



Asignatura de Estadística Aplicada a la
Mercadotecnia

UNIDAD II
MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

“Otras Medidas de tendencia central”



INTRODUCCIÓN

La media, mediana y moda son las medidas de tendencia central más importantes, de mayor aplicación y más fáciles de calcular. Sin embargo, en ciertas circunstancias son útiles otras medidas de tendencia central y aunque su uso no sea frecuente, es conveniente conocerlas; estas son:

Media Geométrica (MG)

Es una medida de tendencia central que puede utilizarse para mostrar los cambios porcentuales en una serie de números positivos. Como tal, tiene una amplia aplicación en los negocios y en la economía, debido a que con frecuencia se está interesado en establecer el cambio porcentual en las ventas en el producto interno bruto o en cualquier serie económica. Se define como la raíz índice n del producto de n términos.

$$MG = \sqrt[n]{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n}$$

Así por ejemplo, la media geométrica del conjunto de datos 2, 4, 6, 12 y 18 es

$$MG = \sqrt[5]{(2)(4)(6)(12)(18)}$$

$$MG = \sqrt[5]{10368}$$

$$MG = 6.355$$

La media geométrica se utiliza con más frecuencia para calcular la tasa de crecimiento porcentual promedio de algunas series dadas, a través del tiempo.

Ejemplo 1.

Si el crecimiento de las ventas en un negocio fue en los tres último años de 26%, 32% y 28%, hallar la media anual del crecimiento.

Solución.

Si tomamos en cuenta que el factor de crecimiento (FC) se calcula de la siguiente manera:

$$FC = 1 + \left(\frac{ti}{100} \right)$$

Entonces, por ejemplo para el primer año el factor de crecimiento es de 1.26.

$$FC = 1 + \left(\frac{26}{100} \right) = 1.26$$

Así que

$$MG = \sqrt[3]{(1.26)(1.32)(1.28)}$$

$$MG = \sqrt[3]{2.128896} = 1.286$$

Nota: Calcular la raíz n-ésima de un número, es equivalente a elevar el número a la potencia 1/n. Ejemplo $2.128896^{1/3} = 1.286$.

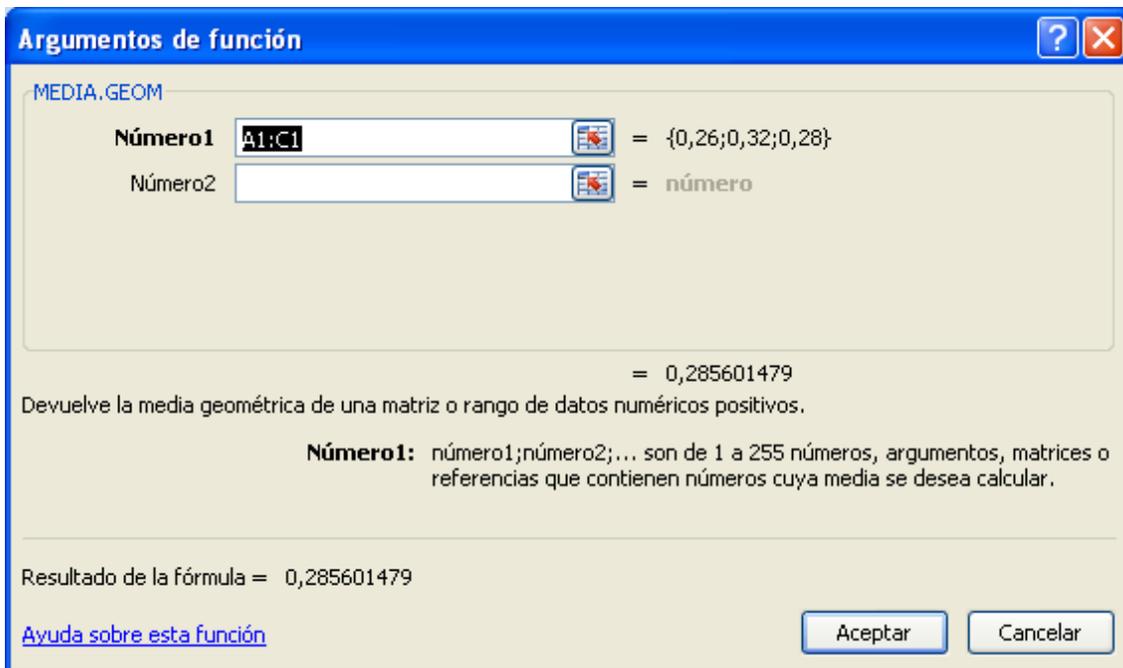
Se puede concluir entonces que la media anual de crecimiento fue del 28.6%.

