Sobre la construcción de rutas potenciales de instrucción con el uso de un software dinámico

LA APLICACIÓN PERIÓDICA DE DISTINTOS PROGRAMAS DE EVALUACIÓN NACIONALES E INTERNACIONALES HA REVELADO QUE LOS ESTUDIANTES MEXICANOS DE BACHILLERATO Y PRIMARIA TIENEN UN BAJO APROVECHAMIENTO DE MATERIAS COMO MATEMÁTICAS Y CIENCIAS. PARA COMBATIR ESA TENDENCIA, EL USO DEL *SOFTWARE* DINÁMICO RESULTA IMPORTANTE: PERMITE REPRESENTAR Y EXPLORAR LOS PROBLEMAS MEDIANTE UN MÉTODO INQUISITIVO DE SOLUCIÓN, BASADO EN LA FORMULACIÓN CONSTANTE DE PREGUNTAS, EL ESTABLECIMIENTO DE CONJETURAS Y RELACIONES MATEMÁTICAS, Y LA BÚSQUEDA DE DIVERSAS FORMAS DE JUSTIFICACIÓN DE RESULTADOS.

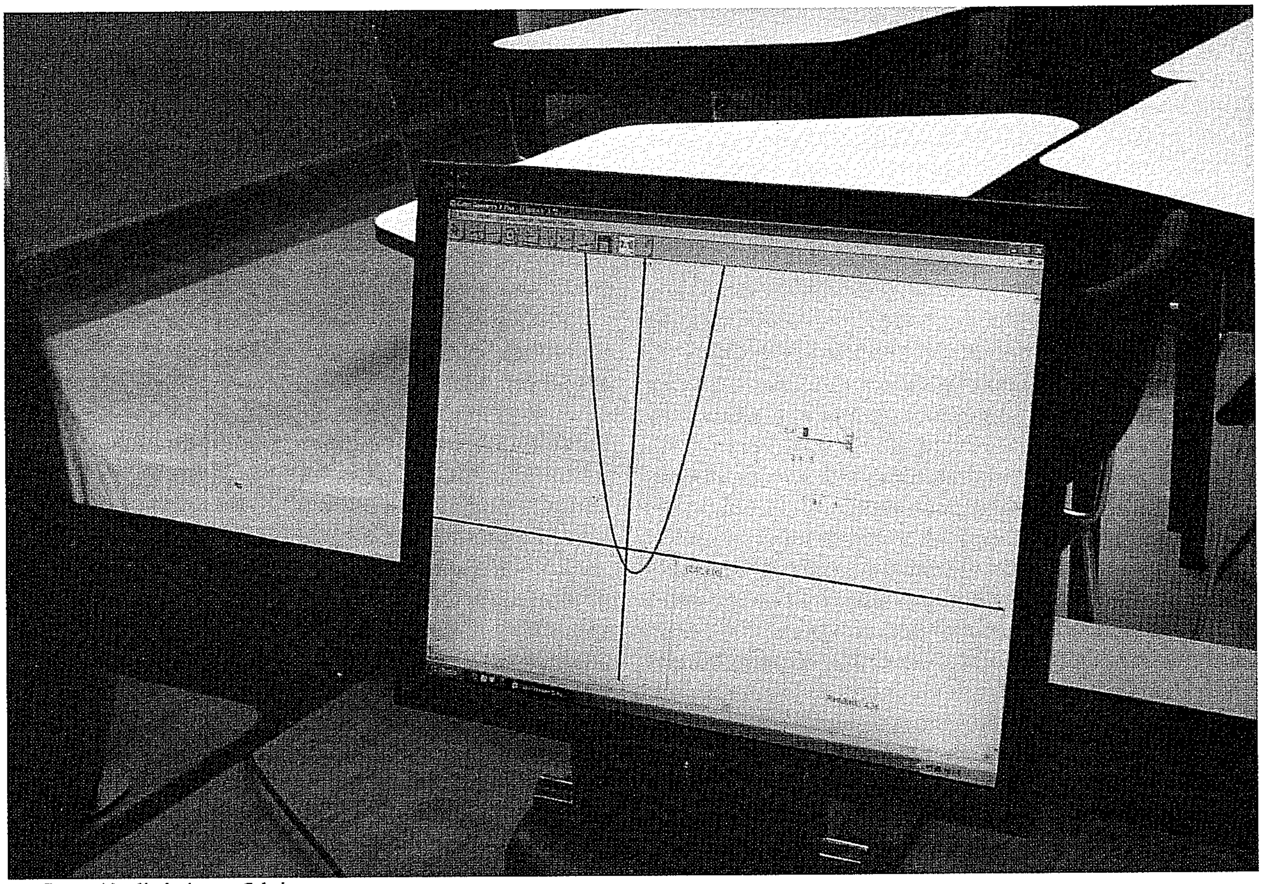
Hugo Espinosa Pérez y Aarón Reyes Rodríguez

