g_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{h}_j(\alpha) U_{\alpha-1}(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j). \quad (4.35)$$

Ahora demostraremos que  $p_n$  es el polinomio que se obtiene al truncar la serie (4.35) en  $\alpha = n$ . Sea

$$p_0(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^n \hat{h}_j(\alpha) U_{\alpha-1}(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j) \quad (4.36)$$

y sea  $q \in \mathcal{P}_n(D)$ . Por el Lema 4.6 existen  $\rho_j(t)$  polinomios de grado  $n - 1$  en  $t$  tales que

$$q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k(x \cos \theta_k + y \operatorname{sen} \theta_k).$$

Como  $\{U_0(\tau), U_1(\tau), \dots, U_{n-1}(\tau)\}$  es una base del conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a  $n - 1$ , en donde los  $U_k$  son los polinomios de Chebyshev de segunda clase introducidos en (4.5) y  $\tau$  está definida por  $\cos \tau = x \cos \theta + y \sin \theta$ , entonces existen constantes  $a_k$  tales que

$$q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U_k(x \cos \theta + y \sin \theta).$$

Por lo tanto,

$$\langle g_n - p_0, q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\alpha=n+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \langle U_{\alpha-1}(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j), U_k(x \cos \theta + y \sin \theta) \rangle$$

y por la ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev tenemos que

$$\langle g_n - p_0, q \rangle = 0.$$

Luego,  $p_0$  es la proyección ortogonal de  $g_n$  sobre  $\mathcal{P}_n(D)$  y por la unicidad de  $p_0$  concluimos que  $p_n = p_0$ .

Hemos demostrado que el polinomio  $p_n(x, y)$  de grado  $n - 1$  que mejor aproxima a  $f$  en  $L^2(D)$  sobre  $\mathcal{P}_n(D)$  es una suma de polinomios crestas, es decir

$$p_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho_j^n(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j).$$

Así, de (4.17) y de (4.36) tenemos

$$\rho_j^n(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j) = \sum_{\alpha=1}^n \hat{h}_j(\alpha) U_{\alpha-1}(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j).$$

Si denotamos por  $\cos \tau = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j$ , entonces

$$\rho_j^n(\cos \tau) \sin \tau = \sum_{\alpha=1}^n \hat{h}_j(\alpha) \sin \alpha \tau$$

y de (4.28) obtenemos

$$\rho_j^n(\cos \tau) \sin \tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Pi_j(t) K(\tau - t) dt,$$

en donde

$$K(\tau) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\alpha}{n} \cos \alpha \tau = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} - \frac{1}{n} \frac{\sin \frac{n\tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}} \right].$$

Luego, como  $\Pi_j(\tau) = P_f(\cos \tau, \theta_j)$  concluimos que  $p_n$  esta determinado por estas  $n$  proyecciones de  $f$ .

### 4.3.2. Consistencia

Un problema muy importante en la reconstrucción de una función a partir de un conjunto dado de datos es decidir si esos datos son adecuados para intentar la reconstrucción. Matemáticamente esto equivale a decidir si el conjunto dado de datos es el conjunto de proyecciones de una función  $f \in L^2(D)$ , a lo largo de un número finito de direcciones uniformemente distribuidas; dicho de otra manera, el problema consiste en caracterizar el rango, en  $R_n^2(D)$ , de la transformada de Radon restringida a  $n$  direcciones uniformemente distribuidas. El propósito de esta sección es resolver este problema.

**Teorema 4.17.** *Si  $P_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$  es un conjunto dado de funciones que satisfacen*

$$P_j(t) = 0, \quad |t| > 1, \quad \int_{-1}^1 \frac{P_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty,$$

y al definir

$$\hat{\Pi}_j(\alpha) = \int_0^\pi P_j(\cos \tau) \operatorname{sen}(\alpha\tau) d\tau, \quad \alpha = 1, 2, \dots$$

también se satisface

$$\hat{\Pi}_j(\alpha) = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{\Pi}_m(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \alpha(j-m)\frac{\pi}{n}}{n \operatorname{sen}(j-m)\frac{\pi}{n}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n,$$

en donde  $\operatorname{sen} \alpha(j-m)\frac{\pi}{n} / \operatorname{sen}(j-m)\frac{\pi}{n} = \alpha$  si  $k = j$ , entonces existe una función  $g \in L^2(D)$  tal que para cada  $\theta_j = j\pi/n$  se tiene

$$P_g(t, \theta_j) = P_j(t),$$

para  $j = 0, 1, \dots, n-1$  y

$$\int_D |g(x, y)|^2 dx dy \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \frac{|P_j(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

*Demostración.* Para empezar, de la ecuación (4.13) y de la Proposición 4.3 se tiene que

$$\int_D |g_n(x, y)|^2 dx dy = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 P_{g_n}(t, \theta_j) \rho_j(t) dt.$$

Haciendo el cambio de variable  $t = \cos \tau$ , tenemos

$$\int_D |g_n(x, y)|^2 dx dy = \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\pi \Pi_j(\tau) h_j(\tau) dt, \quad (4.37)$$

en donde  $\Pi_j(\tau) = P_{g_n}(\cos \tau, \theta_j)$  y  $h_j(\tau) = \rho_j(\cos \tau) \operatorname{sen} \tau$ , como se definió en (4.17). Luego, de (4.19) y (4.21), al realizar algunos cálculos obtenemos

$$\int_0^\pi \Pi_j(\tau) h_j(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{\Pi}_j(\alpha) \hat{h}_j(\alpha). \quad (4.38)$$

Por otro lado, de (4.28) se tiene, para  $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Pi}_j(\alpha) \hat{h}_j(\alpha) = \frac{\alpha}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2 \quad (4.39)$$

y de (4.26) tenemos, para  $\alpha \geq n$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Pi}_j(\alpha) \hat{h}_j(\alpha) &= \frac{\alpha}{2n} \frac{2\mu+1}{\mu(\mu+1)} \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2 \\ &\quad - \frac{\alpha}{2n^2\mu(\mu+1)} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Pi}_j(\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Pi}_k(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \alpha(j-k)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(j-k)\frac{\pi}{n}}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Luego, si  $A$  es la matriz del sistema (4.22) entonces es fácil ver de (4.25) que la ecuación de eigenvalores

$$\frac{1}{n} Ax = \lambda x$$

tiene dos soluciones no triviales dadas por  $\lambda = \mu$  y  $\lambda = \mu + 1$ , cuando  $\nu \neq 0$ , y  $\lambda = \mu$  cuando  $\nu = 0$ . Dado que toda forma cuadrática está acotada por sus eigenvalores mínimo y máximo, para  $\alpha \geq n$  tenemos

$$\begin{aligned} n\mu \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2 &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Pi}_j(\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\Pi}_k(\alpha) \frac{\operatorname{sen} \alpha(j-k)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(j-k)\frac{\pi}{n}} \\ &\leq n(\mu+1) \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2 \end{aligned}$$

y de (4.40) obtenemos

$$\frac{\alpha}{2n(\mu+1)} \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2 \leq \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Pi}_j(\alpha) \hat{h}_j(\alpha) \leq \frac{\alpha}{2n\mu} \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2, \quad \alpha \geq n. \quad (4.41)$$

Observemos de (4.24) que para  $\alpha \geq n$  se tiene

$$\frac{\alpha}{2n\mu} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\nu}{n\mu} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n-1}{n\mu} \right) \leq \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)$$

y para  $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$  se tiene

$$\frac{\alpha}{2n} \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Por lo tanto, de la cota superior de (4.41) y de la ecuación (4.39) obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} \hat{\Pi}_j(\alpha) \hat{h}_j(\alpha) \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2, \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