Para calcular la media geométrica utilizando Excel, sigue estos pasos:

Paso 1. Copia la serie de datos a una hoja de Excel

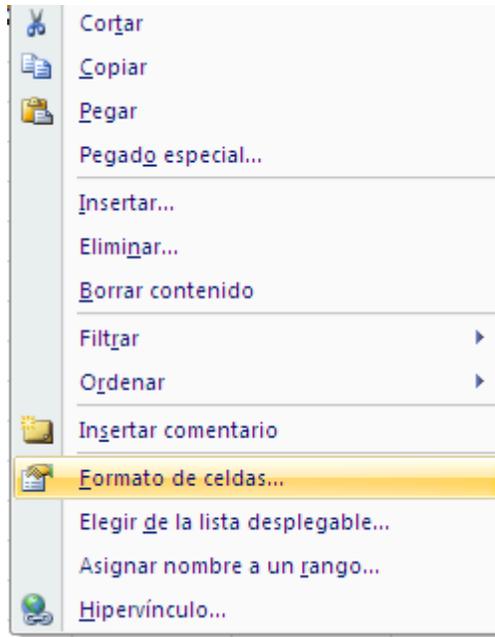
| | A | B | C |
|---|-----|-----|-----|
| 1 | 26% | 32% | 28% |
| 2 | | | |

Paso 2. En una celda vacía, por ejemplo E1, inserta la función **MEDIA.GEOM** y especifica el rango de las celdas que contienen los datos en la caja de texto correspondiente a "Número1".

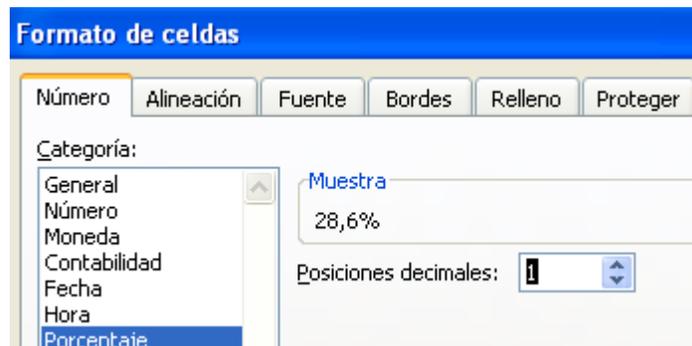


Pulsa el botón “Aceptar” y te aparecerá el resultado en forma de número fraccionario.

Paso 3. Para que aparezca en puntos porcentuales, sólo especifica un formato de celda “Porcentaje” con un decimal a la celda E1. Para ello, posiciona el cursor sobre dicha celda y pulsa el botón derecho del ratón para que aparezca el menú conceptual. Después elige la opción “formato de celdas”.



Paso 4. En el cuadro de diálogo emergente selecciona la categoría porcentaje y disminuye el número de posiciones decimales a 1.



Pulsa el botón Aceptar y obtendrás el resultado.

Ejemplo 2.

El director ejecutivo de la empresa *White-Knuckle Airlines* desea determinar la tasa de crecimiento promedio en los ingresos con base en las cifras dadas en la tabla. Si la tasa de crecimiento promedio es menor que el promedio industrial del 10%, se asumirá una nueva campaña publicitaria.

| Ingresos para White-Knuckle Airlines | | |
|--------------------------------------|-------------|-----------------------------|
| Año | Ingreso | Porcentaje del año anterior |
| 1992 | US\$ 50,000 | -- -- |
| 1993 | 55,000 | 55/50 = 1.10 |
| 1994 | 66,000 | 66/55 = 1.20 |
| 1995 | 60,000 | 60/66 = 0.91 |
| 1996 | 78,000 | 78/60 = 1.30 |

Solución.