Introducción

La evaluación del conocimiento disciplinario de los estudiantes ha sido un tema de gran interés en el ámbito internacional. El estudio sobre las Tendencias Internacionales en Matemáticas y Ciencias (TIMSS), que se aplica cada cuatro años, documenta los logros en matemáticas y en ciencias de estudiantes de cuarto año de primaria y segundo de secundaria. Por su parte, el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA), que se realiza cada tres años, provee información acerca del desempeño de los estudiantes de 15 años de edad en las áreas del lenguaje, las matemáticas y las ciencias. Estos programas se sustentan en marcos conceptuales distintos que caracterizan dos visiones de las matemáticas, y definen los contenidos y formas del pensamiento matemático que determinan las preguntas y problemas del cuestionario. Por ejemplo, TIMSS distingue tres dominios: el conocimiento de hechos, procedimientos y conceptos; la aplicación del conocimiento y la comprensión conceptual, y el razonamiento. El estudio identifica cinco áreas de contenido: números, álgebra, medición, geometría y manejo de datos. A su vez, PISA está organizado alrededor de cuatro ejes fundamentales: cantidad, espacio y forma; cambio y relaciones, e incertidumbre. Destacan en el programa procesos del quehacer matemático tales como el uso del lenguaje, la modelación, la argumentación, la comunicación, la resolución de problemas y el uso de herramientas computacionales. Estos procesos se organizan en tres grupos: reproducción de

AARÓN REYES RODRÍGUEZ Licenciado en Actuaría por la Facultad de Ciencias de la UNAM y maestro en Ciencias por el Departamento de Matemática Educativa del **Cinvestav**. Ha sido profesor de matemáticas de la ENP de la UNAM y de la ESIME del IPN y ha impartido cursos en el Programa de Actualización y Formación de Profesores del Colegio de Bachilleres. Es coautor de artículos publicados en revistas internacionales, entre las que destacan *Teaching Mathematics and its Applications*, *Mathematics and Computer Education* y *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. Actualmente es estudiante de doctorado del Departamento de Matemática Educativa del **Cinvestav** y está interesado en conocer cómo el uso de la tecnología puede ayudar a los maestros de matemáticas de bachillerato y a los estudiantes de este nivel a comprender ideas matemáticas, mejorar sus habilidades de resolución de problemas y justificar conjeturas.
aaron.reyes.rdz@gmail.com

HUGO ESPINOSA PÉREZ Se licenció en Matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y obtuvo el grado de maestría en Ciencias en el Departamento de Matemática Educativa del **Cinvestav**. Ha sido profesor de matemáticas en diversos niveles educativos y ha impartido cursos en el Programa de Actualización y Formación de Profesores del Colegio de Bachilleres y del CCH de la UNAM. Es coautor de artículos publicados en revistas internacionales, entre las que destacan *Teaching Mathematics and its Applications*, *Mathematics and Computer Education*, *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* y *The International Journal for Technology in Mathematics Education*. Actualmente es estudiante de doctorado del Departamento de Matemática Educativa del **Cinvestav** y está interesado en conocer cómo el uso de un *software* dinámico puede transformar la enseñanza de la geometría en el bachillerato.
hugoespinosaperez@gmail.com


Configuración dinámica en Cabri.

procedimientos o reglas, conexiones y el grupo de preguntas o problemas de reflexión.

