UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

ESCUELA SUPERIOR DE TIZAYUCA

TRANSFORMADA DE LAPALACE Y Z

INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS DE AUTOMATIZACIÓN

Contenido del programa

- **Unidad I** Conocer los fundamentos de los números complejos para diseño de sistemas de control mediante ejercicios para los casos más comunes de aplicación.
- 1.- Números complejos
- 1.1. Funciones holomorfa
- 1.2. Series de potencias
- 1.3. Integración sobre caminos. El teorema de Caushy Goursat
- 1.4. Índice y teorema general de Caushy
- 1.5. Cálculo de residuos y aplicaciones

Contenido del programa

- **Unidad II** Utilizar el método de Laplace para el análisis de funciones en el plano complejo mediante el desarrollo de modelos aplicados a sistemas de control continuo.
- 2. Transformada de Laplace
- 2.1. Solución de ecuaciones diferenciales
- 2.2. Aplicaciones a la Ingeniería
- 2.3. Funciones de transferencia
- 2.4. Respuesta de frecuencia
- 2.5. Software para matemáticas

Contenido del programa

- **Unidad III** Utilizar el método de la transformada Z para el análisis y desarrollo de sistemas de control digital.
- 3. Transformada Z
- 3.1. Definición de la transformada Z unilateral
- 3.2. Propiedades de la causal
- 3.3. Relación entre la transformada Z unilateral y la transformada de Laplace
- 3.4. Aproximación de integrales con sumas finitas
- 3.5. Integrales de Riemann
- 3.6. Software para matemáticas

Valores de la UAEH

- CAPÍTULO II

- De sus principios fundamentales
- *Artículo 5.* Son normas permanentes en el quehacer de la Universidad **los principios de libertad de cátedra, investigación y libre manifestación de las ideas**, en un marco permanente de respeto a la pluralidad de pensamiento y a la tolerancia que deben guardarse entre sí los miembros de la comunidad universitaria, la tutela de los derechos humanos, la observancia de la equidad de género y el fomento de los valores de **respeto, honestidad, transparencia, lealtad y responsabilidad**, con especial atención a la prevención de adicciones y de distribución y consumo de estupefacientes.

Unidad I

- **Objetivo.** Conocer los fundamentos de los números complejos para diseño de sistemas de control mediante ejercicios para los casos más comunes de aplicación.

- **Competencias**: *Comunicación, Formación, Pensamiento Crítico, Creatividad, Liderazgo Colaborativo, Ciudadanía, Uso de la Tecnología.*

¿Cómo surgen los números complejos

A finales del siglo XV

El matemático Francés Nicolás Chuquet, consideró las raíces de números negativos

(Tal solución es imposible)

……

Leibniz (1646-1716) factorizó la expresión $x^4 + a^4$ afirmando que los números imaginarios son una serie de seres anfibios

Abraham de Moivre (1667-1754) planteó algoritmos y procesos para calcular potencias y raíces de los números complejos

……..

Leonhard Euler usó el símbolo para la unidad imaginaria y estableció que $i^2 = -1$

El frances Jean D'Alembert (1717-1783), demostró que el conjunto de los números complejos es cerrado para las operaciones algebraicas.

Jean Robert Argand y Carl Friedrich Gauss consideró a los números complejos en la forma

$$a + bi$$

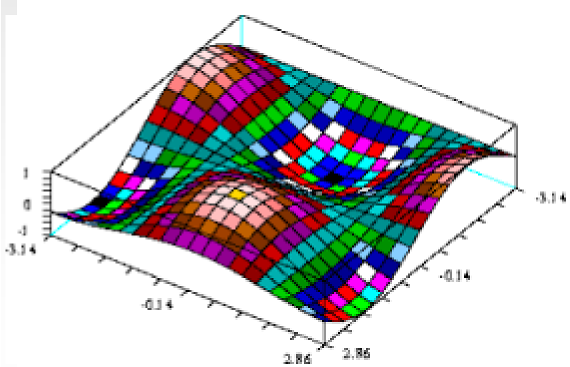
Augustin Louis Cauchy (1789-1857) desarrollo la teoría de las funciones de variable compleja

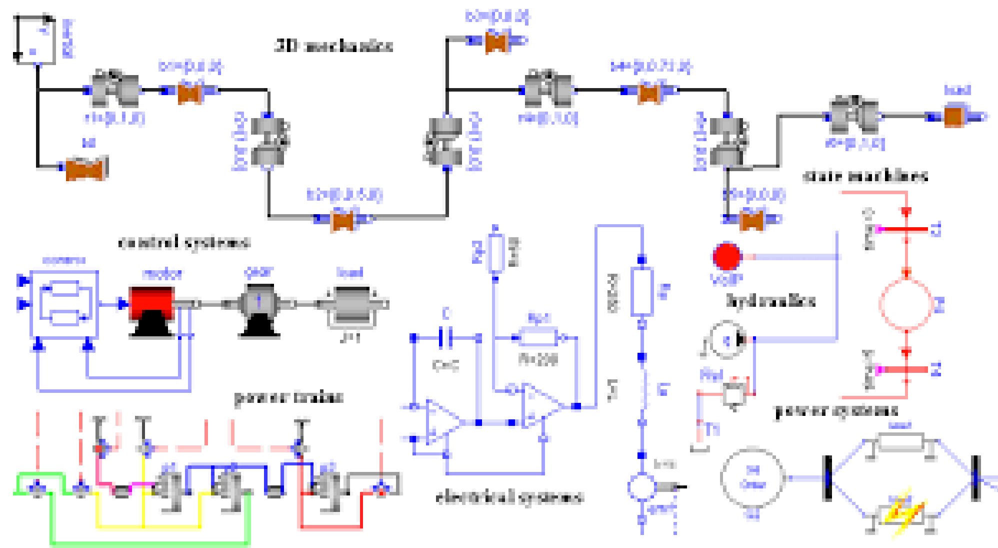
……

William Hamilton (1805-1865) interpretó la acción de números complejo.

¿En que se aplican los números complejos?

- Los números complejos se han convertido en una ayuda para solucionar problemas de navegación, electrónica, astronomía, y en la solución de **sistemas dinámicos.**





Números complejos

◆ **Conociendo a los complejos**:

La variable **compleja** es una rama central de las matemáticas teóricas y aplicadas. Es también fuente de dos ramas muy importantes en la actualidad: la geometría no euclidiana y los **sistemas dinámicos**

❑ **Definición:**

El conjunto de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, consiste en todos los números de la forma $a + ib$, en donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Es importante destacar que existe una correspondencia biunívoca de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$mediante la asociación

$$x + iy \rightarrow (x, y)$$

Operaciones fundamentales de los complejos

La suma

- $(2+3i)+(4-5i)=(2+4)+(3-5)i=6-2i$

La diferencia

- $(2+3i)-(4-5i)=(2-4)+(3+5)i=$
- $=-2+8i$

El producto

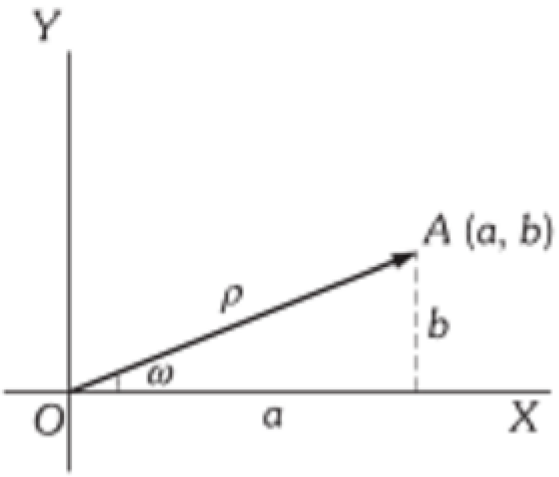
- $(2+3i)*(4-5i)$=23+2i

El cociente

- $\frac{(2+3i)}{(4-5i)}*\frac{(4+5i)}{(4+5i)}=\frac{-7+22i}{41}$

Módulo y Argumento de números complejos

Módulo y argumento del número complejo a +bi es de la siguiente forma:



- Módulo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Argumento $\tan\omega = \dfrac{b}{a}$
- El argumento es igual a ω

Forma trigonométrica y exponencial de los números complejos

- **Forma trigonométrica o factorial**

$$a + bi = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$$

- **Forma exponencial**

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega) = \rho e^{\omega i}$$

Me preparo

Efectúense las operaciones indicadas en los problemas 1 a 24.