Paso 1. Primero es necesario determinar el porcentaje que los ingresos de cada año representan respecto de los obtenidos el año anterior. En otras palabras, ¿qué porcentaje de ingreso de 1992 es el ingreso en 1993? Esto se encuentra dividiendo los ingresos de 1992 entre los de 1993. El resultado 1.10 revela que los ingresos de 1993 son 110% de los ingresos del año anterior (es decir, el 10% más). También se calculan los porcentajes para los tres años restantes. Tomando la media geométrica (MG) de estos porcentajes resulta

$$MG = \sqrt[4]{(1.10)(1.20)(0.91)(1.30)} = 1.1179$$

Restando 1 para convertirlo en un incremento anual promedio da 0.1179, o un incremento promedio de 11.79% para el periodo de 1992 a 1996.

Por otro lado, la media aritmética simple es:

$$\bar{X} = \frac{1.10 + 1.20 + 0.91 + 1.30}{4} = \frac{4.51}{4} = 1.1275$$

O un cambio promedio de 12.75%. Se divide entre 4 ya que se presentaron 4 cambios durante el periodo.

Sin embargo, si un incremento promedio de 12.75%, basado en la media aritmética, se aplica a la serie que comienza con US\$50,000, los resultados son:

$$US\$50,000 \times 1.1275 = US\$56,375$$

$$US\$56,375 \times 1.1275 = US\$63,563$$

$$\text{US\$63,563} \times 1.1275 = \text{US\$71,667}$$

$$\text{US\$71,667} \times 1.1275 = \text{US\$80,805}$$

Ya que US\$80,805 excede los US\$78,000 que White-Knuckle Airlines en realidad ganó, el incremento del 12.75% es obviamente muy alto. Si se utiliza la tasa de crecimiento de la media geométrica del 11.79%, se obtiene:

$$\text{US\$50,000} \times 1.1179 = \text{US\$55,895}$$

$$\text{US\$55,895} \times 1.1179 = \text{US\$62,485}$$

$$\text{US\$62,485} \times 1.1179 = \text{US\$69,852}$$

$$\text{US\$69,852} \times 1.1179 = \text{US\$78,088} \approx \text{US\$78,000}$$

Esto da un valor de \$78,088, lo que está mucho más cerca del ingreso real de \$78,000.

Interpretación.

La media geométrica representa el cambio promedio con el tiempo. Debido a que la tasa de crecimiento supera el promedio de la industria del 10%, la nueva campaña publicitaria no se llevará a cabo.

Ejemplo 3.

En el cuadro siguiente se presentan los consumos de electricidad en Hidalgo en miles de millones de de kw/hora desde diciembre de 2009 hasta diciembre de 2010.

| Meses | Consumo |
|--------------|----------------|
| Dic | 10.1 |
| Ene | 10.7 |
| Feb | 9.96 |
| Mar | 9.46 |
| Abr | 9.54 |
| May | 8.92 |
| Jun | 8.95 |
| Jul | 8.58 |

| | |
|-----|------|
| Ago | 7.86 |
| Sep | 8.96 |
| Oct | 9.17 |
| Nov | 9.57 |
| Dic | 10.2 |

A partir de los incrementos unitarios de consumo de cada mes calcular el incremento unitario anual medio acumulativo.

Solución.

Al tratarse de cálculo de una media unitaria acumulativa, el promedio más adecuado es la media geométrica. Se trata por tanto de calcular la media geométrica de los incrementos unitarios mensuales. Estos incrementos se calculan a continuación.

$$\frac{10.7}{10.1} = 1.06 \quad \frac{9.96}{10.7} = 0.93 \quad \frac{9.46}{9.96} = 0.95 \quad \frac{9.54}{9.46} = 1.008 \quad \frac{8.92}{9.54} = 0.93$$

$$\frac{8.95}{8.92} = 1.003 \quad \frac{9.58}{8.95} = 1.07 \quad \frac{7.86}{9.58} = 0.82 \quad \frac{8.96}{7.86} = 1.13 \quad \frac{9.17}{8.96} = 1.02$$

$$\frac{9.57}{9.17} = 1.04 \quad \frac{10.2}{9.57} = 1.06$$

La media geométrica de estos incrementos unitarios mensuales se calcula como sigue:

$$MG = \sqrt[12]{(1.06)(0.93)(0.95)(1.008)(0.93)(1.003)(1.07)(0.82)(1.13)(1.02)(1.04)(1.06)}$$

$$MG = \sqrt[12]{0.9816}$$

$$MG = 0.9984$$

Podemos concluir que la media geométrica siempre será menor a la media aritmética salvo en el extraño caso de que todos los incrementos porcentuales sean iguales. Entonces las dos medias serán iguales.