La participación de los estudiantes mexicanos en evaluaciones como PISA y ENLACE[1] muestra que, en general, poseen un conocimiento frágil y exhiben notables limitaciones en las formas de razonar y resolver problemas. La forma de evaluar el conocimiento de los estudiantes influye directamente en las actividades que se promueven en la instrucción matemática. Es común escuchar que muchos maestros preparan a sus estudiantes para aprobar las evaluaciones y organizan la instrucción alrededor de estrategias que pueden resultar exitosas al responder el tipo de preguntas que aparecen en los exámenes; sin embargo, cuando se enfrentan a situaciones o problemas que demandan una reflexión conceptual y aplicación de distintas ideas y representaciones para encontrar la solución, los estudiantes experimentan serias dificultades para resolverlos. Es evidente que crear un ambiente de instrucción, donde los estudiantes tengan oportunidad de desarrollar formas de pensar consistentes con las prácticas del quehacer de las matemáticas, involucra discutir aspectos relacionados con lo que significa aprender la disciplina y la importancia de la resolución de problemas. En este contexto, un ingrediente fundamental en la investigación y en las prácticas de instrucción son las tareas o problemas que pueden ayudar a los estudiantes en la construcción o desarrollo de un pensamiento matemático. Además, una discusión abierta acerca de las distintas formas de resolver un problema puede ofrecer al maestro la oportunidad de revisar sus propios conocimientos matemáticos y evaluar el potencial de utilizar diversas herramientas en sus prácticas de instrucción.

En este artículo se documentan los procesos de identificación y construcción de rutas potenciales de instrucción que desarrollaron maestros de matemáticas de nivel bachillerato al abordar un problema de optimización con la ayuda de un *software* dinámico. Se intenta responder preguntas como: ¿En qué medida el uso del *software* dinámico puede ayudar a los maestros a representar y explorar propiedades o relaciones entre objetos matemáticos que emergen durante el proceso de solución? ¿Qué formas de razonamiento y caminos de solución de los problemas se favorecen con el empleo de las herramientas tecnológicas? Se observa que el uso del *software* dinámico resulta importante para los maestros porque les permite representar y explorar dinámicamente los problemas, y promueve el desarrollo de un método inquisitivo de solución; es decir, una visión de la resolución de problemas en la que se valora, más que el descubrimiento de una solución, la formulación constante de preguntas, el establecimiento de conjeturas y relaciones matemáticas, así como la búsqueda de diversas formas de justificación de resultados.

Muchos maestros preparan a sus estudiantes para aprobar las evaluaciones y organizan la instrucción alrededor de estrategias que pueden resultar exitosas al responder el tipo de preguntas que aparecen en los exámenes. Sin embargo, cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones o problemas que demandan una reflexión conceptual y aplicación de distintas ideas y representaciones para encontrar la solución, experimentan serias dificultades para resolverlos.

Antecedentes

¿Qué formas de representar tareas matemáticas se favorecen con el uso de un *software* dinámico? ¿En qué grado éste puede ser relevante en la identificación y exploración de conjeturas y relaciones matemáticas? ¿En qué medida el uso de herramientas computacionales ayuda a los maestros en la construcción de trayectorias potenciales de instrucción y, como consecuencia, a revisar o ampliar sus conocimientos matemáticos? Se documenta que el desarrollo y la disponibilidad de diversas herramientas computacionales ofrece a los maestros la posibilidad de incrementar su repertorio de estrategias heurísticas para resolver problemas matemáticos y para formular o reconstruir algunas relaciones matemáticas.

> ...la reinvención guiada [de conocimiento matemático] ofrece una forma no convencional del dilema, generalmente percibido, de cómo salvar la distancia existente entre el conocimiento informal y las matemáticas formales (Gravemeijer y Dorman, 1999).

También es importante reconocer que diferentes herramientas pueden ofrecer a los maestros oportunidades distintas de representar y abordar los problemas matemáticos. En ese sentido, resulta relevante mostrar y discutir no sólo el potencial asociado con el uso de diversas herramientas, sino también las formas en que las distintas aproximaciones a los problemas o las tareas pueden relacionarse o complementarse. Por ejemplo, con el uso de *software* dinámico como Cabri Geometry o Sketchpad, algunas tareas pueden representarse dinámicamente como un recurso para identificar y explorar diversas relaciones matemáticas o conjeturas. En esta perspectiva, un principio subyacente que promueve la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas consiste en pensar o conceptualizar la disciplina como un conjunto de dilemas que necesitan representarse y explorarse en términos de recursos matemáticos y estrategias. Las tareas o problemas son vistos como oportunidades para proponer y dar seguimiento a preguntas relevantes que pueden conducir a la identificación o reconstrucción y exploración de relaciones matemáticas. En este contexto, los maestros utilizan un *software* dinámico en la construcción de trayectorias potenciales de instrucción que podrían guiar u orientar las formas de desarrollar sus clases. Además, el empleo de la herramienta les ofrece la oportunidad de representar y explorar las tareas a través de aproximaciones visuales, numéricas, gráficas y algebraicas.