Finalmente, de (4.37), (4.38) y (4.42) tenemos

$$\begin{aligned} \int_D |g_n|^2 &\leq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\alpha=0}^{\infty} [\hat{\Pi}_j(\alpha)]^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \|\Pi_j(\tau)\|^2 \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^\pi |\Pi_j(\tau)|^2 d\tau \\ &= \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \frac{|P_f(t, \theta_j)|^2}{\sqrt{1-t^2}} dt, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\int_D |g_n|^2 \leq \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \frac{|P_f(t, \theta_j)|^2}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (4.43)$$

Por otra parte, de la la desigualdad de Schwarz tenemos

$$|P_f(t, \theta)|^2 \leq 2\sqrt{1-t^2} P_{|f|^2}(t, \theta)$$

y dividiendo por  $\sqrt{1-t^2}$  en ambos miembros e integrando sobre  $t$  obtenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{P_f(t, \theta)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq 2 \int_{-1}^1 P_{|f|^2}(t, \theta) dt = 2\|f\|^2 < \infty.$$

Por lo tanto, para que las funciones  $\{P_j(t)\}$  sean proyecciones de alguna función  $f \in L^2(D)$ , éstas deben de cumplir que  $P_j(t) = 0$ , si  $|t| > 1$  y deben de satisfacer

$$\int_{-1}^1 \frac{P_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty.$$

Finalmente, como la ecuación (4.43) se obtuvo suponiendo la validez de (4.27), entonces esta condición es necesaria para la reconstrucción de  $f$ . ■

## CAPÍTULO 5

---

### Conclusiones

---

1. El problema de reconstrucción de una función a partir de sus proyecciones se puede resolver si se conocen todas sus proyecciones.
2. Si solamente se conocen  $n$  proyecciones uniformemente distribuidas, como ocurre en la práctica, se puede obtener de manera explícita una aproximación óptima que converge a la función original cuando  $n$  tiende a infinito.
3. Desde un punto de vista matemático, el problema de reconstrucción de imágenes resulta ser un reto muy interesante y no trivial, dado que en la búsqueda de soluciones se requiere la utilización conjunta de varias áreas, como por ejemplo, análisis de Fourier, análisis funcional, álgebra lineal, trigonometría, entre otras. También intervienen otras disciplinas como la computación, física y medicina.
4. Debido a la imposibilidad de reconstruir totalmente a una función cuando sólo se conoce una cantidad finita de sus proyecciones y a que la implementación de los algoritmos resultantes, en general no es sencilla, el problema de reconstrucción de imágenes se sigue investigando de manera muy activa; sobre todo porque un objetivo factible es obtener imágenes dinámicas en tiempo real.

# APÉNDICE A

---

## Algunos Resultados Básicos de Análisis

---

En este apéndice enunciamos y demostramos algunos resultados básicos del análisis de Fourier y de la teoría de espacios de Hilbert, con la finalidad de precisar las versiones de estos resultados que utilizamos en esta tesis.

### A.1. Espacios de Hilbert

Primero recordemos la definición de un producto interno.

**Definición A.1.** Sea  $E$  un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Un *producto interno* en  $E$  es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K},$$

tal que para todo  $x, y, z \in E$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  se satisface:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  y  $\langle x, x \rangle = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
2.  $\langle \mu x + \lambda y, z \rangle = \mu \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Por ejemplo, si  $E = \mathbb{C}^n$  y  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  son elementos de  $\mathbb{C}^n$ , entonces la función dada por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j} \tag{A.1}$$

define un producto interno en  $\mathbb{C}^n$ . Si  $K \subset \mathbb{C}^n$  y  $E = L^2(K)$ , entonces

$$\langle f, g \rangle = \int_K f \bar{g} dx \quad (\text{A.2})$$

define un producto interno en  $L^2(K)$ .

Se verifica fácilmente que si  $E$  es un espacio vectorial con un producto interno y para  $x \in E$  se define

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2},$$

entonces para toda  $x, y \in E$  se satisface la desigualdad de Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

de donde se sigue que la función  $\|\cdot\|$  define una norma en  $E$ , que se llama la *norma inducida por el producto interno*.

Un concepto importante en espacios con un producto interno es el de ortogonalidad.

**Definición A.2.** Sea  $E$  un espacio vectorial con producto interno y  $x, y \in E$ , decimos que  $x$  es *ortogonal* a  $y$  si

$$\langle x, y \rangle = 0.$$

Una colección  $\{x_j\}$  se dice *ortonormal* si  $\langle x_j, x_j \rangle = 1$  y  $\langle x_j, x_k \rangle = 0$  si  $j \neq k$ .

Los siguientes resultados son sencillos de demostrar.

**Proposición A.3.** (*Teorema de Pitágoras*) Si  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es un conjunto ortonormal en un espacio vectorial  $E$  con producto interno, entonces

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

**Proposición A.4.** (*Identidad del paralelogramo*) Si  $x, y$  son elementos del espacio vectorial con producto interno  $E$ , entonces

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

A continuación presentamos la definición de un espacio de Hilbert.

**Definición A.5.** Un espacio vectorial con producto interno se denomina *espacio de Hilbert* si es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno.



Por ejemplo,  $L^2(K)$  con el producto interno dado en (A.2) es un espacio de Hilbert. La prueba de este hecho se puede ver en [17], de la cual se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema A.6.** *Si  $f, f_1, f_2, \dots$  son funciones en  $L^2(\mathbb{R}^n)$  tales que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\| = 0,$$

*entonces existe una subsucesión  $\{f_{k_l}\}$  de  $\{f_k\}$  tal que*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}(x) = f(x)$$

*para casi todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

El siguiente es un resultado fundamental en la geometría de espacios de Hilbert.

**Teorema A.7.** *(Teorema de la proyección) Sea  $M$  un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces para todo  $x \in H$  existe un único  $z \in M$ , que se denomina la proyección ortogonal de  $x$  sobre  $M$ , tal que  $x - z$  es ortogonal a  $M$ , es decir*

$$\langle x - z, y \rangle = 0, \quad \text{para todo } y \in M.$$

Este resultado es una consecuencia inmediata del siguiente lema.

**Lema A.8.** *Sea  $M \neq \emptyset$  un subconjunto cerrado convexo de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces para todo  $x \in H$  existe un único  $z \in M$  tal que*

$$\|x - z\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

*Demostración.* Sea  $d = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$ . Para todo  $k \in \mathbb{N}$  existe una sucesión  $\{y_n\}$  en  $M$ , tal que

$$\|x - y_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{k} \tag{A.3}$$

y de la identidad del paralelogramo, notando que  $(y_n + y_m)/2 \in M$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|y_m - y_n\|^2 &= \|x - y_n - (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2 \\ &\leq 4(d^2 + \frac{1}{k}) - 4d^2 = \frac{4}{k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\{y_n\}$  es una sucesión de Cauchy en  $H$  y por la completitud de  $H$  existe  $z \in H$  tal que  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Como  $M$  es cerrado entonces  $z \in M$  y por la definición de  $d$  tenemos

$$d \leq \|x - z\|.$$

Por otro lado, al tomar el límite cuando  $n$  tiende a infinito en (A.3) tenemos

$$\|x - z\| \leq d + \frac{1}{k}.$$

Como  $k$  es arbitrario se sigue que  $\|x - z\| = d$ , con lo que hemos probado la existencia. Para demostrar la unicidad supongamos que

$$\|x - z\| = d = \|x - a\|.$$

De la identidad del paralelogramo tenemos

$$\|z - a\|^2 = \|x - a - (x - z)\|^2 = 4d^2 - 4\|x - \frac{z+a}{2}\|^2 \leq 0$$

y por lo tanto  $z = a$ . ■

*Demostración del teorema de la proyección.* Para  $x \in H$ , sea  $z$  como en el lema anterior. Por la definición de  $z$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  y  $a \in M$  tenemos

$$\|x - z\|^2 \leq \|x - (z + ta)\|^2 = \|(x - z) - ta\|^2 = \|x - z\|^2 - 2t\operatorname{Re}(\langle x - z, a \rangle) + t^2\|a\|^2.$$

Por lo tanto

$$0 \leq t^2\|z\|^2 - 2t\operatorname{Re}(\langle x - z, a \rangle),$$

de donde se sigue que  $\operatorname{Re}(\langle x - z, a \rangle) = 0$  para todo  $a \in M$ . Análogamente, utilizando  $it$  en vez de  $t$ , se obtiene que  $\operatorname{Im}(\langle x - z, a \rangle) = 0$  para todo  $a \in M$ .