Media armónica (Ma)

La media armónica se define como el recíproco de la media aritmética de los recíprocos:

$$Ma = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Esta medida se emplea para promediar variaciones con respecto al tiempo tales como productividades, tiempos, rendimientos, cambios, etc.,

Aplicaciones de la media armónica

Precio promedio

Si se compran varios tipos de productos con distintas cantidades de unidades de cada tipo, pero gastando en ellos igual cantidad de dinero, el precio promedio por unidad es igual a la media armónica de los precios por unidad de cada tipo de producto.

Rendimiento promedio de producción

En un grupo puede haber operarios con distinta velocidad para producir un artículo. Si cada una de estas personas tiene que elaborar igual cantidad de artículos, el promedio de velocidad de rendimientos de tal grupo, es igual al promedio armónico de las velocidades de rendimiento de cada una de los operarios que lo integran.

Rendimiento Promedio de la Producción

Si v_1, v_2, \dots, v_n son las velocidades de rendimiento de cada uno de los operarios, que aunque sea en distinta cantidad de tiempo, producen igual cantidad de productos, el promedio de velocidad de rendimiento del grupo es:

$$MH = n / (1/v_1 + 1/v_2 + \dots 1/v_n)$$

donde n es el número de operarios.

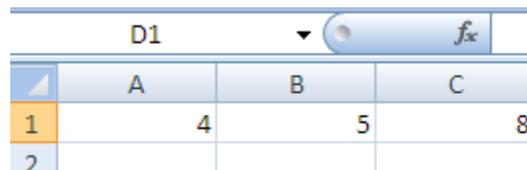
Ejemplo 1.

Hallar la media armónica de los números 4, 5 y 8.

$$Ma = \frac{3}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8}} = \frac{3}{0.575} = 5.21$$

Para calcular la media geométrica utilizando Excel, sigue estos pasos:

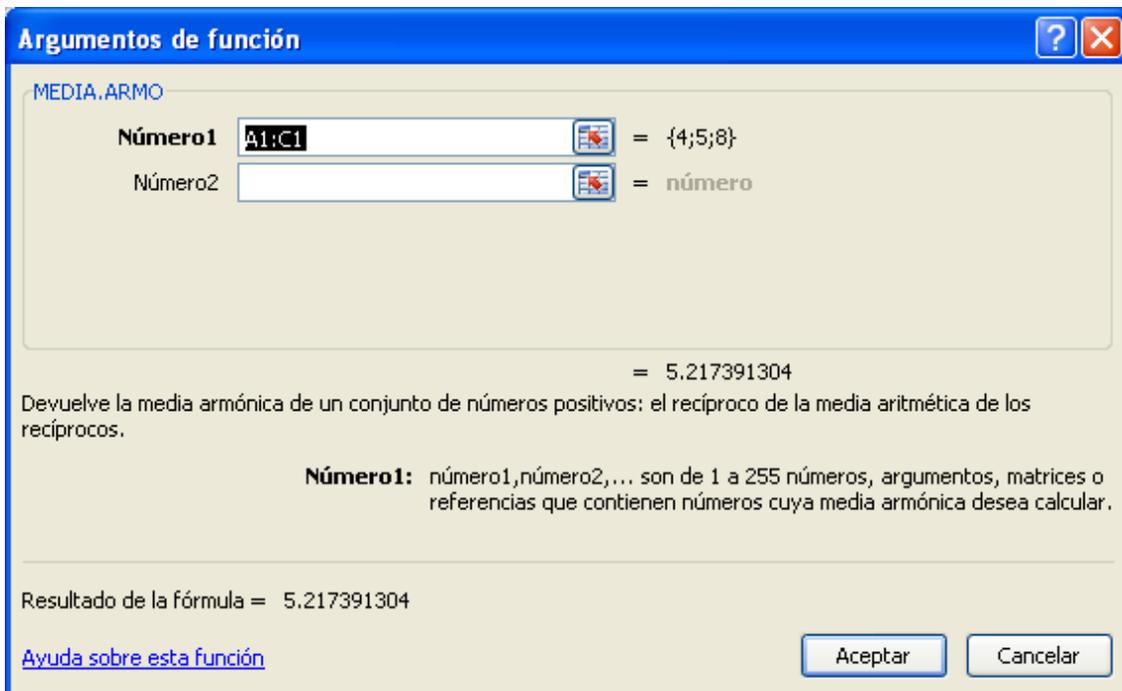
Paso 1. Copia la serie de datos a una hoja de Excel