1: $(3 + 2i) + (5 + 3i)$

2: $(4 + 3i) + (2 + 5i)$

3: $(2 - 3i) + (1 + 2i)$

4: $(5 - 6i) + (4 + 2i)$

5: $(4 + i) - (1 + 3i)$

6: $(6 + 3i) - (2 - 4i)$

7: $(3 + 5i) - (5 - 3i)$

8: $(7 - 4i) - (-6 + 4i)$

9: $(3 + 7i) + (5 + 3i) - (-2 + 9i)$

10: $(5 - i) - (8 - 2i) + (3 - i)$

11: $(-4 - 5i) + (11 - 7i) - (8 + 6i)$

12: $(9 + 7i) - (-9 + 7i) + (-18 + i)$

13: $(3 + 4i)(5 + 2i)$

14: $(2 + 5i)(3 + 7i)$

15: $(2 - 3i)(3 + 5i)$

16: $(-7 + 4i)(3 - 4i)$

17: $(4 - 3i)^2$

18: $(5 + 2i)^2$

19: $(7 + 5i)^2$

20: $(6 + 5i)^2$

21: $(1 + 2i)(2 - i)(1 + i)$

22: $(3 - 2i)(2 + i)(1 - i)$

23: $(3 + 4i)(4 + 3i)(2 - 5i)$

24: $(3 + 5i)(5 + 3i)(2 - i)$

Me preparo

Encuéntrense los conjugados de los números complejos de los problemas 25 a 36.

25: $3 + 4i$ 26: $6 - i$ 27: $-2 + 3i$ 28: $4 + 3i$

29: $2 - 5i$ 30: 7 31: $4i$ 32: $3 - i$

33: $(1 + i)(-2 - i)$ 34: $(4 + 3i)(5 + 7i)$

35: $-3i(2 + 5i)$ 36: $2i(-3 + 8i)$

Redúzcanse a la forma a + bi las expresiones de los problemas 37 a 48.

37: $\dfrac{3 - i}{3 + 2i}$ 38: $\dfrac{2 + 5i}{3 + 2i}$ 39: $\dfrac{1 + 4i}{3 + i}$

40: $\dfrac{2 - 3i}{1 + 2i}$ 41: $\dfrac{(3 + 4i)(1 - 2i)}{1 + i}$ 42: $\dfrac{(2 + i)(1 - i)}{4 - 3i}$

43: $\dfrac{(2 + 3i)(3 + 2i)}{4 - 3i}$ 44: $\dfrac{(5 - i)(1 - 5i)}{3 + 2i}$ 45: $(2 - 3i)\overline{(3 + 4i)}$

46: $\overline{(3 + i)}(2 - 5i)$ 47: $\overline{(4 + i)}\,\overline{(-1 + 3i)}$ 48: $\overline{(7 - 2i)}\,\overline{(2 - 7i)}$

Me preparo

Represéntense gráficamente los números complejos de los problemas 1 a 16, así como sus conjugados.

1: $3-2i$	2: $4+i$	3: $5+3i$	4: 7
5: $2+5i$	6: $-2+3i$	7: $2i$	8: $-2-i$
9: $-4-3i$	10: $5-2i$	11: -5	12: $3-3i$
13: $-5i$	14: $5-12i$	15: $15+8i$	16: $-7-24i$

Exprésense en forma polar los números complejos de los problemas 33 a 52.

33: $1-i$	34: $-1+i$	35: $-1-i$
36: $1+i$	37: $1+i\sqrt{3}$	38: $1-i\sqrt{3}$
39: $-1+i\sqrt{3}$	40: $-1-i\sqrt{3}$	41: $-\sqrt{3}+i$
42: $-\sqrt{3}-i$	43: $\sqrt{3}+i$	44: $\sqrt{3}-i$
45: $-3-4i$	46: $5+12i$	47: $8-15i$
48: $-7+24i$	49: $3i$	50: -2
51: $-i$	52: 3	

Investigación y Exposición

El alumno investigará el ***TEOREMA DE MOIVRE.***

- El alumno investigará las ***Funciones elementales.***

- El alumno investigará como obtener las ***Raíces de Números Complejos***

Realizará una presentación en Power Point por equipos de **3 integrantes y las expondrán al grupo**.

Teorema de Moivre

Si multiplicamos n números complejos, a partir de la expresión del producto de dos números complejos obtenemos que el producto de n números complejos equivale a un complejo cuyo módulo es el producto de los n módulos y el argumento, la suma de los n argumentos. De esta forma:

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n \left\{ \cos\left(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \cdots + \phi_n\right) + j \sin\left(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \cdots + \phi_n\right) \right\}$$

Tomando todos los complejos iguales

$$z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = z$$

la expresión anterior queda como:

$$z^n = r^n \{\cos(n\phi) + j\sin(n\phi)\}$$

Por otro lado, la n-ésima potencia del número complejo z también puede expresarse, lógicamente como:

$$z^n = \{r(\cos(\phi) + j\sin(\phi))\}^n$$

φ y igualando las dos últimas expresiones llegamos al Teorema de Moivre

$$z^n = \{r(\cos(\phi) + j\sin(\phi))\}^n = r^n(\cos(n\phi) + j\sin(n\phi))$$

Ejemplo

Suponga que: $z_1 = r_1(cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$ y $z_2 = r_2(cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$. Demuestre que:

a) $z_1 z_2 = r_1 r_2\{(\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2))\}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$

Raíces de números complejos

$\sqrt[n]{r_\alpha}$ La raíz enésima de un número complejo es otro número complejo tal que:

Su módulo es la n raíz enésima del módulo: $$\boxed{r' = \sqrt[n]{r}}$$

Su argumento es: $$\boxed{\alpha' = \frac{\alpha + 2\pi K}{n}}$$ donde k= 0,1,2, …. (n-1)

$$\boxed{\sqrt[n]{r_\alpha} = \sqrt[n]{\frac{r_\alpha + 2\pi K}{n}}}$$

Funciones complejas y mapeos Funciones Transformacionales

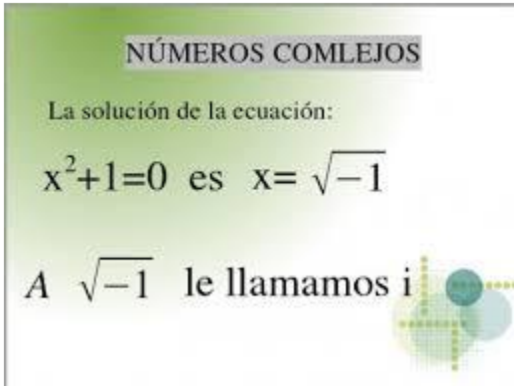
Encuentre la imagen en el plano w de la recta y = 2x+4 en el plano z, z= x+jy, bajo el mapeo w=2z+6

$$w = u + jv = 2(x + jy) + 6$$

$$u + jv = (2x + 6) + j2y$$

Separando las partes real e imaginaria

$$u = 2x + 6 \qquad v = 2y$$



Funciones Transformacionales

$u = 2x + 6 \qquad v = 2y$

Despejando x e y de las ecuaciones se tiene:

$x = \frac{1}{2}(u - 6) \quad y = \frac{1}{2}v$

Reescribiendo la imagen se tiene que:

$y = 2x + 4$

Sustituyendo las variables x e y en la imagen

$\frac{1}{2}v = 2(\frac{1}{2}(u - 6))+4$

Multiplicando todo por 2 se tiene que v es:

$v = 2u - 4$

2.47. Sea $w = f(z) = z(2 - z)$. Encuentre los valores de w correspondientes a *a)* $z = 1 + i$, *b)* $z = 2 - 2i$ y represente gráficamente, en los planos w y z, dichos valores.