**Definición A.9.** Sea  $M$  un subespacio de un espacio de Hilbert  $H$ . El *complemento ortogonal* de  $M$ , denotado por  $M^\perp$ , es el conjunto de todos los vectores de  $H$  tal que son ortogonal a  $M$ , es decir

$$M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \text{ para todo } y \in M\}.$$

La demostración del siguiente corolario se sigue del teorema de la proyección.

**Corolario A.10.** Sea  $M$  un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces para todo  $x \in H$  existen vectores únicos  $P_M x \in M$  y  $P_{M^\perp} x \in M^\perp$  tales que

$$x = P_M x + P_{M^\perp} x,$$

además,  $P_M x$  y  $P_{M^\perp} x$  son los vectores proyección ortogonal de  $x$  sobre  $M$  y  $M^\perp$ , respectivamente.

La siguiente definición nos permitirá construir otro ejemplo de un espacio de Hilbert, que más adelante ocuparemos.

**Definición A.11.** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios vectoriales, se define la *suma directa* de los espacios  $X$  y  $Y$  como

$$X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Note que  $X \oplus Y$  es un espacio vectorial con la operación suma dada por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

**Teorema A.12.** Sean  $H$  y  $K$  dos espacios de Hilbert. Entonces el espacio vectorial  $H \oplus K$  es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle k_1, k_2 \rangle.$$

La demostración se sigue fácilmente de la definición de norma inducida por el producto interno, es decir

$$\|(h, k)\|^2 = \|h\|^2 + \|k\|^2.$$

El teorema anterior muestra que la suma directa entre dos espacios de Hilbert es también un espacio de Hilbert. Sin embargo, la suma entre dos subespacios cerrados de Hilbert no necesariamente es cerrado. El siguiente subespacio de  $H \oplus H$  nos ayudará a construir un ejemplo en donde se muestra este hecho.

**Definición A.13.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T : H \longrightarrow H$  un operador lineal. La *gráfica* de  $T$ ,  $\Gamma(T)$ , se define como

$$\Gamma(T) = \{(h, k) : (h, k) \in H \oplus H, k = Th\}.$$

Observemos que si  $T$  es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert  $H$  entonces  $\Gamma(T)$  es un subespacio cerrado de  $H \oplus H$ . Por ejemplo, es fácil ver que el operador  $T : L^2(0, 1) \longrightarrow L^2(0, 1)$  dado por  $Tf(x) = xf(x)$  es un operador lineal acotado y por lo tanto,  $\Gamma(T)$  es cerrada.

Si  $M$  es el subespacio cerrado de  $L^2(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$  dado por el conjunto de vectores de la forma  $(f, 0)$  y  $N = \Gamma(T)$ , en donde  $T$  es como en el ejemplo anterior,

entonces  $M + N$  no es cerrado. En efecto, si consideramos la sucesión de funciones  $f_n = \chi_{(\frac{1}{n}, 1)} \frac{1}{x}$ , en donde

$$\chi_{(\frac{1}{n}, 1)} = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{1}{n} < x < 1; \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Tf_n - \chi_{(0,1)}\| = 0.$$

Por lo tanto, la sucesión  $\{(0, Tf_n)\} \in M + N$  converge a  $(0, \chi_{(0,1)})$  en la norma de  $L^2(0, 1) \oplus L^2(0, 1)$  pero  $(0, \chi_{(0,1)}) \notin M + N$ , porque no existe  $f \notin L^2(0, 1)$  tal que  $Tf = \chi_{(0,1)}$ . Luego,  $M + N$  no es cerrado.

Enseguida presentamos una condición suficiente para que  $M + N$  sea cerrado, dado que  $M$  y  $N$  son cerrados.

**Definición A.14.** Sean  $M$  y  $N$  dos subespacios de un espacio de Hilbert  $H$  tal que  $M \cap N = \{0\}$ , definimos la aplicación  $P_{M||N} : M + N \rightarrow M$  como

$$P_{M||N}(x + y) = x,$$

en donde  $x \in M$  y  $y \in N$ .

**Teorema A.15.** Sean  $M$  y  $N$  dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert  $H$  tal que  $M \cap N = \{0\}$ . Si  $P_{M||N}$  es continua entonces  $M + N$  es un espacio vectorial cerrado.

*Demostración.* Claramente  $M + N$  es un espacio vectorial, así que sólo demostraremos que  $M + N$  es cerrado.

Sea  $\{x_n + y_n\}$  una sucesión de  $M + N$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = z.$$

Por la continuidad de  $P_{M||N}$  se tiene

$$P_{M||N}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{M||N}(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

como  $M$  es cerrado entonces  $P_{M||N}(z) \in M$ . Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n - x_n = z - P_{M||N}(z).$$

Dado que  $y_n \in N$  y  $N$  es cerrado entonces  $y = z - P_{M||N}(z)$  está en  $N$ . Así que  $z = (P_{M||N}(z) + y) \in M + N$  y por lo tanto,  $M + N$  es cerrado. ■

Los siguientes, definición y teorema, juegan un papel muy importante en esta tesis.

**Definición A.16.** Sean  $M$  y  $N$  dos subespacios de un espacio de Hilbert  $H$ , definimos el ángulo  $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  entre  $M$  y  $N$  como

$$\cos \Theta = \sup \left\{ \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\| \|g\|} : f \in M \setminus \{0\} \text{ y } g \in N \setminus \{0\} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

**Teorema A.17.** Sean  $M$  y  $N$  dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert  $H$  tal que  $M \cap N = \{0\}$ . Si el ángulo  $\Theta$  entre  $M$  y  $N$  es positivo entonces  $P_{M||N}$  es continuo.