The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 8 |
| 2 | | | |

Paso 2. En una celda vacía, por ejemplo E1, inserta la función **MEDIA.ARMO** y especifica el rango de las celdas que contienen los datos en la caja de texto correspondiente a "Número1".



Pulsa el botón “Aceptar” y te aparecerá el resultado en forma de número fraccionario.

Ejemplo 2.

Un obrero puede pintar una casa en 6 días y otro puede pintarla en 8 días. Hallar el rendimiento promedio que se tendría que tardar en pintar la misma casa cualquier obrero, tomando como base el desempeño de estos dos.

$$Ma = \frac{2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{0.2916} = 6.85$$

Ejemplo 3.

Supóngase que una familia realiza un viaje en automóvil a un ciudad y cubre los primeros 100 km a 60 km/h, los siguientes 100 km a 70 km/h y los últimos 100 km a 80 km/h. Calcular, en esas condiciones, la velocidad media realizada.

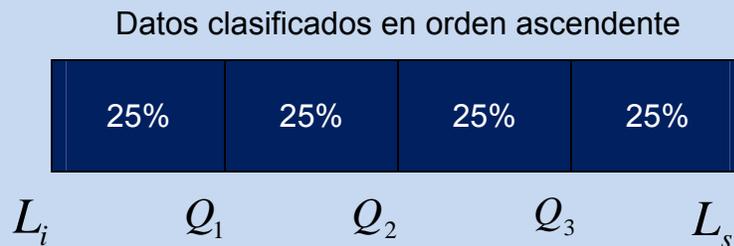
$$Ma = \frac{3}{\frac{1}{60} + \frac{1}{70} + \frac{1}{80}} = \frac{3}{0.0434} = 69.041$$

Medidas de posición.

Las medidas de posición se utilizan para describir la posición que un dato específico posee en relación con el resto de los datos cuando están en orden por categorías. Cuartiles, deciles y percentiles son las medidas de posición más populares.

Cuartiles.

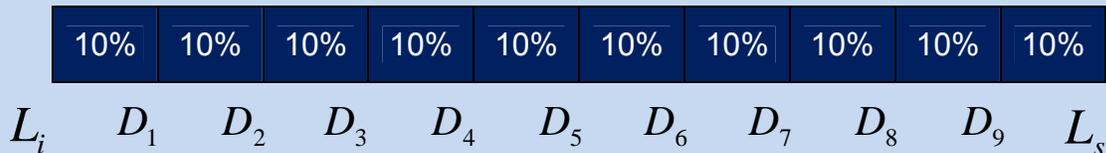
Son valores de la variable que dividen los datos ordenados en cuartos; cada conjunto de datos tiene tres cuartiles. El *primer cuartil*, Q_1 , es un número tal que a lo sumo 25% de los datos son menores en valor que Q_1 y a lo sumo 75% son mayores. El segundo cuartil es la mediana (50%). El *tercer cuartil*, Q_3 , es un número tal que a lo sumo 75% de los datos son valores en valor que Q_3 y a lo sumo 25% son mayores.



Deciles.

Son valores de la variable que dividen los datos ordenados en diez partes iguales (9 divisiones).