2.48. Sea $w = f(z) = (1 + z)/(1 - z)$. Encuentre: *a)* $f(i)$ y *b)* $f(1 - i)$ y represéntelos en forma gráfica.

2.49. Suponga que $f(z) = (2z + 1)/(3z - 2)$, $z \neq 2/3$. Encuentre *a)* $f(1/z)$ y *b)* $f\{f(z)\}$.

2.50. *a)* Si $w = f(z) = (z + 2)/(2z - 1)$, encuentre $f(0)$, $f(i)$, $f(1 + i)$. *b)* Encuentre los valores de z tales que $f(z) = i$, $f(z) = 2 - 3i$. *c)* Muestre que z es una función unívoca de w. *d)* Encuentre los valores de z tales que $f(z) = z$ y explique, en forma geométrica, por qué a estos valores se les llama *puntos fijos* o *invariantes* de la transformación.

2.51. Un cuadrado S en el plano z tiene sus vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$. Determine la región del plano w a la que se lleva S mediante las transformaciones *a)* $w = z^2$ y *b)* $w = 1/(z + 1)$.

2.52. Analice el problema 2.51 si los vértices del cuadrado son $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

2.53. En los incisos siguientes separe la parte real de la imaginaria, es decir, encuentre $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tales que $f(z) = u + iv$:
a) $f(z) = 2z^2 - 3iz$, *b)* $f(z) = z + 1/z$, *c)* $f(z) = (1 - z)/(1 + z)$ y *d)* $f(z) = z^{1/2}$.

2.54. Suponga que $f(z) = 1/z = u + iv$. Trace varios miembros de las familias $u(x, y) = \alpha$ y $v(x, y) = \beta$, donde α y β son constantes, y muestre que son familias de circunferencias.

Función holomorfa

Definiciones:

- f(z) es holomorfa en un conjunto abierto G si es derivable en todos los puntos de G.
- f(z) es holomorfa en un conjunto A si es holomorfa en un abierto G que contiene a A
- Una función f(z)es holomorfa en un punto z_o si es derivable en todos los puntos de un entorno de z_o, es decir, si existe un disco de centro z_o y radio $B_r(z_o)$, $r>0$, tal que f(z) es derivable en todos sus puntos.

Ejemplo

La *función* $f(z) = z^2$ *es holomorfa en*

$$z = 1, \qquad y \qquad f'(z) = 2$$

Comprobar si es holomorfa con las condiciones especificadas

$$\lim_{z \to 1} \frac{f(z) - f(1)}{z - 1}$$

$$\lim_{z \to 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \lim_{z \to 1} (z + 1) = 2$$

Series de potencias

SERIES DE POTENCIA

$$S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

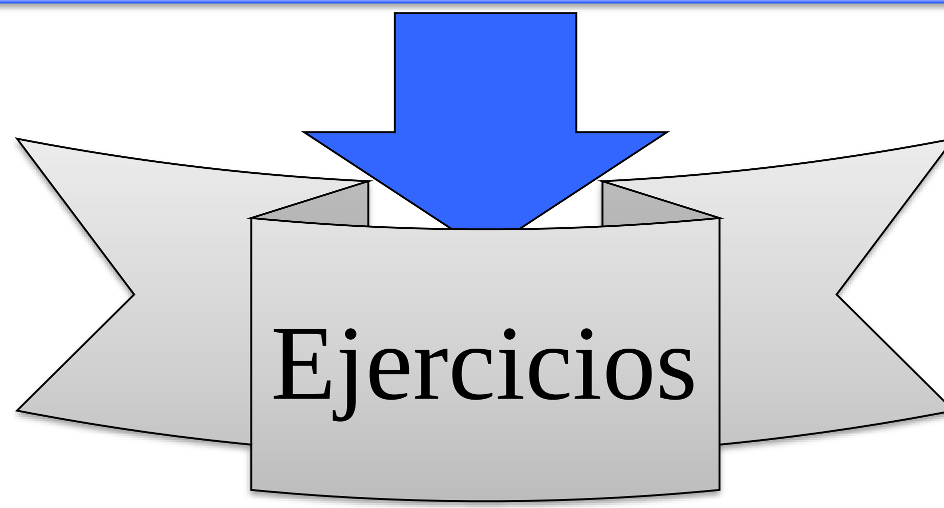
Convergencia de una serie de potencia

Investigación

Valor de la investigación 20%

La maestra Cristi desea saber si hay algún otro método de Convergencia para las series, por lo que deberás consultar en algunos libros.

El alumno investigará series de: Maclauri, Taylor, Laurent, Serie de Frobenius, se explicarán en el salón de clases por equipo.



Ejercicios

EJEMPLO 1

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

EJEMPLO 2

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Ejercicios

Ejemplo 3

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{z}{1+z}$$

Ejemplo 4

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{1}{4-2z}$$

Integración de Contornos

Consideremos la integral definida

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

De la función f(z) de una variable compleja z, en donde z_1 y z_2 son un par de números complejos.

Donde una integral de línea en el plano (x,y), de las variables reales *x* e *y*, es una integral de la forma.

$$\int_c [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$$

$$\int_c f(z)dz = \int_c [u(x,y) + jv(x,y)](dx + jdy)$$

$$\int_c f(z)dz = \int_c [u(x,y)dx$$

Ambas integrales del lado derecho son integrales de línea reales de la forma $\int_c [P(x,y)dx + Q(x,y)dy]$ y por tanto, pueden ser evaluadas usando los métodos desarrollados para tales integrales

Evalúe la integral de contorno $\int_c z^2 dz$ a lo largo de la trayectoria C de -1+j a 5+3j y formada por dos segmentos de recta, el primero de -1+j a 5+j y el segundo de 5+j a 5+3j

Solución

$$z^2 = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$$

$$I = \int_C z^2 \mathrm{d}z = \int_C [(x^2 - y^2)\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y] + \mathrm{j}\int_C [2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\mathrm{d}y]$$

Ejemplo

A lo largo de AB, $y = 1$ y $dy = 0$, así que

$$I_{AB} = \int_{-1}^{5} (x^2 - 1)\,dx + j\int_{-1}^{5} 2x\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{5} + j\left[x^2\right]_{-1}^{5} = 36 + j24$$

A lo largo de BD, $x = 5$ y $dx = 0$, así que

$$I_{BD} = \int_1^3 -10y\,dy + j\int_1^3 (25 - y^2)\,dy$$

$$= [-5y^2]_1^3 + j[25y - \tfrac{1}{3}y^3]_1^3$$

$$= -40 + j\,\tfrac{124}{3}$$

$$\int_C z^2\,dz = I_{AB} + I_{BD} = (36 + j24) + (-40 + j\tfrac{124}{3}) = -4 + j\tfrac{196}{3}$$

Investigación y exposición

1. Investigar el tema de Teorema de Green
2. Teorema de Cauchy para integrales de contorno cerrado

Ejercicios

Evalúe $\int_C (z^2 + 3z)$ a lo largo de los siguientes contornos C en el plano complejo z:

(a) la recta que une $2 + j0$ con $0 + j2$;
(b) la recta que une $2 + j0$ con $2 + j2$ y después con $0 + j2$;
(c) el círculo $|z| = 2$ para $2 + j0$ con $0 + j2$ en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

Evalúe $\oint_C (5z^4 - z^3 + 2)dz$ alrededor de los siguientes contornos cerrados C en el plano complejo z:

(a) el círculo $|z| = 1$;
(b) el cuadrado con vértices en $0 + j0$, $1 + j0$, $1 + j1$ y $0 + j1$;
(c) la curva que consiste de las parábolas $y = x^2$ de $0 + j0$ a $1 + j1$ y $y^2 = x$ de $1 + j$ a $0 + j0$.