La relevancia de construir trayectorias potenciales de instrucción con el empleo de la tecnología

Una ruta potencial de instrucción se construye a partir de analizar en detalle distintas formas de resolver un problema o actividad matemática. En este proceso se identifican varios caminos de representar el problema (incluyendo el uso de representaciones dinámicas), las diversas estrategias que permiten diseñar y aplicar un plan de solución, varias formas de resolver el problema y la búsqueda de conexiones o extensiones del mismo. En ese contexto, las tareas o problemas son elementos clave para promover y trazar el desarrollo de métodos de resolución de problemas de los estudiantes. Aquí, los maestros necesitan primeramente identificar trayectorias teóricas o potenciales de instrucción para enmarcar y entonces discutir con otros maestros las distintas rutas que sus estudiantes pueden seguir al abordar la tarea.

> [...] un objetivo general de investigación en el campo de las trayectorias de aprendizaje es generar conocimiento sobre el aprendizaje y la enseñanza. Entonces, los procesos científicos (por ejemplo, documentar decisiones, razones y condiciones; formular hipótesis sobre mecanismos; predecir eventos y verificar esas predicciones) deben ser seguidas y registradas (Clements y Sarama, 2004:85).

En el proceso de construcción de trayectorias de instrucción, el uso de herramientas computacionales ofrece a maestros y estudiantes diversas oportunidades para representar y reconstruir relaciones matemáticas. En la solución de los problemas, los maestros buscan explícitamente las formas en las cuales el conocimiento matemático es conectado, y discuten lo que constituye un argumento válido para fundamentar relaciones matemáticas. Zbiek, Heid y Blume (2007:1170) sugieren que el uso de las herramientas computacionales en la resolución de problemas favorecen actividades como:

(a) fomentar la inspiración (*insight*) y la intuición, (b) descubrir nuevos patrones y relaciones, (c) representar para exponer principios, (d) probar y especialmente falsificar conjeturas, (e) explorar un posible resultado para ver si amerita una prueba formal, (f) sugerir caminos formales, (g) remplazar cálculos hechos a mano con el uso de herramientas de cálculo, y (h) confirmar.

La construcción de trayectorias de instrucción se favorece dentro de una comunidad en la que se fomenta un método inquisitivo, y donde los maestros tienen la oportunidad de presentar y discutir sus ideas abiertamente para examinar o explorar conceptos matemáticos o resolver problemas. Así, la comprensión de las ideas matemáticas o los procesos de resolución de problemas son actividades en las cuales los maestros llegan a involucrarse en una reflexión constante, que puede conducirlos a formular un conjunto de relaciones matemáticas y buscar diversas maneras de sustentarlas. Aquí, el uso de las herramientas (*software* dinámico, en este caso) resulta importante para identificar y formular conjeturas matemáticas y, en general, favorecer la aproximación inquisitiva a los problemas (Wells, 2001).

Para ilustrar el proceso de construcción de una trayectoria de instrucción se presenta un problema donde un grupo de maestros explora diversas maneras de resolverlo. Se distinguen diversos episodios que muestran distintas fases del proceso de resolución de la actividad.

El problema

La figura 1 muestra un auto que transita por una carretera. Al lado de la carretera hay un palacio y el conductor busca detenerse para que su amigo (el pasajero) pueda apreciar la fachada del palacio. ¿En qué posición de la carretera debe el conductor detener el auto de tal forma que su amigo pueda tener la mejor vista de la fachada?