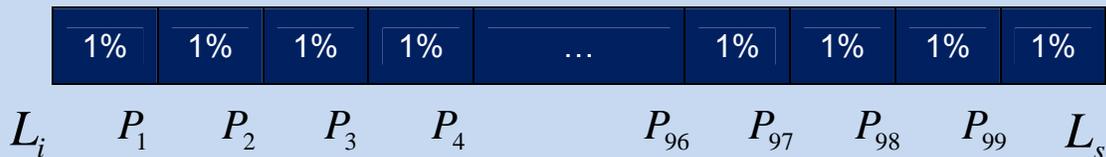
Datos clasificados en orden ascendente



Percentiles.

Son los valores de la variable que dividen un conjunto de datos clasificados en 100 subconjuntos iguales; cada conjunto de datos tiene 99 percentiles. El k -ésimo percentil, P_k , es un valor que a lo sumo $k\%$ de los datos son menores en valor que P_k y a lo sumo $(100 - k)\%$ de los datos son mayores.

Datos clasificados en orden ascendente



Ejemplo 1

Para la siguiente colección de datos 1, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 9, 9, 19, 20 y 20 calcule:

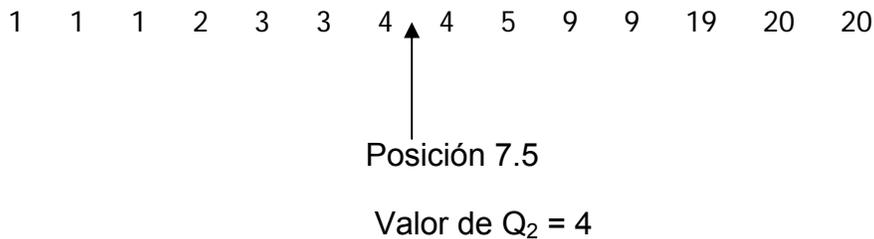
- a) El primero y el tercer cuartil. Ubíquelos en un diagrama de caja.
- b) El octavo decil.
- c) El percentil 42, el 50 y el 87.

Solución

Cuartiles

Para el cálculo de los cuartiles debemos determinar la posición del dato que ocupa cada cuartil con la condición de que dividan a la colección de datos en cuatro partes iguales. De esta forma encontramos con que el segundo cuartil coincide con la mediana dado que divide a la colección en dos partes iguales, por lo que su

posición es $\frac{n+1}{2} = \frac{14+1}{2} = 7.5$.

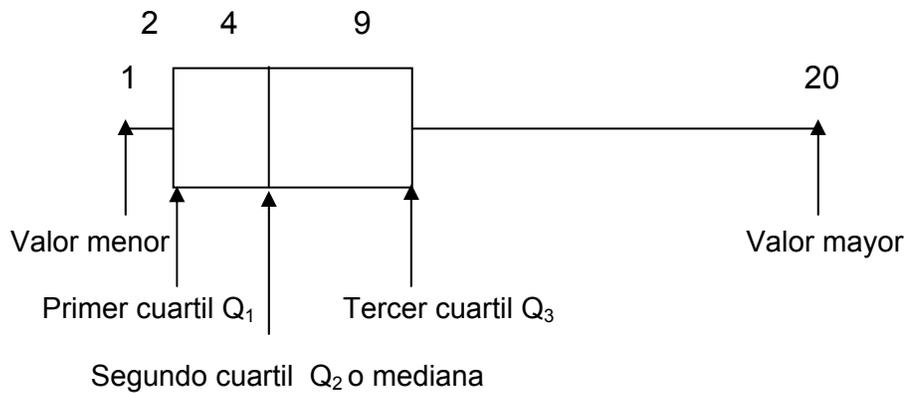


Esto significa que la mediana es 4. Ahora el primer cuartil es la mediana de los datos que se encuentran a la izquierda de la mediana o segundo cuartil. Así, la

posición del primer cuartil es $\frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$. Esto significa que el primer cuartil

es el valor que está en la cuarta posición, es decir, **2**. Del mismo modo, el tercer cuartil es el valor que está en la cuarta posición desde el otro extremo, es decir, **9**.