Polos y Ceros de la función

La singularidad de una función compleja es un punto en el plano Z donde f(z) no es analítica.

$$f(z) = \frac{a_n}{(z - z_0)}$$

Z= Z_0 Llamado polo

a_n se obtienen los ceros de la función

Polos y Ceros de la función

Ejemplo

$$f(z) = \frac{z-1}{(z+2)(z-3)^2}$$

Tiene un cero en z=1, un polo simple en z=-2 y un polo de orden dos en z=3

Ejercicios

Encuentre las singularidades (polos) y ceros de las siguientes funciones

(a) $$\frac{1}{z^4 - z^2(1+j) + j}$$

(b) $$\frac{z-1}{z^4 - z^2(1+j) + j}$$

(c) $$\frac{\operatorname{sen}(z-1)}{z^4 - z^2(1+j) + j}$$

(d) $$\frac{1}{[z^4 - z^2(1+j) + j]^3}$$

Encuentre las singularidades (polos) y ceros de las siguientes funciones complejas.

(a) $\dfrac{\cos z}{z^2}$ (b) $\dfrac{1}{(z+j)^2(z-j)}$ (c) $\dfrac{z}{z^4-1}$

(d) $\coth z$ (e) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{z^2+\pi^2}$ (f) $e^{z/(1-z)}$

(g) $\dfrac{z-1}{z^2+1}$ (h) $\dfrac{z+j}{(z+2)^3(z-3)}$

(i) $\dfrac{1}{z^2(z^2-4z+5)}$

Ejercicios

Residuos

Residuo en a polo simple

$Z_0 = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)] = a_{-1}$

Ejemplo

$$f(z) = \frac{2z}{(z^2+1)(2z-1)}$$

Solución

$$\begin{array}{l}\text{residuo}\\ \text{en } z=j\end{array} = \lim_{z\to j} (z-j)\frac{2z}{(z-j)(z+j)(2z-1)}$$

$$= \frac{2j}{2j(2j-1)} = -\frac{1+2j}{5}$$

$$\begin{array}{l}\text{residuo}\\ \text{en } z=-j\end{array} = \lim_{z\to -j} (z+j)\frac{2z}{(z-j)(z+j)(2z-1)}$$

$$= \frac{-2j}{-2j(-2j-1)} = -\frac{1-2j}{5}$$

$$\begin{array}{l}\text{residuo}\\ \text{en } z=\frac{1}{2}\end{array} = \lim_{z\to \frac{1}{2}} \left(z-\tfrac{1}{2}\right)\frac{2\ \ z}{(z-j)(z+j)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-j\right)\left(\frac{1}{2}+j\right)} = \frac{2}{5}(2) \Rightarrow \frac{4}{5}$$

Residuo en polo de orden m.

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}$$

Ejemplo

$$f(z)=\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)}$$

$$\text{residuo en } z = 2j = \lim_{z \to 2j} (z-2j)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)}$$

$$= \frac{-4-4j}{(2j+1)^2(4j)} = \frac{1}{25}(7+j)$$

$$\text{residuo en } z = -2j = \lim_{z \to -2j} (z+2j)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2j)(z+2j)}$$

$$= \frac{-4+4j}{(-2j+1)^2(-4j)} = \frac{1}{25}(7-j)$$

$$\begin{matrix}\text{residuo}\\ \text{en } z=-1\end{matrix} = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right]$$

$$= \lim_{z\to -1}\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = \frac{(5)(-4)-(3)(-2)}{25} = -\frac{14}{25}$$

Determine los residuos de las siguientes funciones racionales en cada polo en el plano finito z:

(a) $\dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$

(b) $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$

(c) $\dfrac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)}$

(d) $\dfrac{z^3-z^2+z-1}{z^3+4z}$

(e) $\dfrac{z^6+4z^4+z^3+1}{(z-1)^5}$

(f) $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

Ejercicios

Bibliografía
(números complejos)

1. Camargo L. et al. (2005). Alfa 9 con estándares. Grupo editorial Norma.
2. Klein P. (1986). Algebra. Ed. Reverte
3. Kurmyshew, E. (2003). Fundamentos de métodos matemáticos para física e ingeniería. Ed. Limusa
4. Tebar E. (2005). Problemas de Cálculo Infinitesimal. Editorial Tebar

UNIDAD II

TRANSFORMADA
DE
LAPLACE

TRANSFORMADA DE "LAPLACE"

Fórmula

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Ejemplo

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \int_0^\infty \{e^{-3t}\}\{e^{-st}\}dt = -\frac{e^{-(s+3)t}}{s+3}$$

Evaluando límites

$$= \frac{1}{s+3} \qquad s > -3$$

Ejercicios

19. $f(t) = (t+1)^3$

★ 20. $f(t) = (2t-1)^3$

21. $f(t) = 1 + e^{4t}$

22. $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

23. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

24. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

25. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$

26. $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$

27. $f(t) = \operatorname{senh} kt$

28. $f(t) = \cosh kt$

29. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$

30. $f(t) = e^{-t} \cosh t$

31. $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$

★ 32. $f(t) = \cos^2 t$

Ejercicios

1. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 4, & 0 < t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$

★ 4. $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

5. $f(t) = e^{t+7}$

6. $f(t) = e^{-2t-5}$

7. $f(t) = te^{4t}$

8. $f(t) = t^2e^{3t}$

9. $f(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$

10. $f(t) = e^t \cos t$

11. $f(t) = t \cos t$

★ 12. $f(t) = t \operatorname{sen} t$

Transformada de Laplace Inversa

f(t)	F(s)
Impulso unitario $\delta(t)$	1
Escalón unitario $u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{s^n}$
$e^{-a \cdot t}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$\dfrac{1}{\lvert a-b \rvert}(e^{-a\cdot t} - e^{-b\cdot t})$	$\dfrac{1}{(s+a).(s+b)}$
$\dfrac{e^{-a\cdot t}}{(b-a)(a-c)} + \dfrac{e^{-b\cdot t}}{(a-b)(c-b)} + \dfrac{e^{-c\cdot t}}{(a-c)(b-c)}$	$\dfrac{1}{(s+a).(s+b).(s+c)}$
$\cos(\omega t+\theta)$	$\dfrac{s.\cos\theta - \omega.\mathrm{sen}\,\theta}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sen}(\omega t+\theta)$	$\dfrac{s.\mathrm{sen}\,\theta + \omega.\cos\theta}{s^2+\omega^2}$

$\mathrm{senh}\, ax$	$\dfrac{a}{s^2-a^2} \quad (s > \lvert a \rvert)$
$\cosh ax$	$\dfrac{s}{s^2-a^2} \quad (s > \lvert a \rvert)$
$x\, \mathrm{sen}\, ax$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$x \cos ax$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$x^n e^{ax}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s > a)$
$e^{bx}\, \mathrm{sen}\, ax$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2} \quad (s > b)$
$e^{bx} \cos ax$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2} \quad (s > b)$

Tabla de Transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. $t^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3. $t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
4. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5. $\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
6. $\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
7. $\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
8. $\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
9. $e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
10. $f(t-a)\,\mathscr{U}(t-a),\ a > 0$	$e^{-as}F(s)$
11. $t^n f(t),\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
12. $f^{(n)}(t),\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
13. $\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$	$F(s)G(s)$
14. $\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
15. $t^n e^{at},\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$f(t)$	$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$
16. e^{at} sen kt	$\dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}$
17. e^{at} cos kt	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$
18. t sen kt	$\dfrac{2ks}{(s^2 + k^2)^2}$
19. t cos kt	$\dfrac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2}$
20. sen $kt - kt$ cos kt	$\dfrac{2k^3}{(s^2 + k^2)^2}$
21. sen $kt + kt$ cos kt	$\dfrac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2}$
22. senh kt − sen kt	$\dfrac{2k^3}{s^4 - k^4}$
23. cosh kt − cos kt	$\dfrac{2k^2 s}{s^4 - k^4}$
24. $1 -$ cos kt	$\dfrac{k^2}{s(s^2 + k^2)}$
25. kt − sen kt	$\dfrac{k^3}{s^2(s^2 + k^2)}$
26. $\dfrac{a \text{ sen } bt - b \text{ sen } at}{ab(a^2 - b^2)}$	$\dfrac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$
27. $\dfrac{\cos bt - \cos at}{a^2 - b^2}$	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$

Ejemplo

Verificar el siguiente ejercicio

Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$

Por fracciones parciales..... $\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}=\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$

$A=\frac{1}{15}$ $\qquad$ $B=\frac{-1}{3}$ $\qquad$ $C=\frac{1}{10}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{15}}{s-1}-\frac{\frac{1}{3}}{s+2}+\frac{\frac{1}{10}}{s+4}\right\}$$

$$f(t)=\frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}$$

Me preparo

En los Problemas 41-64 utilice el Teorema 7.3 para determinar la transformada inversa dada.

41. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}$

42. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\}$

43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

★**44.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+2)^2}{s^3}\right\}$

45. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s-2}\right\}$

46. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4}{s}+\dfrac{6}{s^5}-\dfrac{1}{s+8}\right\}$

47. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{4s+1}\right\}$

★**48.** $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{5s-2}\right\}$

49. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s}{4s^2+1}\right\}$

50. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{4s^2+1}\right\}$

51. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-16}\right\}$

52. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{10s}{s^2-25}\right\}$

53. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

54. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2+2}\right\}$

55. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+3s}\right\}$

56. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2-4s}\right\}$

57. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

58. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+s-20}\right\}$

Me preparo

59. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\}$

*60. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}\right\}$

61. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}$

62. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

63. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$

*64. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4-9}\right\}$

Ecuaciones Diferenciales Aplicando Transformada de Laplace

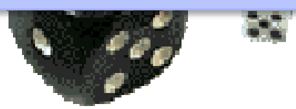
$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$$

Condiciones iniciales $y(0) = 2,\quad y'(0) = 6$

1.- $$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\}$$

2.- Teorema

$$a_n[s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots .. - y^{n-1}(0)] + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots . - y^{n-2}(0)] + \cdots + a_0Y(s) = G(s)$$



$$[S^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 6[sY(s) - y(0)] + 9[Y(s)] = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$Aplicando\ Condiciones\ iniciales \quad y(0) = 2 \ \ y'(0) = 6$

$$(s^2 - 6s + 9\ )Y(s) = 2s - 6 + \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$(s-3)^2Y(s) = 2(s-3) + \frac{2}{(s-3)^3}$$

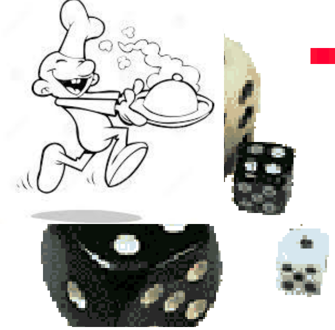
$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{(s-3)^5}\right\}$$

Teorema de Traslación

$$\frac{4!}{(s-3)^5}$$

$$\boxed{y(t) = 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4e^{3t}}$$



Me preparo

1. $$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + 2x = t, \quad \text{con} \quad x(0) = x'(0) = 0$$

2. $$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \operatorname{sen} 3t, \quad \text{con} \quad x(0) = x'(0) = 0$$

3. $$\frac{d^4x}{dt^4} - 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = \operatorname{sen} t, \quad \text{con} \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$$

1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 0, \text{ con } x(0) = 1.$

2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0, \text{ con } y(0) = 2 \;\&\; y'(0) = -1.$

3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0, \text{ con } x(0) = 1 \;\&\; x'(0) = -2.$

4. $\dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\dfrac{dz}{dt} + 5z = 0, \text{ con } z(0) = -4 \;\&\; z'(0) = 3.$

5. $\dfrac{d^3x}{dt^3} + x = 0, \text{ con } x(0) = 1, x'(0) = 3 \;\&\; x''(0) = 8.$

6. $\dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0, \text{ con } y(0) = 2, y'(0) = 0 \;\&\; y''(0) = 1.$

Me preparo

$$\begin{cases} 3\dfrac{dx}{dt} + 2x + \dfrac{dy}{dt} = 1 \\ \dfrac{dx}{dt} + 4\dfrac{dy}{dt} + 3y = 0 \end{cases}, \text{ con } \quad x(0) = y(0) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y + \operatorname{sen} t \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y + 1 \end{cases}, \text{ con } \quad x(0) = 0 \;\&\; y(0) = 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + y = 1 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x = 0 \end{cases}, \text{ con } \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$$

Tarea

Investigar aplicaciones a la ingeniería: circuitos eléctricos y vibraciones mecánicas

Circuitos eléctricos

El flujo de corriente está relacionado con la carga, mediante la relación

$$i = \frac{dq}{dt}$$

- La caída de voltaje a través de la resistencia es igual a

$$Ri = R\frac{dq}{dt}$$

- La caída de voltaje a través del capacitor es igual a

$$\frac{1}{c}\int idt = \frac{q}{c}$$

Circuitos eléctricos

❖ La caída de voltaje a través de una bobina es igual a

$$L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

Circuito RC

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c}Q = E$$

Circuitos eléctricos

Circuito RL

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} = \mathrm{E}$$

Circuito RLC

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathrm{E}$$

❖La caída de voltaje a través de la resistencia es igual a

$$Ri = R\frac{dq}{dt}$$

Para la transformación a Laplace

Se tiene que: RI=RI(s)

- La caída de voltaje a través del capacitor es igual a

$$\frac{1}{c}\int idt = \frac{q}{c}$$

PARA LA TRANSFORMACIÓN A LAPLACE SE TIENE QUE:

$$\frac{1}{c}\int Idt = \frac{1}{cs}$$

❖La caída de voltaje a través de una bobina es igual a

$$L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$$

para la transformación en

Laplace se tiene que $\boldsymbol{L\frac{dI}{dt} = Ls}$

$$Integración \quad \int = \frac{1}{s}$$

$$derivación \quad d = s$$

Circuitos eléctricos

Se conecta un resistor $R = 100\ \Omega$ con un capacitor $C = 10^{-3}$ F a una fuente de voltaje directa $V = 50$ V formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor tiene carga $Q_0 = 0$, determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo t.

La ED que modela a la carga $Q(t)$ es

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V \;\Rightarrow\; 100\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{10^{-3}} = 50$$

$$100\frac{dQ}{dt} + 1\,000\,Q = 50$$

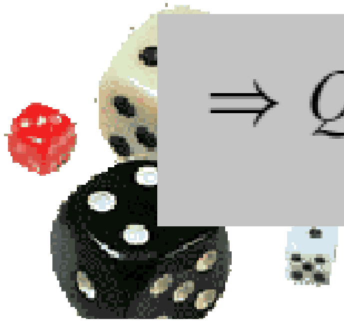
Dividiendo todo por 100

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + 10Q = \frac{1}{2}$$

Resolver por factor de integración

$$e^{10t}\left[Q'(t) + 10Q(t)\right] = \frac{1}{2}e^{10t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{10t}Q(t)\right] = \frac{1}{2}e^{10t}$$

$$\Rightarrow e^{10t}Q(t) = \frac{1}{2}\int e^{10t}\,dt = \frac{1}{20}e^{10t} + K \Rightarrow$$



$$\Rightarrow Q(t) = \frac{1}{20} + Ke^{-10t}$$

Ecuación para calcular la constante

Utizando la condición inicial $Q(0) = 0$ se tiene:

$$Q(0) = \frac{1}{20} + K = 0 \;\Rightarrow\; K = -\frac{1}{20}$$

Sustituyendo el valor de la constante en la primera ecuación Se tiene que:

$$Q(t) = \frac{1}{20}\left(1 - e^{-10t}\right)$$

$$Q(t) = \frac{1}{20}\left(1 - e^{-10t}\right)$$

Derivando la ecuación para obtener el valor de la corriente

$$I(t) = \frac{1}{2}e^{-10t} \text{ A.}$$

Circuitos eléctricos

Un circuito eléctrico consta de una resistencia en Ohms, en serie con un condensador de capacitancia en Faradios, un generador y un interruptor. Si en el tiempo t=0 se cierra el interruptor y si la carga inicial en el capacitor es cero. Determine la carga en el condensador en cualquier tiempo . Suponga que R, C y E son constantes

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{c}Q=E$$

Circuitos RLC

Se conecta en serie un resistor de 12 Ω, un capacitor de 0.1 F, un inductor de 2 H y una fuente de voltaje $V = 20$ V, formando un circuito RLC. Si inicialmente se encuentra descargado el capacitor y no circula corriente por el circuito, determinar en todo tiempo posterior expresiones para la carga y la corriente.