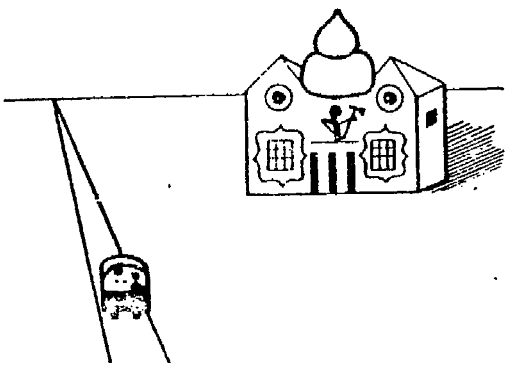


Figura 1. El palacio

Presentación de resultados

Para presentar y discutir lo que los maestros hicieron durante la interacción con la tarea, se distinguen episodios de resolución de problemas: comprender el enunciado de la tarea, pensar en un plan de solución, buscar relaciones matemáticas y validación de resultados, así como establecer conexiones o extensiones del problema. En este proceso se identificaron preguntas relevantes que los participantes propusieron para orientar las diversas aproximaciones mediante las que abordaron la tarea.

Primer episodio: comprender el enunciado del problema

El problema se abordó en una de las sesiones donde los maestros participaron en actividades de resolución de problemas con el empleo de la tecnología. Todos los participantes leyeron el enunciado de la tarea e iniciaron el proceso de identificación de la información relevante relacionada con el enunciado del problema. ¿Cómo es posible identificar que para diferentes posiciones del auto el pasajero tiene diferentes vistas del palacio? ¿Qué significa tener la mejor vista del palacio? ¿Es suficiente considerar la posición del pasajero en la carretera como referencia en lugar del auto para determinar la mejor posición? Estas y otras preguntas se discutieron inicialmente y condujeron a los participantes a construir una representación dinámica del problema. Se observó que la figura 1 los ayudó a visualizar y eventualmente a representar el problema. Por ejemplo, Sofía propuso representar la carretera con una línea recta, al pasajero como un punto sobre la recta y a la base de la fachada del palacio con un segmento de recta (figura 2).

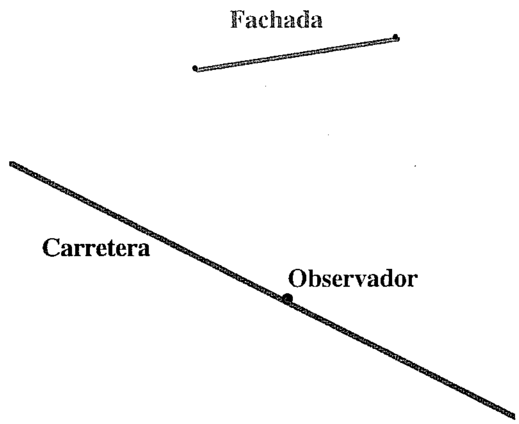


Figura 2. Representación dinámica de la tarea.

¿Por qué puede representarse la fachada del palacio con un segmento? Algunos de los maestros argumentaron que la mejor vista significa comparar ángulos que relacionan el ancho del palacio y el punto que representa al observador. En general, los maestros estuvieron de acuerdo en que la representación del problema propuesta por Sofía incluía toda la información relevante acerca de la tarea. Entonces, situaron el punto sobre diferentes posiciones sobre la recta y midieron los ángulos correspondientes (figura 3). Es importante mencionar que con el objetivo de explicar y reportar lo que ocurre con el ángulo para varias posiciones del punto (el observador), los maestros reconocieron la necesidad de utilizar una forma explícita para denotar los principales objetos inmersos en el problema (puntos, ángulos, líneas y segmentos).

Segundo episodio: elaboración e implementación de un plan

En esta etapa, cuando algunos maestros arrastraron el punto P sobre la recta L, observaron el comportamiento de algunos atributos del triángulo APB (área, perímetro y ángulos). Para ello, midieron esos atributos, y notaron que los perímetros y las áreas de la familia de triángulos no alcanzaban un valor máximo. En particular, Sofía y Jacobo se dieron cuenta de que cuando el punto P era situado en una posición en la que era colineal con los puntos A y B, entonces el ángulo APB medía cero grados; pero cuando el punto se movía a la derecha de la posición donde era colineal la medida del ángulo APB, se incrementaba para algunas posiciones y después el valor del ángulo decrecía. Así, se enfocaron en determinar la posición del punto P sobre la recta L, para la cual el ángulo APB alcanzaba su valor máximo. Mostraron dos formas distintas de identificar el valor máximo del ángulo. En una los maestros visualizaron directamente los números mientras movían el punto P a lo largo de la recta L; y en la otra aproximación construyeron una representación gráfica que involucraba a la distancia AP y el correspondiente valor del ángulo APB (figura 4).