*Demostración.* Para todo  $x \in H$ , por el Teorema A.10, se tiene que  $x = P_N x + P_{N^\perp} x$ . Por lo tanto, para todo  $y \in N$  tenemos

$$\langle x, y \rangle = \langle P_N x + P_{N^\perp} x, y \rangle = \langle P_N x, y \rangle.$$

De donde se sigue

$$\sup_{y \in N \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|} \right\} = \sup_{y \in N \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|\langle P_N x, y \rangle|}{\|y\|} \right\} = \|P_N x\|.$$

Por otro lado, del Teorema de Pitágoras se tiene

$$\|P_{N^\perp} x\|^2 = \|x\|^2 - \|P_N x\|^2.$$

Así que,

$$\inf_{y \in N} \{\|x + y\|^2\} = \|P_{N^\perp} x\|^2 = \|x\|^2 - \|P_N x\|^2.$$

Luego, observando

$$\|P_{M||N}\|^2 = \sup_{\{x+y \in M+N \setminus \{0\}\}} \left\{ \frac{\|x\|^2}{\|x+y\|^2} \right\} = \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \sup_{y \in N \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|x\|^2}{\|x+y\|^2} \right\}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \|P_{M||N}\|^2 &= \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \frac{1}{\inf_{y \in N \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|x+y\|^2}{\|x\|^2} \right\}} = \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\|P_N x\|^2}{\|x\|^2}} \right\} \\ &= \frac{1}{\inf_{x \in M \setminus \{0\}} \left\{ 1 - \frac{\|P_N x\|^2}{\|x\|^2} \right\}} = \frac{1}{1 - \sup_{x \in M \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\|P_N x\|^2}{\|x\|^2} \right\}} \\ &= \frac{1}{1 - \cos^2 \Theta}. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $\Theta$  es positivo entonces  $P_{M||N}$  es acotado y por lo tanto  $P_{M||N}$  es continuo. ■

Observemos que si  $M$  y  $N$  son como en el ejemplo en donde se muestra que  $M+N$  no es cerrado entonces el ángulo  $\Theta$  entre  $M$  y  $N$  es cero. Para ver esto, consideremos nuevamente la sucesión  $f_n$ , como en el ejemplo, entonces

$$\frac{|\langle (f_n, 0), (f_n, Tf_n) \rangle|}{\|(f_n, 0)\| \|(f_n, Tf_n)\|} = \frac{\|f_n\|}{(\|f_n\|^2 + \|Tf_n\|^2)^{1/2}} = \left( \frac{n^2 - n}{n^2 - 1} \right)^{1/2}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\langle (f_n, 0), (f_n, Tf_n) \rangle|}{\|(f_n, 0)\| \|(f_n, Tf_n)\|} = 1.$$

De donde se sigue que

$$\cos \Theta = 1.$$

A continuación enunciamos algunos resultados clásicos sobre espacios de Hilbert cuyas demostraciones se pueden ver, por ejemplo, en el libro de Reed y Simon [1]. Antes de enunciarlos es conveniente presentar la siguiente definición.

**Definición A.18.** Una *base ortonormal* de un espacio de Hilbert es un conjunto ortonormal maximal.

**Teorema A.19.** *Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal.*

**Teorema A.20.** *Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  es una base ortonormal de  $H$ , entonces para cada  $y \in H$ ,*

$$y = \sum_{\alpha \in A} \langle y, x_\alpha \rangle x_\alpha$$

$$\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle y, x_\alpha \rangle|^2.$$

**Definición A.21.** Sean  $H$  y  $S$  como en el Teorema A.20. Para toda  $y \in H$  el coeficiente  $\langle y, x_\alpha \rangle$  se le llama *coeficiente de Fourier* de  $y$ .

A la expansión  $y = \sum_{\alpha \in A} \langle y, x_\alpha \rangle x_\alpha$  se le llama *serie de Fourier* de  $y$ .

**Teorema A.22.** *Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $S$  es un conjunto ortonormal. Las siguientes son equivalentes:*

1.  $S$  es base de  $H$ .
2. Si  $\langle h, f \rangle = 0$  para todo  $f \in S$ , entonces  $h = 0$ .

3. El espacio vectorial cerrado más pequeño que contiene a  $S$  es  $H$ .

Una consecuencia inmediata de estos resultados es el siguiente.

**Teorema A.23.** Si  $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x} \right\}_{\alpha \in \mathbb{Z}}$  entonces  $S$  es base de  $L^2([-\pi, \pi])$ .

*Demostración.* Primero verifiquemos que  $S$  es un conjunto ortonormal.

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta x} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-\beta)x} dx.$$

Si  $\alpha = \beta$ , entonces

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta x} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1,$$

si no,

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\alpha x}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta x} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(\alpha-\beta)x}}{i(\alpha-\beta)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Sabemos que el conjunto

$$\left\{ \sum_{\alpha=-m}^m c_{\alpha} e^{i\alpha x} \right\},$$

en donde  $c_{\alpha} \in \mathbb{C}$  y  $m \in \mathbb{N}$ , es denso en el espacio de las funciones continuas en  $[-\pi, \pi]$  con  $f(\pi) = f(-\pi)$  [17] y el espacio de funciones continuas en  $[-\pi, \pi]$  con  $f(\pi) = f(-\pi)$  es denso en  $L^2([-\pi, \pi])$  [17]. Por lo tanto el espacio cerrado más pequeño que contiene a  $S$  es  $L^2([-\pi, \pi])$ . ■

De esta manera si  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , por el Teorema A.20, la serie de Fourier de  $f$  es

$$f(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha) e^{i\alpha x},$$

en donde

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

y

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2. \quad (\text{A.5})$$

Generalmente, la serie de Fourier de  $f$  se escribe como

$$f(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{\alpha} \cos \alpha x + \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} b_{\alpha} \sin \alpha x,$$

en donde  $a_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \alpha x dx$  y  $b_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \alpha x dx$ . Por lo tanto, si  $f$  es una función impar, entonces  $a_{\alpha} = 0$  y  $b_{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \alpha x dx$ , así que su serie de Fourier es

$$f(x) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} b_{\alpha} \sin \alpha x.$$

De esta observación se tiene el siguiente corolario.

**Corolario A.24.** Si  $f \in L^2([0, \pi])$  entonces la serie de Fourier de  $f$  en  $[0, \pi]$  está dada por

$$f(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \sin \alpha x,$$

con

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \alpha x \quad (\text{A.6})$$

**Definición A.25.** Sea  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , la función  $F$  dada por

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ -f(-x), & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

se conoce como la *extensión impar* de  $f$ .

**Corolario A.26.** Si  $F$  es la extensión impar de  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ , entonces la serie de Fourier de  $F$  es

$$F(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \hat{f}(\alpha) \sin \alpha x,$$

con  $\hat{f}(\alpha)$  dada por (A.6).

Ejemplo, si  $F$  es la extensión impar de  $f(x) = \pi - x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , es decir

$$F(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} \pi - x, & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ -(\pi + x), & \text{si } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$



entonces, los coeficientes de Fourier de  $F$  están dados por

$$\hat{f}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - x) \operatorname{sen} \alpha x \, dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de  $F$  es

$$F(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x. \quad (\text{A.7})$$

La serie (A.7) se empleará, más adelante, en el Apéndice C.

## A.2. La transformación de Fourier

En esta sección presentamos la teoría del análisis de Fourier que empleamos en esta tesis.

Primero, recordemos que el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es el conjunto de funciones  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tales que

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty,$$

para todo  $\alpha, \beta$  multi-índices.

**Proposición A.27.**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un subespacio de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.*

Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces existe  $M$  tal que  $|(1 + |x|^2)^n f(x)| \leq M$ . Luego

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(1 + |x|^2)^n f(x)|}{(1 + |x|^2)^n} \, dx \\ &\leq M \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^n} \, dx < \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . De donde se sigue fácilmente que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  es un subespacio de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . ■

Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces la transformación de Fourier  $\mathfrak{F}$  está dada por

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \, dx. \quad (\text{A.8})$$

y la transformación inversa de Fourier  $\mathfrak{F}^{-1}$  por

$$\mathfrak{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi. \quad (\text{A.9})$$

También escribiremos  $\mathfrak{F} = \hat{\cdot}$  y  $\mathfrak{F}^{-1} = \check{\cdot}$ .

En el siguiente teorema mostramos que la transformación de Fourier  $\mathfrak{F}$  es una transformación continua.