Circuito RLC

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = \mathrm{E}$$

Sustituyendo valores en la ecuación:

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 12\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{0.1} = 20.$$

Despejando el primer término se tiene que hay que dividir toda la ecuación entre "2"

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 6\frac{dQ}{dt} + 5Q = 10$$

SE PUEDE RESOLVER POR ED LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES O VARIACIÓN DE PARÁMETROS

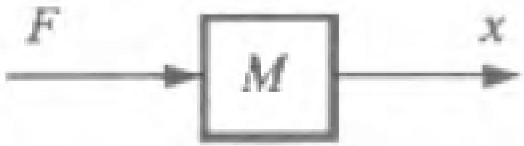
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 6\frac{dQ}{dt} + 5Q = 10$$

RESOLVIENDO LA ECUACIÓN DIFERENCIAL POR EL MÉTODO DE LAPLACE, SE TIENE QUE:

$$\mathcal{L}\{q''\} + 6\mathcal{L}\{q'\} + 5\mathcal{L}\{q\} = 10$$

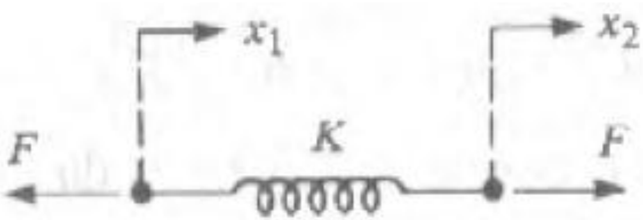
CONDICIONES INICIALES DEACUERO AL PROBLEMA PLANTEADO EN CADA CASO.

VIBRACIONES MECÁNICAS



(a) Masa

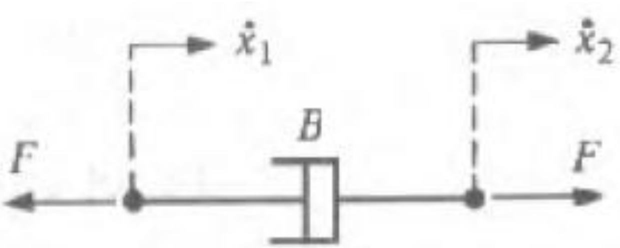
$$F = M\frac{d^2x}{dt^2} \qquad Ley\ de\ Newton$$



(b) Resorte

$$F = K(x_2 - x_1) \qquad Ley\ de\ Hooke$$

Donde K es la rigidez del resorte



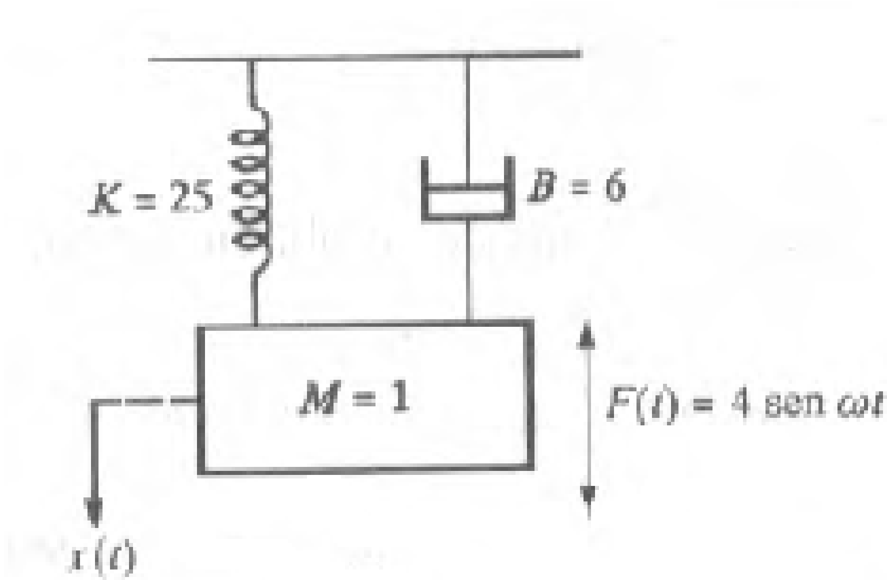
(c) Amortiguador

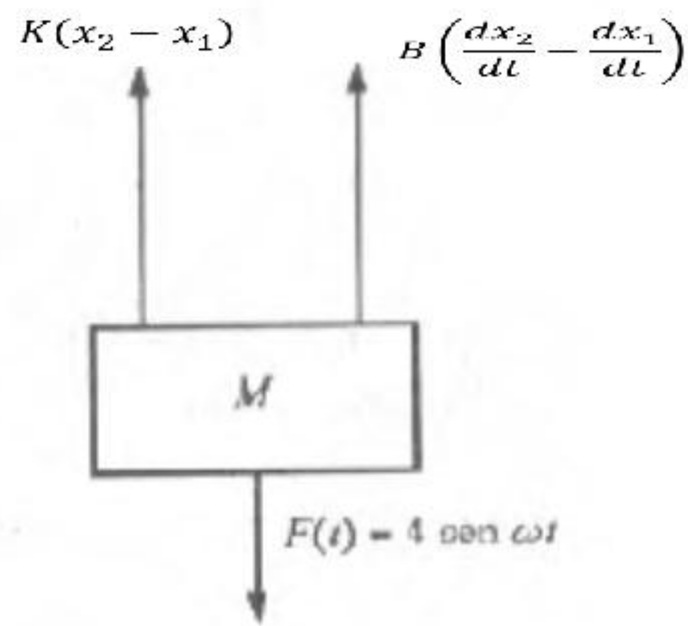
$$F = B\left(\frac{dx_2}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)$$

Donde: B es el coeficiente de amortiguamiento

Ejemplo

La masa del sistema masa-resorte-amortiguador está sometida a una fuerza periódica externa $f(t) = 4\, sen\omega t$ aplicada en el tiempo t=0. Determine el desplazamiento resultante x(t) de la masa en el tiempo t suponiendo que x(0)= x'(0)=0 a) cuando ω=2. y b) ω=5





$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) - F_1(t) - F_2(t)$$

$$F(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + kx(t)$$

Sustituyendo valores se tiene que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 25x(t) = 4\,sen\,\omega t$$

Resolviendo por Laplace

$$X(s) = \frac{4\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+6s+25)}$$

$$X(s) = \frac{4\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 6s + 25)}$$

$$X(s) = \frac{4(2)}{(s^2 + 2^2)(s^2 + 6s + 25)}$$

Resolviendo por fracciones parciales

$$x(t) = \frac{4}{195}(7\, sen\; 2t - 4\cos 2t) + \frac{2}{195}e^{-3t}(8\cos 4t - sen 4t)$$

El alumno resolverá el inciso (b) cuando ω=5

Ejercicios de Aplicación

Movimiento armónico simple

Ley de Hooke.