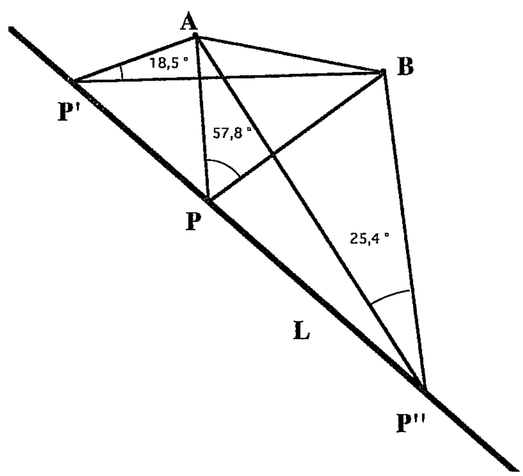


Figura 3. Identificación de varias posiciones del punto P y los ángulos formados con los extremos del segmento AB.

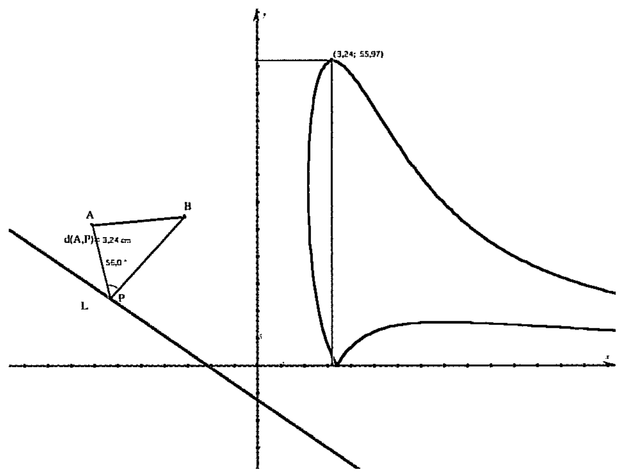


Figura 4. Representación gráfica de la variación del valor del ángulo APB cuando el punto P se mueve sobre la recta L.

Los maestros reconocieron la necesidad de encontrar un argumento algebraico o geométrico para justificar la posición del punto P, donde el ángulo consigue su valor máximo. En este proceso, Daniel y Emilia decidieron dibujar el círculo que pasa por los puntos P, A y B. Basados en esta construcción, notaron que cuando el punto P se mueve sobre la recta L, en algún momento, la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B parece ser tangente a la recta L, y que el punto de tangencia se encuentra en la posición donde el ángulo APB alcanza su máximo valor (figura 5).

Con base en esta información, emergió una conjetura. Para identificar el punto donde el ángulo APB alcanza su máximo valor es suficiente dibujar una circunferencia tangente a la recta L que pase por los puntos A y B. Esto es, el punto de tangencia de la circunferencia y la recta L es el lugar en donde el observador consigue la mejor vista del palacio. ¿Cómo se puede construir una circunferencia que pase por los puntos A y B y que sea tangente a la recta L? Emilia propuso esta pregunta al resto de los participantes durante el desarrollo de la sesión. Sofía y Jacobo sugirieron que se podían identificar propiedades relevantes de la circunferencia tangente suponiendo su existencia. Esto es, si la circunferencia tangente existe,

El desarrollo y la disponibilidad de diversas herramientas computacionales ofrece a los maestros la posibilidad de incrementar su repertorio de estrategias heurísticas para resolver problemas y formular o reconstruir algunas relaciones matemáticas. Un principio subyacente que promueve la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas consiste en pensar o conceptualizar la disciplina como un conjunto de dilemas que necesitan representarse y explorarse en términos de recursos matemáticos y estrategias.