**Teorema A.28.** *Las funciones  $\mathfrak{F}$  y  $\mathfrak{F}^{-1}$  son transformaciones lineales continuas de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Además si  $\alpha$  y  $\beta$  son multi-índices entonces*

$$((i\xi)^\alpha D^\beta \hat{f})(\xi) = \mathfrak{F}\{D^\alpha((-ix)^\beta f(x))\}(\xi). \quad (\text{A.10})$$

*Demostración.* La linealidad de  $\mathfrak{F}$  se sigue de la linealidad de la integral. Para demostrar la continuidad de  $\mathfrak{F}$ , primero demostraremos (A.10). De la definición de transformada de Fourier tenemos

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha D^\beta \hat{f})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \xi^\alpha (-ix)^\beta f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-i)^\alpha} (D_x^\alpha e^{-i\xi \cdot x}) (-ix)^\beta f(x) dx \\ &= \frac{(-i)^\alpha}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} D_x^\alpha((-ix)^\beta f(x)) e^{-i\xi \cdot x} dx. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtuvo al integrar iteradamente por partes, por lo tanto (A.10) se satisface. Usando esta igualdad tenemos

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\xi} |\xi^\alpha (D^\beta \hat{f})(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |D_x^\alpha x^\beta f(x)| dx.$$

Dado que  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , de la Proposición A.27, tenemos

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} < \infty.$$

Por lo tanto  $\mathfrak{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Además

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|x|^2)^n}{(1+|x|^2)^n} |D_x^\alpha (-ix)^\beta f(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} dx \right) \sup_x \{(1+|x|^2)^n |D_x^\alpha (-ix)^\beta f(x)|\} \end{aligned}$$

luego, usando la regla de Leibniz podemos ver que existen  $\alpha_j$  y  $\beta_j$  multi-índices y  $c_j$  constantes tales que

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta} \leq \sum_{j=1}^M c_j \|f\|_{\alpha_j,\beta_j}.$$

Por lo tanto, la transformación de Fourier  $\mathfrak{F}$  es acotada y entonces es continua. La prueba de la continuidad de  $\mathfrak{F}^{-1}$  se hace de manera análoga. ■

**Teorema A.29.** (*Teorema de inversión de Fourier*) La transformación de Fourier es una biyección lineal y continua de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Su inversa es la transformación inversa de Fourier, es decir,

$$\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(f)).$$

*Demostración.* Como  $\mathfrak{F}$  es continua, entonces basta demostrar que  $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$  para  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dado que este conjunto es denso en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

Sea  $C_\varepsilon$  el cubo de volumen  $(2/\varepsilon)^n$ . Elijamos  $\varepsilon$  suficientemente pequeño tal que el soporte de  $f$  esté contenido en  $C_\varepsilon$  y definamos el siguiente conjunto

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{R}^n : \text{cada } \frac{k_j}{\pi\varepsilon} \text{ es un entero}\}.$$

Note que el conjunto  $\{(\varepsilon/2)^{n/2} e^{ik \cdot x}\}_{k \in K_\varepsilon}$  es base de  $L^2(C_\varepsilon)$ , por lo tanto la serie de Fourier de  $f$  es

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in K_\varepsilon} \langle f, (\varepsilon/2)^{n/2} e^{ik \cdot x} \rangle (\varepsilon/2)^{n/2} e^{ik \cdot x} \\ &= \sum_{k \in K_\varepsilon} (2\pi)^{-n/2} \mathfrak{F}(f)(k) e^{ik \cdot x} (\pi\varepsilon)^n. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dado que  $\mathbb{R}^n$  es la unión disjunta de cubos de volumen  $(\pi\varepsilon)^n$  centrados en puntos de  $K_\varepsilon$ , entonces (A.11) es justamente una suma de Riemann para la integral de la función  $(2\pi)^{-n/2} \hat{f}(k) e^{ik \cdot x}$ . Luego como  $\mathfrak{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , entonces la suma converge a la integral. Por lo tanto  $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$ . Similarmente se demuestra para  $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(f)) = f$ .

Para demostrar que  $\mathfrak{F}$  es una biyección, notemos que  $\mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}(f)) = f$  implica que  $\mathfrak{F}$  es suprayectiva y de  $\mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(f)) = f$  implica que  $\mathfrak{F}$  es inyectiva ■

La siguiente identidad es un corolario del Teorema A.29.

**Corolario A.30.** (*Identidad de Parseval*) Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (\text{A.12})$$

*Demostración.*

Sea  $f$  de soporte compacto, entonces para  $\varepsilon$  suficientemente pequeño tenemos

$$f(x) = \sum_{k \in K_\varepsilon} \langle f, (\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2} e^{ik \cdot x} \rangle (\frac{1}{2}\varepsilon)^{n/2} e^{ik \cdot x}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx &= \int_{C_\varepsilon} |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k \in K_\varepsilon} \left| \left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{\frac{n}{2}} \langle f(x), e^{ik \cdot x} \rangle \right|^2 \\ &= \sum_{k \in K_\varepsilon} |\hat{f}(k)|^2 (\pi\varepsilon)^n.\end{aligned}$$

Al hacer tender  $\varepsilon$  a cero, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 dk.$$

Por lo tanto, el corolario es válido para  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Como  $\mathfrak{F}$  y  $\|\cdot\|$  son funciones continuas en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  y  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  es denso en  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  el resultado se sigue para todo el espacio de Schwartz. ■

## APÉNDICE B

---

### Los Polinomios de Chebyshev de Segunda Clase

---

En este apéndice presentamos las propiedades de los polinomios de Chebyshev de segunda clase que empleamos en esta tesis.

Recordemos que los polinomios de Chebyshev de segunda clase  $U_\alpha$  se definen como

$$U_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen}(\alpha + 1)\tau}{\text{sen } \tau}, \quad t = \cos \tau, \quad \tau \in [0, \pi] \quad \text{y} \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.1})$$

Por ejemplo,

$$U_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen } \tau}{\text{sen } \tau} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{y} \quad U_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\text{sen } 2\tau}{\text{sen } \tau} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t.$$

De la identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\alpha + 1)\tau + \text{sen}(\alpha - 1)\tau = 2 \text{sen } \alpha\tau \cos \tau$$

vemos que

$$\frac{\text{sen}(\alpha + 1)\tau}{\text{sen } \tau} = \frac{2 \text{sen } \alpha\tau \cos \tau}{\text{sen } \tau} - \frac{\text{sen}(\alpha - 1)\tau}{\text{sen } \tau},$$

es decir,

$$U_{\alpha+1}(t) = 2tU_\alpha(t) - U_{\alpha-1}(t).$$

Por lo tanto, los polinomios de Chebyshev de segunda clase los podemos generar mediante la relación de recurrencia dada por

$$U_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad U_1(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t \quad \text{y} \quad U_\alpha(t) = 2tU_{\alpha-1}(t) - U_{\alpha-2}(t).$$

para todo  $\alpha = 2, 3, \dots$ . De esta manera, se verifican fácilmente que

$$U_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}4t^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{y} \quad U_3(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}8t^3 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}4t.$$

Note que cada polinomio  $U_\alpha$  es un polinomio de grado  $\alpha$  en la variable  $t$  y por lo tanto,  $\{U_0(t), \dots, U_n(t)\}$  es una base para el conjunto de polinomios de grado menor o igual que  $n$  en  $\mathbb{R}$ .

La siguiente propiedad generalmente se le conoce como la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Chebyshev de segunda clase.