Supongamos que un cuerpo de masa (m) está sujeto al extremo de un resorte flexible suspendido de un soporte rígido, el resorte ejerce una fuerza de restitución F opuesta a la dirección del alargamiento y proporcional a su magnitud **F=ks**

2ª Ley de Newton

Después que una masa m se sujeta a un resorte, aquélla lo alargará en una magnitud s y alcanzará la posición de equilibrio en la cual su peso W es equilibrado por la fuerza de restitución ks

W= mg

Por lo que se tiene igualando la ley de Hook y la 2ª Ley de Newton

Mg=ks

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

Ejemplo

Un cuerpo que pesa 2lb estira un resorte 6 plg. Dicho cuerpo se suelta en t=0 desde un punto que está 8 plg bajo la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia arriba de 4/3 pies/s. determine la función x(t) que describe el movimiento libre resultante.

Convertir plg. a pies

6 plg = 0.5 ft
8 plg = 2/3 ft

Convertir peso a masa

m= W/g

$$m = \frac{2lb}{32.2\ ft/seg^2} = \frac{1}{16}\ slug$$

Ley de Hooke

F=ks
2lb=k(0.5ft)
K= 4lb/ft

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+64x=0$$

Resolver la ED por el método de Coeficientes Constantes

Aplicando condiciones iniciales

$$x(0)=\frac{2}{3};\quad \frac{dx}{dt}(0)=-\frac{4}{3}$$

$$x(t)=c_1cos8t+c_2sen\ 8t$$

$$x\left(\frac{2}{3}\right)=c_1\overset{1}{cos8(0)}+c_2\overset{0}{sen\ 8(0)}$$

$$c_1=\frac{2}{3}$$

$$x(t)=\frac{2}{3}cos8t+c_2sen\ 8t$$

Derivando la ecuación

$$x(t) = \frac{2}{3}cos8t + c_2 sen\ 8t$$

$$x'(t) = -\frac{16}{3}sen8t + 8c_2 cos\ 8t$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -\frac{4}{3}$$

$$x'(0) = -\frac{16}{3}sen8t + 8c_2 cos\ 8t$$

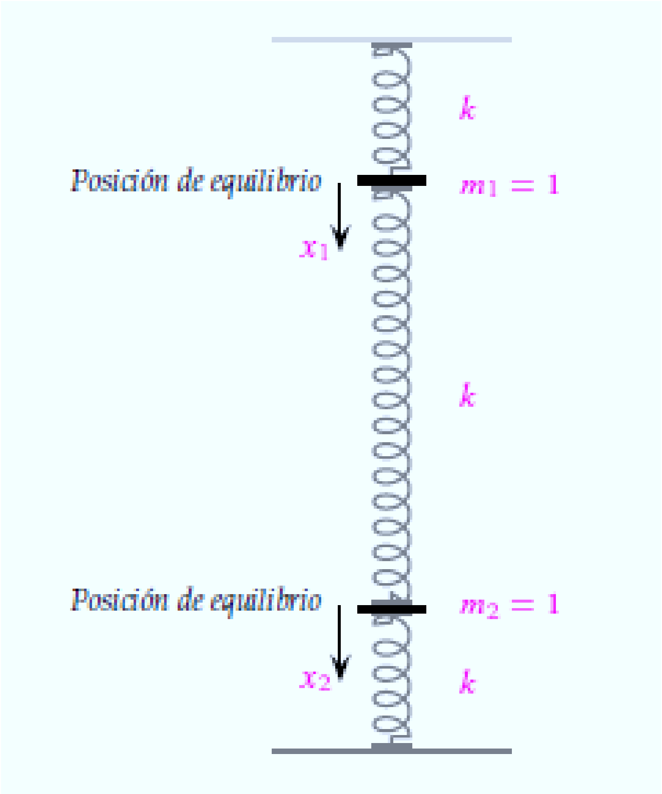
$$-\frac{4}{3} = -\frac{16}{3}\overset{0}{sen8(0)} + 8c_2 \overset{1}{cos\ 8(0)}$$

$$-\frac{4}{3} = 8c_2$$

$$c_2 = -\frac{1}{6}$$

$$x(t) = \frac{2}{3}cos8t - \frac{1}{6}sen\ 8t$$

Ejemplo 6.6.3 *Dos masas iguales de 1 kg se encuentran vinculadas mediante 3 resortes de masas despreciables y constantes de restitución k, como se muestra en la figura siguiente. El sistema está dispuesto verticalmente y las masas están desprovistas de rozamiento así como de fuerzas de excitación. Añadimos ahora la información desde la cual se rompe el equilibrio $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$, $x_1'(0) = 3$, $x_2'(0) = -3$. Determinar la posición de cada masa en cualquier instante, si $k = 3$ N/m.*



Enumeramos los resortes de arriba hacia abajo con los números 1, 2 y 3. Cuando el sistema está en movimiento, el resorte 2 está sujeto a elongación y compresión, por consiguiente su elongación neta es $x_2 - x_1$. Por lo tanto, de la ley de Hooke, deducimos que los resortes 1 y 2 ejercen fuerzas $-kx_1$ y $k(x_2 - x_1)$ respectivamente sobre la masa m_1. De esta manera, si no hay fuerzas externas ni fuerzas de amortiguamiento, entonces la fuerza neta sobre la masa m_1 es $-kx_1 + k(x_2 - x_1)$. Ahora por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$m_1 x_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1).$$

De manera similar, la fuerza neta ejercida en la masa m_2 se origina por la elongación y compresión de los resortes 2 y 3. De manera más concreta, las fuerzas ejercidas sobre la masa 2 son, por el resorte 3, $-kx_2$; y por el resorte 2, $-k(x_2 - x_1)$. Luego, por la segunda ley de Newton:

$$m_2 x_2'' = -kx_2 - k(x_2 - x_1).$$

Si ahora usamos los valores de las masas $m_1 = m_2 = 1$ y el valor de $k = 3$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que resolveremos utilizando TL.

$$\begin{cases} x_1'' = -3x_1 + 3(x_2 - x_1) \\ \\ x_2'' = -3x_2 - 3(x_2 - x_1) \end{cases}, \text{ con } x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_1'(0) = 3 \;\&\; x_2'(0) = -3.$$

Me preparo

Un paracaidista cae partiendo del reposo. El peso combinado de él y su paracaídas es W. El paracaídas ejerce una fuerza en ambos (por resistencia del aire) que es directamente proporcional a la velocidad durante la caída, esto es $F_R \propto v$. El paracaidista cae verticalmente, y se requiere hallar su posición en cualquier momento.

a. Si se supone que el paracaídas está abierto desde el momento inicial.

b. Si se supone que el paracaídas se abre 10 s después de iniciada la caída.

Una droga entra y sale de un órgano de volumen V_0 cm^3 a una tasa de β cm^3/s, donde V_0, y β son constantes. Supongamos que, en el tiempo $t = 0$, la concentración de la droga es 0 y que, al administrar la droga, dicha concentración aumenta linealmente hasta un máximo de k en el tiempo $t = t_0$, en el cual el proceso se detiene. Determinar la concentración de la droga en el órgano en todo instante t y su máximo valor.

Una masa que pesa 32 lb se encuentra sujeta al extremo de un resorte ligero que se estira 1 pie cuando se le aplica una fuerza de 4 lb. Si la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio cuando $t = 0$ y si, en ese instante, se aplica una fuerza de excitación $f(t) = \cos 2t$ que cesa abruptamente en $t = 2\pi$ s, determinar la función de posición de la masa en cualquier instante, si se permite a la masa continuar su movimiento sin impedimentos.

Un circuito RLC, con $R = 110\,\Omega$, $L = 1$ H y $C = 0.001$ F tiene conectada una batería que proporciona 90 V. Suponga que en $t = 0$ no hay corriente en el circuito ni carga en el condensador y que, en el mismo instante, se cierra el interruptor por 1 s. Si al tiempo $t = 1$ se abre el interruptor, y así se conserva, encuentre la corriente resultante en el circuito.