¿qué propiedades debe tener? Se reconoció que el centro de la circunferencia debe encontrarse sobre la mediatriz del segmento AB y sobre la línea perpendicular a la recta L que pasa por el punto de tangencia. Así, David dibujó una recta perpendicular a la recta L, que pasa por el punto P, y trazó la mediatriz del segmento AP. Esas rectas se intersecan en el punto D. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto D cuando el punto P se mueve sobre la línea L? Con el uso del *software* se determinó el lugar geométrico (figura 6). Así, el punto de intersección (C) del lugar geométrico y la mediatriz del segmento AB resultó ser el centro de la circunferencia tangente. Para dibujar la circunferencia, los maestros trazaron la perpendicular del punto C a la recta L y la distancia del punto C a la recta L fue el radio de la circunferencia tangente (figura 6). Durante la sesión se argumentó también que el lugar geométrico del punto D, cuando el punto P se mueve sobre la recta L, es una parábola, ya que el punto D está sobre la mediatriz del segmento AP y se cumple que d(P,D) es igual a d(D,A) (por la definición de mediatriz). Entonces, el foco de la parábola es el punto A y la directriz es la recta L.

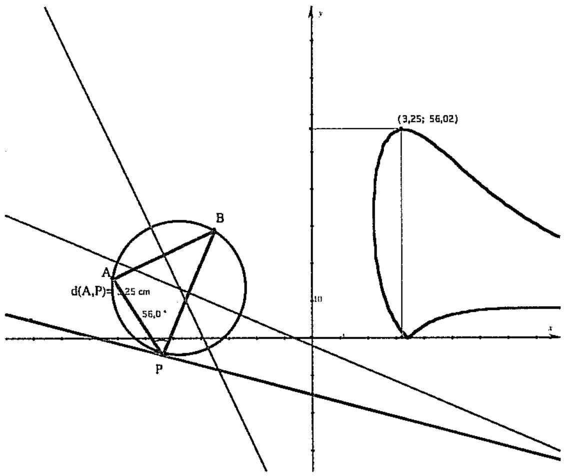


Figura 5. La circunferencia que pasa por los puntos P, A y B parece ser tangente a la recta L cuando el ángulo APB alcanza su valor máximo.

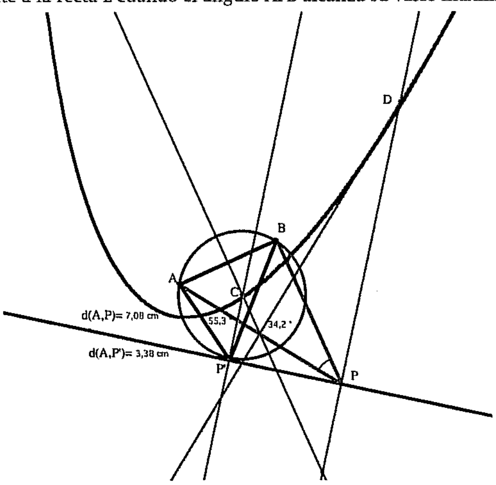


Figura 6. Circunferencia tangente a la recta L que pasa por los puntos A y B.

Sofía y Jacobo construyeron la circunferencia tangente a la recta L que pasa por los puntos A y B dibujando en primer término la mediatriz del segmento AB. Posteriormente, situaron un punto C sobre la mediatriz y dibujaron una circunferencia con centro en el punto C y radio, la longitud del segmento CA. También dibujaron una recta perpendicular a la recta L que pasa por el punto C. Esta perpendicular y la circunferencia se intersecan en el punto D. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto D cuando el punto C se mueve sobre la mediatriz del segmento AB? Nuevamente, el uso del *software* mostró que este lugar geométrico era la rama de una hipérbola. El lugar geométrico (la rama de la hipérbola) interseca la recta L en el punto P. La recta perpendicular a L, que pasa por el punto P, interseca a la mediatriz del segmento AB en el punto C'. Así, para dibujar la circunferencia tangente a L que pasa por los puntos A y B, fue suficiente dibujar la circunferencia con centro en el punto C' y radio d(C', P) (figura 7).

