UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

ESCUELA PREPARATORIA NÚMERO CINCO

Tema: La función Derivada

Lic. Lucia Hernandez Granados

Enero – Junio 2022

Tema: 2.2 La función derivada

Resumen

En Calculo hablar de una función decimos que hay una correspondencia entre dos conjuntos cuando existen unas determinadas reglas que permiten asociar elementos del primer conjunto (conjunto inicial) con elementos del segundo conjunto (conjunto final). Una aplicación es una correspondencia que asigna a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del conjunto final. En este tema vamos a hacer un estudio preliminar de las funciones de una variable real y el importante concepto de derivada. Comenzaremos recordando las funciones básicas, para luego introducir la derivada y considerar algunas de sus aplicaciones.

- **Palabras Claves:** (Función, Grafica, Racional, Lineal, Logaritmo, Exponente)

Tema: 2.2 La función Derivada

Abstract

In Calculo talk about a function say that there is a correspondence between two sets when there are certain rules that allow you to associate elements of the first set (initial set) with elements of the second set (final set). An application is a correspondence that assigns to each element of the initial set a single element of the final set. In this topic we will make a preliminary study of the functions of a real variable and the important concept of derivative. We will start by remembering the basic functions, then introduce the derivative and consider some of its applications.

Keywords: (Function, Graphic, Rational, Linear, Logarithm, Exponent) angles, plane, line, legs, hypotenuse, functions).

Objetivo general: Comprender la razón de cambio entre dos variables relacionadas a través del concepto de límite y de derivada para el análisis gráfico y variacional de situaciones hipotéticas y reales que faciliten al estudiante la toma de decisiones en sus diferentes contextos con el apoyo de las TIC's

Bloque II: La función Derivada

Objetivo del Bloque: Desarrollar e interpretar la razón de cambio y la pendiente de la recta tangente mediante el concepto de derivada a través de distintos enfoques procedimentales para su aplicación en los diversos entornos del estudiante. .

.

Tema: 2.2 La función Derivada

2.2 Identificación de las conclusiones generales de la aplicación de la derivada (fórmulas de derivadas de funciones algebraicas).

Introducción:

El cálculo diferencial se consolidó como disciplina matemática principalmente en los siglos XVI y XVII cuando Kepler (1571- 1630), Galileo (1564-1642) y Newton (1642-1727) entre otros, intentaron describir la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, aunque ya en la antigüedad griega Arquímedes había planteado la versión geométrica de ese problema de mecánica cual es el problema de la recta tangente a una curva en un punto. Mediante el uso de razones de cambio fue posible calcular velocidades y aceleraciones y definir la recta tangente a una curva pero también resolver problemas de tipo práctico como por ejemplo, determinar cuando dos planetas estarían mas cercanos o mas lejanos entre sí.

Regla general para la derivación

Según la definición de derivada se puede ver que el procedimiento para derivar una función $y = f(x)$ comprende los siguientes pasos:

Regla general para la derivación

PRIMER PASO. Se sustituye en la función x por $x + \Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $x + \Delta y$

SEGUNDO PASO. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función)

TERCER PASO. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente)

CUARTO PASO. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada

Ejemplo 1 Hallar la derivada de la función $3x^2 + 5$

Resolución. Aplicando los pasos sucesivos de la regla general, obtenemos, después de hacer

$$y = 3x^2 + 5$$

Primer paso $y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$

$$= 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$$

Segundo paso
$$\begin{array}{l} y + \Delta y = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5 \\ \underline{y \ldots\ldots = 3x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5} \\ \ldots\ldots\Delta y = \ldots\ldots 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 \end{array}$$

Tercer paso $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3 \cdot \Delta x$

Cuarto paso. En el segundo miembro hagamos $\Delta x \to 0$. Según (A) resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

O bien $y' = \dfrac{d}{dx}\left(3x^2 + 5\right) = 6x$

EJEMPLO 1 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^2 + 2$.

Solución Así como en el cálculo de $m_{\tan}$ en la sección 2.7, el proceso de encontrar la derivada $f'(x)$ consta de cuatro pasos:

i) $f(x+h) = (x+h)^2 + 2 = x^2 + 2xh + h^2 + 2$

ii) $f(x+h) - f(x) = [x^2 + 2xh + h^2 + 2] - x^2 - 2 = h(2x+h)$

iii) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$ ← las h se cancelan

iv) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} [2x + h] = 2x.$

Por el paso *iv*) vemos que la derivada de $f(x) = x^2 + 2$ es $f'(x) = 2x$. ■

Observe que el resultado $m_{\tan} = 2$ en el ejemplo 1 de la sección 2.7 se obtiene al evaluar la derivada $f'(x) = 2x$ en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2$.

EJEMPLO 3 Una derivada

Encuentre la derivada de $f(x) = x^3$.