**Proposición B.1.** Sean  $\theta_j, \theta_k \in \mathbb{R}$  y  $U_{\alpha,j}, U_{\beta,k} \in L^2(D)$ , en donde

$$U_{\alpha,j}(x, y) = U_\alpha(x \cos \theta_j + y \operatorname{sen} \theta_j) \quad \text{y} \quad U_{\alpha,k}(x, y) = U_\alpha(x \cos \theta_k + y \operatorname{sen} \theta_k),$$

para casi todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Entonces

$$\langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,k} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{si } \alpha = \beta \text{ y } j = k \\ \frac{\operatorname{sen}(\alpha+1)(\theta_j - \theta_k)}{(\alpha+1) \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)}, & \text{si } \alpha = \beta \text{ y } j \neq k \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

para todo  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots$ .

*Demostración.* De la Proposición 4.3, observando que  $U_{\alpha,j}$  es una función cresta en la dirección  $\theta_j$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,k} \rangle &= \int_{-1}^1 U_\alpha(t) P_{U_{\beta,k}}(t, \theta_j) dt \\ &= \int_{-1}^1 U_\alpha(t) \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} U_{\beta,k}(t\omega_j + s\hat{\omega}_j) ds dt, \end{aligned}$$

en donde  $\omega_j = (\cos \theta_j, \operatorname{sen} \theta_j)$  y  $\hat{\omega}_j = (-\operatorname{sen} \theta_j, \cos \theta_j)$ . Por otro lado, como  $U_{\beta,k}$  es también una función cresta en la dirección  $\theta_k$  tenemos

$$\begin{aligned} U_{\beta,k}(t\omega_j + s\hat{\omega}_j) &= U_\beta((t\omega_j + s\hat{\omega}_j) \cdot \omega_k) \\ &= U_\beta(t \cos(\theta_j - \theta_k) - s \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)). \end{aligned}$$

Así,

$$\langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,k} \rangle = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} U_\alpha(t) U_\beta(t \cos(\theta_j - \theta_k) - s \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)) ds dt. \quad (\text{B.3})$$

Al hacer el cambio de variables  $(t, s) = (\cos \tau, s)$  tenemos

$$\langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,k} \rangle = \int_0^\pi U_\alpha(\cos \tau) \operatorname{sen} \tau \int_{-\operatorname{sen} \tau}^{\operatorname{sen} \tau} U_\beta(\cos \tau \cos(\theta_j - \theta_k) - s \operatorname{sen}(\theta_j - \theta_k)) ds d\tau.$$

Por lo tanto, si  $j = k$  entonces

$$\begin{aligned}\langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,j} \rangle &= 2 \int_0^\pi U_\alpha(\cos \tau) U_\beta(\cos \tau) \sin^2 \tau \, d\tau \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(\alpha + 1)\tau \sin(\beta + 1)\tau \, d\tau\end{aligned}$$

y para  $j \neq k$ , al reemplazar  $\theta = \theta_j - \theta_k$  en (4.15) y (4.16), obtenemos

$$\begin{aligned}\langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,k} \rangle &= \frac{1}{\sin(\theta_j - \theta_k)} \int_0^\pi U_\alpha(\cos \tau) \sin \tau \int_{\tau - (\theta_j - \theta_k)}^{\tau + (\theta_j - \theta_k)} U_\beta(\cos t) \sin t \, dt \, d\tau \\ &= \frac{2 \sin(\beta + 1)(\theta_j - \theta_k)}{\pi (\beta + 1) \sin(\theta_j - \theta_k)} \int_0^\pi \sin(\alpha + 1)\tau \sin(\beta + 1)\tau \, d\tau.\end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\int_0^\pi \sin(\alpha + 1)\tau \sin(\beta + 1)\tau \, d\tau = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = \beta \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

entonces (B.2) se satisface. ■

La Proposición B.1 será de gran utilidad en la demostración del siguiente teorema.

**Teorema B.2.** *Sea  $t \in [-1, 1]$  el conjunto*

$$S = \{U_\alpha(t)\}_{\alpha=0}^\infty$$

*es base ortonormal de  $L^2([-1, 1], 2\sqrt{1-t^2})$ .*

*Demostración.* De (B.3) y de (B.2) vemos que

$$\int_{-1}^1 U_\alpha(t) U_\beta(t) \sqrt{1-t^2} \, dt = \langle U_{\alpha,j}, U_{\beta,j} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } \alpha = \beta; \\ 0, & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto,  $S$  es un conjunto ortonormal en  $L^2([-1, 1], 2\sqrt{1-t^2})$ . Luego, para demostrar que  $S$  es base, del Teorema A.22, basta demostrar que el espacio vectorial cerrado más pequeño que contiene a  $S$  es  $L^2([-1, 1], 2\sqrt{1-t^2})$ .

Todo polinomio definido en el intervalo  $[-1, 1]$  es combinación lineal de  $U_\alpha$ , luego el conjunto de polinomios en  $[-1, 1]$  es denso en el espacio de las funciones continuas en  $[-1, 1]$  [18] y el espacio de las funciones continuas de  $[-1, 1]$  es denso en  $L^2([-1, 1], \sqrt{1-t^2})$ .

Por lo tanto, el espacio vectorial cerrado más pequeño que contiene a  $S$  es  $L^2([-1, 1], \sqrt{1-t^2})$ . ■

## APÉNDICE C

---

### Algunas Sumas Auxiliares

---

A continuación presentamos algunas sumas trigonométricas, las cuales empleamos en el Capítulo 4.

**Proposición C.1.** Sean  $m, j = 0, 1, \dots, n-1$  y  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$

Definimos la suma  $S_{m, j}(\alpha)$  como

$$S_{m, j}(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen} \alpha(m-k) \frac{\pi}{n} \operatorname{sen} \alpha(k-j) \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-k) \frac{\pi}{n} \operatorname{sen}(k-j) \frac{\pi}{n}},$$

en donde  $\operatorname{sen} \alpha(m-k) \frac{\pi}{n} / \operatorname{sen}(m-k) \frac{\pi}{n} = \alpha$  si  $m = k$ . Entonces para todo  $\alpha$  se tiene

$$S_{m, j}(\alpha) = (2\mu + 1) \frac{\operatorname{sen} \alpha(m-j) \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-j) \frac{\pi}{n}} - n\mu(\mu + 1)\delta_{mj}, \quad (\text{C.1})$$

en donde  $\mu$  es la parte entera de  $\alpha/n$  y  $\delta_{mj} = 1$  si  $m = j$  y  $\delta_{mj} = 0$  si  $m \neq j$ .