Como vemos en el diagrama de caja siguiente, al ubicar la caja entre el primero y el tercer cuartil, se puede tener una idea de la distribución de los datos, es decir, se observa que hay una mayor concentración de datos hacia los valores pequeños puesto que la caja está desplazada a la izquierda.



Deciles

En cuanto al octavo decil, bastaría con ubicar la posición en que se encuentra a través de la fórmula $8 \frac{n}{10} = 8 \frac{14}{10} = 11.2$. Esto quiere decir que entre el dato que se encuentra en la posición 11 y la 12 está el octavo decil, pero más cerca de la 11 que de la 12 puesto que la posición es la 11.2. El resultado sería **9.2** porque entre el 9 y el 19 (que son los datos cuyas posiciones son 11 y 12 respectivamente) hay exactamente 10 unidades.

Percentiles

Con relación a los percentiles pedidos, tendríamos que ubicar las posiciones correspondientes como lo hicimos con los deciles. Para la posición del percentil 42 tendríamos la siguiente fórmula $42 \frac{n}{100} = 42 \frac{14}{100} = 5.88$. Esto quiere decir que el percentil 42 se encuentra entre los datos que ocupan la posición 5 y la 6. Afortunadamente en este caso ambos datos son 3 por lo que el percentil 42 es **3**. Para el percentil 50 basta con buscar la mediana puesto que coinciden. La mediana de esta colección es **4**. Por último, el percentil 87 se buscaría con el mismo procedimiento usado anteriormente, es decir, $87 \frac{n}{100} = 87 \frac{14}{100} = 12.18$ nos daría la posición del percentil buscado que en este caso es entre las posiciones 12 y la 13, más cerca de la primera. El resultado sería que el percentil 87 toma el valor de **19.18**.

Ejemplo 2.

Ejemplo: En la siguiente serie simple, que corresponde a la edad de los trabajadores de una micro empresa: 33, 26, 66, 45, 28, 59, 33, 36, 26, 45, 62, 45, ordenar los datos y calcular los cuartiles uno, dos y tres, los deciles uno, tres, cinco y nueve; y, los percentiles nueve, diez y cincuenta.

Solución.

Ordenamos los datos de mayor a menor:

26, 26, 28, 33, 33, 36, 45, 45, 45, 59, 62, 66

Cuartiles

Hallamos la ubicación del cuartil uno con la fórmula:

$$Q_1 = \frac{n+1}{4}$$
$$Q_1 = \frac{12+1}{4} = 3.25$$

Calculamos el valor del cuartil uno:

El primer cuartil se localiza entre el tercer y cuarto valor y se encuentra a 0.25 de la distancia entre ellos. Como el tercer valor es 28, y el cuarto es 33, obtenemos la distancia entre ellos restando el valor mayor del menor; es decir, $33 - 28 = 5$. Para ubicar el primer cuartil, hay que moverse a 0.25 de distancia entre el tercer valor y el cuarto, por lo que $0.25(5) = 1.25$. Para terminar el procedimiento, sumamos 1.25 al primer valor, y resulta así que el primer cuartil es:

$$Q_1 = 28 + 1.25 = 29.25$$

Hallamos la ubicación del cuartil dos con la fórmula:

$$Q_2 = \frac{n+1}{2}$$

$$Q_2 = \frac{12 + 1}{2} = 6.5$$

Calculamos el valor del cuartil dos:

$$Q_2 = \frac{45 + 36}{2} = 40.5$$

Hallamos la ubicación del cuartil tres con la fórmula:

$$Q_3 = \frac{3(n + 1)}{4}$$

$$Q_3 = \frac{3(12 + 1)}{4} = 9.75$$

Calculamos el valor del cuartil tres:

El tercer cuartil se localiza entre el noveno y décimo valor y se encuentra a 0.75 de la distancia entre ellos. Como el noveno valor es 45, y el décimo es 59, obtenemos la distancia entre ellos restando el valor mayor del menor; es decir, $59 - 45 = 14$. Para ubicar el tercer cuartil, hay que moverse a 0.75 de distancia entre el noveno valor y el décimo, por lo que $0.75(14) = 10.5$. Para terminar el procedimiento, sumamos 10.5 al primer valor, y resulta así que el tercer cuartil es:

$$Q_3 = 45 + 10.5 = 55.5$$

Deciles

Hallamos la ubicación del decil uno con la fórmula:

$$D_1 = \frac{n + 1}{10}$$

$$D_1 = \frac{12 + 1}{10} = 1.3$$

Calculamos el valor del decil uno:

El primer decil se localiza entre el primero y segundo valor y se encuentra a 0.3 de la distancia entre ellos. Como el primer valor es 26, y el segundo es 26, se asume que el valor del primer decil es de 26.

$$D_1 = 26$$

Hallamos la ubicación del decil tres con la fórmula:

$$D_3 = \frac{3(n+1)}{10}$$
$$D_3 = \frac{3(12+1)}{10} = 3.9$$

Calculamos el valor del decil tres:

El tercer decil se localiza entre el tercer y cuarto valor y se encuentra a 0.9 de la distancia entre ellos. Como el tercer valor es 28, y el cuarto es 33, obtenemos la distancia entre ellos restando el valor mayor del menor; es decir, $33 - 28 = 5$. Para ubicar el tercer decil, hay que moverse a 0.9 de distancia entre el tercer valor y el cuarto, por lo que $0.9(5) = 4.5$. Para terminar el procedimiento, sumamos 4.5 al primer valor, y resulta así que el tercer decil es:

$$D_3 = 28 + 4.5 = 32.5$$

Hallamos la ubicación del decil cinco con la fórmula:

$$D_5 = \frac{n+1}{2}$$
$$D_5 = \frac{12+1}{2} = 6.5$$

Calculamos el valor del decil cinco:

$$D_5 = \frac{45 + 36}{2} = 40.5$$

Hallamos la ubicación del decil nueve con la fórmula:

$$D_9 = \frac{9(n+1)}{10}$$
$$D_9 = \frac{9(12+1)}{10} = 11.7$$

Calculamos el valor del decil nueve:

El noveno decil se localiza entre el onceavo y doceavo valor y se encuentra a 0.7 de la distancia entre ellos. Como el onceavo valor es 62, y el doceavo es 66, obtenemos la distancia entre ellos restando el valor mayor del menor; es decir, $66 - 62 = 4$. Para ubicar el noveno decil, hay que moverse a 0.7 de distancia entre el onceavo valor y el doceavo, por lo que $0.7(4) = 2.8$. Para terminar el procedimiento, sumamos 2.8 al primer valor, y resulta así que el noveno decil es:

$$D_9 = 62 + 2.8 = 64.8$$

Percentiles

Hallamos la ubicación del percentil diez con la fórmula:

$$P_{10} = \frac{n+1}{10}$$
$$P_{10} = \frac{12+1}{10} = 1.3$$

Calculamos el valor del percentil diez:

$$\text{Por lo tanto el valor de } P_{10} = 26$$

Hallamos la ubicación del percentil cincuenta con la fórmula:

$$P_{50} = \frac{n+1}{2}$$
$$P_{50} = \frac{12+1}{2} = 6.5$$

Calculamos el valor del percentil cincuenta:

$$\text{Por lo tanto el valor de } P_{50} = 40.5$$

Hallamos la ubicación del percentil noventa con la fórmula:

$$P_{90} = \frac{9(n+1)}{10}$$
$$P_{90} = \frac{9(12+1)}{10} = 11.7$$

Calculamos el valor del percentil noventa:

$$P_{90} = 62 + 2.8 = 64.8$$

Fuentes de información

Webster, Allen L., (2000)., *Estadística aplicada a los negocios y la economía.*, Editorial McGraw-Hill., Colombia.

[http://ares.unimet.edu.ve/matematica/bpmm30/Estad%20Id%20&%20Ed%20\(BPM M23\)/ERU1C3.DOC](http://ares.unimet.edu.ve/matematica/bpmm30/Estad%20Id%20&%20Ed%20(BPM%20M23)/ERU1C3.DOC).



Lecturas

L

| | |
|---------------------------------|---|
| Colaborador: | M. en C. Mario Arturo Vilchis Rodríguez |
| Nombre de la Asignatura: | Estadística aplicada a la Mercadotecnia |
| Área del Conocimiento: | Pendiente |
| Programa Académico | Bachillerato Virtual |