Solución Para calcular $f(x + h)$, usamos el teorema del binomio.

i) $f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

ii) $f(x + h) - f(x) = [x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3] - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2)$

iii) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \dfrac{h\,[3x^2 + 3xh + h^2]}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$

iv) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2.$

La derivada de $f(x) = x^3$ es $f'(x) = 3x^2$.

Para enconrar la derivada de una función se utiliza la Regla General para la Derivación que consta de cuetro pasos:

Primer Paso: Se sustituye en la función "X" por (X+Δx), y "Y" por (Y+ΔY).

Segundo paso: Se resta a la nueva función el valor de la función original, obteniendo únicamente Δy (incremento de la función).

Tercer paso: Se divide la nueva ecuación Δy (incremento de la función) entre Δx (incremento de la variable independiente).

Cuarto paso: Se calcula el límite cuando Δx (incremento de la variable independiente) tiende a cero.

La regla se puede representar a través de la siguiente ecuasión:

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(Y + \Delta Y) - f(Y)}{\Delta X}$$

Ahora se desarrolla un ejemplo con el procedimiento mostrado en el texto anterior.

Función Original

$$y = 3x^2 + 5$$

Primer Paso

$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 + 5$$

$$= 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$$

Segundo Paso

$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x.\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 5$$

$$-y \quad = 3x^2 \qquad\qquad\qquad - 5$$

$$\Delta y = \qquad 6x.\Delta \;+ 3(\Delta x)^2$$

Tercer Paso

$$\Delta y = 6x + 3\Delta x$$

$$\Delta y$$

Cuarto Paso

En el segundo miembro hagamos $\Delta x \rightarrow 0$. Y resulta

$$\frac{dy}{dx} = 6x$$

Derivadas	Derivadas de Funciones Trigonométricas	Derivadas de las Funciones Trigonométricas Inversas
$\frac{dc}{dx}=0$	$\frac{d}{dx}(Senv)=Cosv\cdot\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(arcSenv)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{dx}{dx}=1$	$\frac{d}{dx}(Cosv)=-Senv\cdot\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(arcCosv)=-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$	$\frac{d}{dx}(Tanv)=Sec^2v\cdot\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(arcTanv)=\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}(cv)=c\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(Cotv)=-Csc^2v\cdot\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(arcCotv)=-\frac{1}{1+v^2}\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}(uv)=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}(Secv)=Secv\cdot Tanv\cdot\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(arcSecv)=\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}(v^n)=nv^{n-1}\cdot\frac{dv}{dx}$ = $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(Cscv)=-Cscv\cdot Cotv\cdot\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}(arcCscv)=-\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\cdot\frac{dv}{dx}$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\cdot\frac{du}{dx}-u\cdot\frac{dv}{dx}}{v^2}$ = $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)=\frac{1}{c}\cdot\frac{du}{dx}$		
$\frac{d}{dx}(\log_a v)=\frac{\log_a e}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$ = $\frac{d}{dx}(\log_e v)=\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx}$		
$\frac{d}{dx}(a^v)=a^v\cdot\log_e a\cdot\frac{dv}{dx}$ = $\frac{d}{dx}(e^v)=e^v\cdot\frac{dv}{dx}$		

REGLAS DE DERIVACIÓN

LA DERIVADA DE CUALQUIER CONSTANTE ES IGUAL A CERO

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE POR UNA VARIABLE ES IGUAL A LA CONSTANTE POR LA DERIVADA DE LA VARIABLE

$$\frac{d}{dx}(cv) = c\,\frac{d}{dx}v$$

La Derivada de cualquier variable respecto de si misma es igual a la unidad.

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

La derivada de una suma algebraica de funciones es igual a la derivada de cada uno de los sumandos respetando sus signos.

$$\frac{d}{dx}(u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

Derivada de un producto de funciones es igual al primer factor por la derivada del segundo más el segundo factor por la derivada del primero.

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}(\mathbf{uv}) = \mathbf{u}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{v} + \mathbf{v}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{u}$$

Derivada de ¨x¨ elevada a cualquier potencia es la potencia por ¨x¨ elevada a la potencia menos uno.

$$\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$$

La derivada de una función elevada a cualquier potencia es la potencia por la función elevada a la potencia menos uno y por la derivada de la función.

$$\frac{d}{dx} v^n = n\, v^{n-1} \frac{d}{dx} v$$

La derivada de un cociente de funciones es igual a el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo entre el denominador al cuadrado.

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{v\frac{d}{dx}u - u\frac{d}{dx}v}{v^2}$$

Ejercicios Propuestos

Deriva las siguientes funciones, utilizando la regla de los 4 pasos.

1.- $y = 3x + 2$
2.- $y = x^3$
3.- $y = \frac{2x}{x-1}$
4.- $y = \frac{3}{x^2}$
5.- $f(x) = \sqrt{x-2}$
6.- $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$
7.- $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Bibliografía

Precálculo. Steward Ed. 1

Cálculo Steward ed. Mc. Graw Hill.

https://precalculo21.webcindario.com/id382.htm