*Demostración.* La demostración se hará por inducción sobre  $\alpha$ . Para esto, primero consideramos el caso cuando  $\alpha \leq n-1$ . Por demostrar que

$$S_{m, m}(\alpha) = \alpha \quad \text{y} \quad S_{m, j}(\alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha(m-j) \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-j) \frac{\pi}{n}}. \quad (\text{C.2})$$

Para  $\alpha = 1$  tenemos

$$S_{m, m}(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}^2(m-k) \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}^2(m-k) \frac{\pi}{n}} = 1.$$



Por lo tanto  $S_{m,m}(1) = 1$ . Supongamos que  $S_{m,m}(\beta) = \beta$  para  $\beta < n - 1$ , de la siguiente identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(\beta + 1)(m - k)\frac{\pi}{n} &= 2\operatorname{sen}^2(m - k)\frac{\pi}{n} - \operatorname{sen}^2(\beta - 1)(m - k)\frac{\pi}{n} \\ &\quad + 2\operatorname{sen}^2 \beta(m - k)\frac{\pi}{n} - 4\operatorname{sen}^2(m - k)\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}^2 \beta(m - k)\frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

y de la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\beta(m - k)\frac{\pi}{n} = 0$$

tenemos

$$\begin{aligned} S_{m,m}(\beta + 1) &= 2S_{m,m}(1) - S_{m,m}(\beta - 1) + 2S_{m,m}(\beta) - \frac{4}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sen}^2 \beta(m - k)\frac{\pi}{n} \\ &= 2(1 + \beta) - (\beta - 1) - \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ 1 - \cos 2\beta(m - k)\frac{\pi}{n} \right] \\ &= \beta + 1. \end{aligned}$$

Si  $m \neq j$  entonces

$$S_{m,j}(1) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(m - k)\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}(k - j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m - k)\frac{\pi}{n} \operatorname{sen}(k - j)\frac{\pi}{n}} = 1$$

Por lo tanto  $S_{m,j}(1) = 1$ . Supongamos que

$$S_{m,j}(\beta) = \frac{\operatorname{sen} \beta(m - j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}}$$

para  $\beta < n - 1$ , de la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\beta + 1)a \operatorname{sen}(\beta + 1)b &= 2\cos(a + b) \operatorname{sen} \beta a \operatorname{sen} \beta b - \operatorname{sen}(\beta - 1)a \operatorname{sen}(\beta - 1)b \\ &\quad + 2\cos \beta(a - b) \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b. \end{aligned}$$

con  $a = (m - k)\pi/n$  y  $b = (k - j)\pi/n$  tenemos

$$\begin{aligned} S_{m,j}(\beta + 1) &= 2\cos(m - j)\frac{\pi}{n} S_{m,j}(\beta) - S_{m,j}(\beta - 1) + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \beta(m + j - 2k)\frac{\pi}{n} \\ &= \frac{2\cos(m - j)\frac{\pi}{n} \operatorname{sen} \beta(m - j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}} - \frac{\operatorname{sen}(\beta - 1)(m - j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\beta + 1)(m - j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S_{m,j}(\beta + 1) = \frac{\text{sen}(\beta + 1)(m - j)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}}.$$

Para el caso cuando  $\alpha \geq n$ , observemos que  $\alpha = n\mu + \nu$  con  $\nu = 0, 1, \dots, n - 1$ . De donde se sigue

$$\text{sen} \alpha(m - k)\frac{\pi}{n} = \cos \mu(m - k)\pi \text{sen} \nu(m - k)\frac{\pi}{n}. \quad (\text{C.3})$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S_{m,m}(\alpha) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\text{sen} \alpha(m - k)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m - k)\frac{\pi}{n}} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0, k \neq m}^{n-1} \left( \frac{\text{sen} \alpha(m - k)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m - k)\frac{\pi}{n}} \right)^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{n} - \frac{\nu^2}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{sen}^2 \nu(m - k)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}^2(m - k)\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\alpha^2}{n} - \frac{\nu^2}{n} + S_{m,m}(\nu). \end{aligned}$$

Luego, de (C.2) se tiene

$$\begin{aligned} S_{m,m}(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{n} - \frac{\nu^2}{n} + \nu \\ &= (2\mu + 1)\alpha - n\mu(\mu + 1). \end{aligned}$$

Si  $m \neq j$  entonces

$$\begin{aligned} S_{m,j}(\alpha) &= \frac{2\alpha \text{sen} \alpha(m - j)\frac{\pi}{n}}{n \text{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}} + \frac{1}{n} \sum_{k=0, k \neq m \neq j}^{n-1} \frac{\text{sen} \alpha(m - k)\frac{\pi}{n} \text{sen} \alpha(k - j)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m - k)\frac{\pi}{n} \text{sen}(k - j)\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{2\alpha \text{sen} \alpha(m - j)\frac{\pi}{n}}{n \text{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}} \\ &\quad + \cos \mu(m - j)\pi \frac{1}{n} \sum_{k=0, k \neq m \neq j}^{n-1} \frac{\text{sen} \nu(m - k)\frac{\pi}{n} \text{sen} \nu(k - j)\frac{\pi}{n}}{\text{sen}(m - k)\frac{\pi}{n} \text{sen}(k - j)\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{2\alpha \text{sen} \alpha(m - j)\frac{\pi}{n}}{n \text{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}} + \cos \mu(m - j)\pi \left[ S_{m,j}(\nu) - \frac{2\nu \text{sen} \nu(m - j)\frac{\pi}{n}}{n \text{sen}(m - j)\frac{\pi}{n}} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (C.2) y (C.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
S_{m,j}(\alpha) &= \frac{2\alpha \operatorname{sen} \alpha(m-j)\frac{\pi}{n}}{n \operatorname{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}} + \frac{\cos(m-j)\pi \operatorname{sen} \nu(m-j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}} \left(1 - \frac{2\nu}{n}\right) \\
&= \frac{2\alpha \operatorname{sen} \alpha(m-j)\frac{\pi}{n}}{n \operatorname{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}} + \frac{\operatorname{sen} \alpha(m-j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}} \left(1 - \frac{2\nu}{n}\right) \\
&= (2\mu + 1) \frac{\operatorname{sen} \alpha(m-j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}}.
\end{aligned}$$

Con esto concluimos que

$$S_{m,j} = (2\mu + 1) \frac{\operatorname{sen} \alpha(m-j)\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}(m-j)\frac{\pi}{n}} - \mu(\mu + 1)n\delta_{mj}.$$

■

**Proposición C.2.** Sea  $\alpha = n\mu + \nu$  con  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$  y  $\mu = 0, 1, \dots$ . Si definimos

$$K_0(x) = - \sum_{\alpha=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|\alpha|}{n}\right) e^{i\alpha x} + 2 \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu(n-\nu)}{\mu(\mu+1)n^2} \cos \alpha x.$$

entonces

$$K_0(x) = -\frac{1}{n} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}\right)^2 + \frac{[2 \cos \frac{nx}{2} - |\operatorname{sen} \frac{nx}{2}| T(\frac{nx}{2})] [\cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2} - n \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}]}{n^2 \operatorname{sen}^3 \frac{x}{2}},$$

en donde  $T(x) = \pi - 2|x|$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ .

*Demostración.* Primero verifiquemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|\alpha|}{n}\right) e^{i\alpha x} &= 2 \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \cos \alpha x - 1 \\
&= 2 \sum_{\alpha=0}^{n-1} \cos \alpha x - \frac{2}{n} \frac{d}{dx} \sum_{\nu=0}^{n-1} \operatorname{sen} \alpha x - 1 \\
&= \frac{1 \operatorname{sen}^2 \frac{nx}{2}}{n \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

Luego, dado que  $1/\mu(\mu+1) = 1/\mu - 1/(\mu+1)$  tenemos

$$\sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu(n-\nu)}{\mu(\mu+1)} \cos \alpha x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+1}\right) \nu(n-\nu) \cos(n\mu + \nu)x.$$

Al desarrollar la suma del coseno y al agrupar obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu(n-\nu)}{\mu(\mu+1)} \cos \alpha x &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu(n-\nu) [\cos \nu x - \cos(n-\nu)x] \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \cos n\mu x \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu(n-\nu) [\operatorname{sen} \nu x + \operatorname{sen}(n-\nu)x] \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} n\mu x \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu(n-\nu) \cos \nu x. \end{aligned}$$