Funciones de Transferencia

ACTIVIDAD A DESARROLLAR POR EL ALUMNO:

- ✓ EL ALUMNO INVESTIGARÁ LOS TEMAS DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.
- ✓ EXPLICAR POR EQUIPO EN EL SALÓN DE CLASES EL TEMA DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.
- ✓ REALIZAR UN EJEMPLO PRÁCTICO PARA EXPLICAR EL TEMA DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.
- ✓ INVESTIGAR EL TEMA DE ALGEBRA CON DIAGRAMAS DE BLOQUES

UNIDAD 3

Transformada “Z”

Transformada “Z”

La Transformada Z de una sucesión:

$$\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = X_{(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$$

Siempre que exista la sumatoria y donde z es una variable compleja todavía indefinida

Transformada “Z”

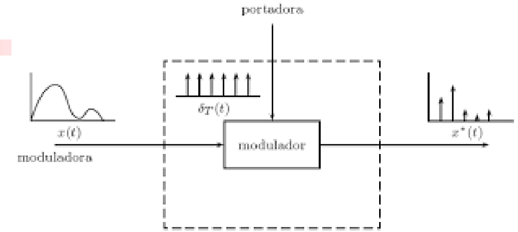
Para sucesiones que son Causales

$$X_k = 0 \quad (k < 0)$$

La transformada Z dada se reduce a:

$$\{x_k\}_0^{\infty} = X_{(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X_k}{Z^k}$$

Ejemplo



Determine la transformada Z de la sucesión:

$$\{X_k\} = \{2^k\} \qquad (k \geq 0)$$

$$Z\{2^k\} = X_{(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{Z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{Z}\right)^k$$

Ejemplo

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{Z}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{z}\right)^{k}}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

Resolviendo el quebrado se tiene que:

$$Z\left(2^{k}\right) = \frac{z}{z-2} \qquad (|z| > 2)$$

Investigar:

Región de Convergencia

Ejercicios

1 Calcule la transformada z de las siguientes sucesiones, estableciendo, en cada caso, la región de convergencia.

(a) $\{(\frac{1}{4})^k\}$ (b) $\{3^k\}$ (c) $\{(-2)^k\}$

(d) $\{-(2^k)\}$ (e) $\{3k\}$

Me preparo

$$\mathscr{Z}\{\operatorname{sen} k\omega T\} = \frac{z \operatorname{sen} \omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$$

donde ω y T son constantes.

4 Utilice la primera propiedad de traslación para calcular la transformada z de la sucesión $\{y_k\}$, con

$$y_k = \begin{cases} 0 & (k < 3) \\ x_k & (k \geqslant 3) \end{cases}$$

donde $\{x_k\}$ es causal y $x_k = (\frac{1}{2})^k$. Confirme su resultado por evaluación directa de $\mathscr{Z}\{y_k\}$ usando la definición de la transformada z.

5 Determine la transformada z de las sucesiones

(a) $\{(-\frac{1}{3})^k\}$ (b) $\{\cos k\pi\}$

6 Determine $\mathscr{Z}\{(\frac{1}{2})^k\}$. Usando (3.6) obtenga la transformada z de la sucesión $\{k(\frac{1}{2})^k\}$.

Me preparo

7 Demuestre que para una constante α

(a) $\mathscr{Z}\{\operatorname{senh} k\alpha\} = \dfrac{z \operatorname{senh} \alpha}{z^2 - 2z\cosh\alpha + 1}$

(b) $\mathscr{Z}\{\cosh k\alpha\} = \dfrac{z^2 - z\cosh\alpha}{z^2 - 2z\cosh\alpha + 1}$

8 Las sucesiones son generadas por muestreo de señales causales continuas en el tiempo $u(t)$ $(t \geqslant 0)$ en T intervalos uniformes. Escriba una expresión para u_k, el término general de la sucesión, y calcule la transformada z correspondiente cuando $u(t)$ es

(a) e^{-4t} (b) $\operatorname{sen} t$ (c) $\cos 2t$

Transformada Inversa Z

Tabla Básica de Transformadas z

Secuencia en tiempo [n]	Transformada Z
• $\delta[n]$	1
• $u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
• n	$\frac{z}{(z-1)^2}$
• a^n	$\frac{z}{z-a}$
• e^{-anT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
• na^n	$\frac{z}{(z-a)^2}$
• Sen $n\omega T$	$\frac{z \,\mathrm{Sen}\omega T}{z^2 - 2z \,\mathrm{Cos}\, \omega T + 1}$
• Cos $n\omega T$	$\frac{z^2 - z\mathrm{Cos}\omega T}{Z^2 - 2Z \,\mathrm{Cos}\, \omega T + 1}$

	sucesión	transformada	región de convergencia
1.	$\delta[n]$	1	todo el plano z
2.	$\delta[n-m]$	z^{-m}	todo z salvo 0 (si $m>0$) o ∞ (si $m<0$)
3.	$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
4.	$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|<1$
5.	$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
6.	$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
13.	$\cos(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
14.	$\operatorname{sen}(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{\operatorname{sen}\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
15.	$r^n\cos(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{1-r\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\|>r$
16.	$r^n\operatorname{sen}(\omega_0 n)\,u[n]$	$\dfrac{r\operatorname{sen}\omega_0 z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\|>r$
17.	$\begin{cases} a^n, & 0\le n\le N-1 \\ 0, & \text{caso contrario}\end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>0$

Ejemplo

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] = \{2^k\}$$

• a^n	$\dfrac{z}{z-a}$
• e^{-anT}	$\dfrac{z}{z-e^{-aT}}$
• na^n	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
• Sen $n\omega T$	$\dfrac{z \text{ Sen}\omega T}{z^2 - 2z \text{ Cos } \omega T + 1}$
• Cos $n\omega T$	$\dfrac{z^2 - z\text{Cos}\omega T}{Z^2 - 2Z \text{ Cos } \omega T + 1}$

Ejemplo

Resolver.

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-1)(z-2)}\right]$$

Resolver por fracciones parciales.
Como se trabajo en Laplace

Ejercicios

11 Invierta las siguientes transformadas z. En cada caso proporcione el término general de la sucesión.

(a) $\dfrac{z}{z-1}$ (b) $\dfrac{z}{z+1}$ (c) $\dfrac{z}{z-\frac{1}{2}}$

(d) $\dfrac{z}{3z+1}$ (e) $\dfrac{z}{z-\mathrm{j}}$ (f) $\dfrac{z}{z+\mathrm{j}\sqrt{2}}$

(g) $\dfrac{1}{z-1}$ (h) $\dfrac{z+2}{z+1}$

12 Resolviendo primero $Y(z)/z$ en fracciones parciales, encuentre $\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]$ cuando $Y(z)$ está dada por

(a) $\dfrac{z}{(z-1)(z+2)}$ (b) $\dfrac{z}{(2z+1)(z-3)}$

(c) $\dfrac{z^2}{(2z+1)(z-1)}$ (d) $\dfrac{2z}{2z^2+z-1}$

(e) $\dfrac{z}{z^2+1}$ [*Sugerencia:* $z^2+1=(z+\mathrm{j})(z-\mathrm{j})$]

Ejercicios

(f) $\dfrac{z}{z^2 - 2\sqrt{3}z + 4}$

(g) $\dfrac{2z^2 - 7z}{(z-1)^2(z-3)}$

(h) $\dfrac{z^2}{(z-1)^2(z^2 - z + 1)}$

13 Encuentre $\mathscr{Z}^{-1}[Y(z)]$ cuando $Y(z)$ está dada por

(a) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{z^7}$

(b) $1 + \dfrac{3}{z^2} - \dfrac{2}{z^9}$

(c) $\dfrac{3z + z^2 + 5z^5}{z^5}$

(d) $\dfrac{1+z}{z^3} + \dfrac{3z}{3z+1}$

(e) $\dfrac{2z^3 + 6z^2 + 5z + 1}{z^2(2z+1)}$

(f) $\dfrac{2z^2 - 7z + 7}{(z-1)^2(z-2)}$

(g) $\dfrac{z-3}{z^2 - 3z + 2}$

Gracias por su atención al curso