Por otra parte, al calcular las siguientes sumas obtenemos

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu(n-\nu) [\cos \nu x - \cos(n-\nu)x] = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu(n-\nu) [\operatorname{sen} \nu x - \operatorname{sen}(n-\nu)x] = \frac{\operatorname{sen} \frac{nx}{2} \left[ \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2} - n \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} \right]}{\operatorname{sen}^3 \frac{nx}{2}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu(n-\nu) \cos \nu = \frac{\cos \frac{nx}{2} \left[ \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2} - n \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} \right]}{\operatorname{sen}^3 \frac{nx}{2}}$$

y de (A.7)

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} n\mu x &= \frac{1}{2} \frac{|\operatorname{sen} \frac{nx}{2}|}{\operatorname{sen} \frac{nx}{2}} (\pi - n|x|) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|\operatorname{sen} \frac{nx}{2}|}{\operatorname{sen} \frac{nx}{2}} T\left(\frac{nx}{2}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu(n-\nu)}{\mu(\mu+1)} \cos \alpha x = \frac{\left[ 2 \cos \frac{nx}{2} - |\operatorname{sen} \frac{nx}{2}| T\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \left[ \cos \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2} - n \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} \right]}{2 \operatorname{sen}^3 \frac{nx}{2}}.$$

■

**Proposición C.3.** *Sea  $\alpha = n\mu + \nu$  con  $\nu = 0, 1, \dots, n-1$  y  $\mu = 0, 1, \dots$ . Si definimos*

$$K_1(x) = \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\alpha}{2n^2\mu(\mu+1)} \operatorname{sen} \alpha x.$$

entonces

$$K_1(x) = \frac{|\operatorname{sen} \frac{nx}{2}| T(\frac{nx}{2}) [n \operatorname{sen} x \cos \frac{nx}{2} - \operatorname{sen} \frac{nx}{2}]}{4n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} + \frac{\operatorname{sen} nx}{2n} \log(2 \operatorname{sen} \frac{nx}{2}) + \frac{\operatorname{sen} nx - n \operatorname{sen} x}{8n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}.$$

*Demostración.* Observemos que

$$\sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\alpha}{\mu(\mu+1)} \operatorname{sen} \alpha x = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n-1} \left( \frac{\nu}{\mu} + \frac{(n-\nu)}{\mu+1} \right) \operatorname{sen}(n\mu + \nu)x$$

Al desarrollar la suma del seno, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu(n-\nu)}{\mu(\mu+1)} \operatorname{sen} \alpha x &= \sum_{\nu=0}^{n-1} [\nu \cos \nu x + (n-\nu) \cos(n-\nu)x] \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \operatorname{sen} n\mu x \\ &+ \sum_{\nu=0}^{n-1} [\nu \operatorname{sen} \nu x - (n-\nu) \operatorname{sen}(n-\nu)x] \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \cos n\mu x \\ &- \sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu) \operatorname{sen} \nu x. \end{aligned}$$

Luego, dado que

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} [\nu \cos \nu x + \nu(n-\nu) \cos(n-\nu)x] = \frac{\operatorname{sen} \frac{nx}{2} [n \operatorname{sen} x \cos \frac{nx}{2} - \operatorname{sen} \frac{nx}{2}]}{\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} [\nu \operatorname{sen} \nu x - \nu(n-\nu) \operatorname{sen}(n-\nu)x] = -n \operatorname{sen} nx,$$

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu) \operatorname{sen} \nu x = \frac{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}, \quad \text{y} \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \cos n\mu x = -\log(2 \operatorname{sen} \frac{nx}{2}).$$

Concluimos

$$K_1(x) = \frac{|\operatorname{sen} \frac{nx}{2}| T(\frac{nx}{2}) [n \operatorname{sen} x \cos \frac{nx}{2} - \operatorname{sen} \frac{nx}{2}]}{4n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}} + \frac{\operatorname{sen} nx}{2n} \log(2 \operatorname{sen} \frac{nx}{2}) + \frac{\operatorname{sen} nx - n \operatorname{sen} x}{8n^2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}.$$

■

---

## Bibliografía

---

- [1] M. REED Y B. SIMON, *Functional Analysis*, Academic Press, (1980).
- [2] J. BOMAN, *On the Closure Spaces of Sums of Ridge Functions and the Range of the X-ray Transform*, Annales de l'institut Fourier. **Vol. 34** (1984), 207-239.
- [3] A. M. CORMACK, *Representation of Function by its Line Integral, with some Radiological Applications I*, Applied Physics. **Vol. 34** (1963), 2722-2727.
- [4] A. M. CORMACK, *Representation of Function by its Line Integral, with some Radiological Applications II*, Applied Physics. **Vol. 35** (1964), 2908-2913.
- [5] C. L. EPSTEIN, *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*, Pearson Prentice Hall, (2003).
- [6] A. FARIDANI, *Introduction to the Mathematics of Computed Tomography*, Inverse Problems, MSRI Publications. **Vol. 47** (2003), 1-46.
- [7] C. HAMAKER Y D.C. SOLMON, *The Angles Between the Null Space of X Rays*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **Vol. 62** (1978), 1-23.
- [8] S. HELGASON, *The Radon Transform, Second Edition*, Pearson Prentice Hall, (1999).
- [9] G. T. HERMAN Y A. KUBA, *Discrete Tomography*, Birkhäuser, (1999).
- [10] G. N. HOUNSFIELD, *Computerized Transverse Axial Scanning Tomography I. Description of System*, Br. J. Radiology. **Vol. 46** (1973), 1016-1022.
- [11] A. C. KAK Y M. SLANEY, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, SIAM, (2001).

- [12] B.F. LOGAN Y L. A. SHEPP, *Optimal Reconstruction of a Function from its Projection*, Duke Mathematical Journal. **Vol. 42** (1975), 645-659.
- [13] R. NARASIMHAN, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, Masson and Cie editeur, (1968).
- [14] F. NATTERER, *The Mathematics of Computerized Tomography*, SIAM, (2001).
- [15] N. K. NIKOLSKI, *Operators, Functions, and Systems: An Easy Reading, Vol. I*, American Mathematical Society, (2002).
- [16] J. RADON, *Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten*, Ber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **Vol. 69** (1917), 262-267.
- [17] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, New York: McGraw-Hill, (1966).
- [18] G. F. SIMMONS, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, (1963).
- [19] D.C. SOLMON, *The X-Ray Transform*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **Vol. 56** (1976), 61-83.
- [20] *Enciclopedia de las ciencias, Vol. 6*, Cumbre S. A., (1980).
- [21] C. G. BÁEZ, *En las Redes del Tiempo: Godfrey N. Housfield*, <http://www.radiocentro.com/grc/redam.nsf/vwALL/MLOZ-64ET2A>, (capsula 111 del 28 de agosto de 2004).
- [22] T. GALE, *World of Scientific Discovery on Allan M. Cormack*, <http://www.bookrags.com/Allan-McLeod-Cormack>, (2005-2006).
- [23] J. J. O'CONNOR Y E. F. ROBERTSON, *Johann Radon*, <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Radon.html>, (2006).
- [24] WIKIPEDIA, *Computed Tomography*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Computed-tomography>.
- [25] WIKIPEDIA, *Tomography*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Tomography>.
- [26] WIKIPEDIA, *Tomografía Axial Computarizada*, <http://es.wikipedia.org/wiki/Tomografia-axial-computarizada>.
- [27] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Fourier.html>.
- [28] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Schwartz.html>.
- [29] <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Radon.html>.

[30] <http://nobelprize.org/nobel-prizes/medicine/laureates/1979/>.

[31] <http://nobelprize.org/nobel-prizes/physics/laureates/1901/rontgen-bio.html>.

[32] <http://en.wikipedia.org/wiki/John-von-Neumann>.