Tercer episodio: validación de la solución

En el desarrollo de la sesión, los maestros reconocieron que el problema de encontrar la mejor vista de la fachada se redujo a construir la circunferencia tangente a la recta L que pasa por dos puntos dados; sin embargo, fue importante proporcionar un argumento matemático para validar que el punto de tangencia era la posición en donde el ángulo alcanza su valor máximo. Para presentar el argumento se basaron en la figura 8: los puntos M y N son los puntos de intersección de la mediatriz del segmento AB y las circunferencias que pasan por los puntos A, B, D y A, B, P', respectivamente. Así, comparar los valores del ángulo ADB y el ángulo AP'B es lo mismo que comparar los ángulos AMB y ANB. Esto es porque el ángulo ADB es congruente con el ángulo AMB y el ángulo ANB es congruente con el ángulo AP'B. Se observa también que cuando d(A,N) es mayor que d(A,M), entonces el valor del ángulo ANB es menor que el valor del ángulo AMB. Entonces, el ángulo que se forma con los extremos del segmento AB y el punto de tangencia de la circunferencia es el ángulo con el valor máximo.

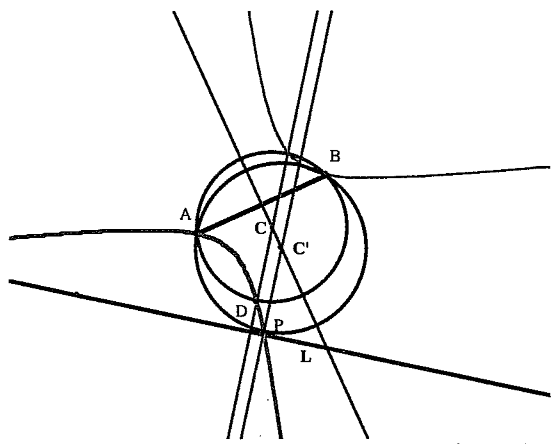


Figura 7. Construcción de una circunferencia tangente a la recta L que pasa por los puntos A y B con el uso de una hipérbola.

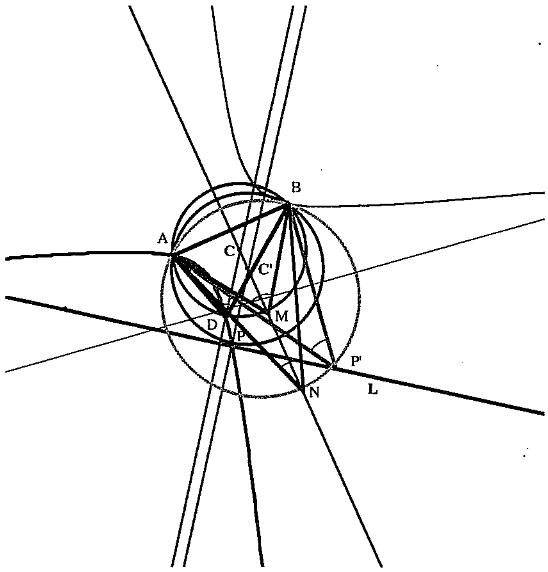


Figura 8. Esquema que muestra la posición en que el ángulo APB alcanza su valor máximo.

Posteriormente se discutió la aproximación geométrica del problema y se contrastó con un acercamiento analítico que involucra encontrar ecuaciones de rectas, ángulos entre rectas y el máximo de una función, con el apoyo de una calculadora simbólica.

Reflexión

Hay evidencia de que el uso de la herramienta ayudó a los participantes a construir inicialmente una representación dinámica de la tarea. Así, el mover un punto (P) sobre una recta (la carretera) los condujo a identificar y relacionar la "mejor vista" con el ángulo formado entre los extremos de un segmento (la fachada del palacio) y ese punto. ¿Cómo se puede medir el ángulo para distintas posiciones del punto P? ¿Cómo se puede identificar el ángulo con el valor más grande? Los maestros utilizaron el *software* a fin de medir el ángulo para varias posiciones del punto P y observaron que había una posición donde el valor del ángulo era el más grande. Esto es, los acercamientos visuales y empíricos fueron importantes para pensar y explorar distintas maneras de representar la variación del ángulo. La solución gráfica involucró una aproximación funcional en la cual el uso de un sistema cartesiano los ayudó a relacionar la distancia entre uno de los extremos del segmento (AB, la fachada del palacio) y el observador, y la magnitud del ángulo correspondiente. Así, la aproximación gráfica fue relevante para identificar visualmente el punto donde el ángulo alcanza su valor máximo. Además, mover el punto P sobre la recta ayudó a los maestros a observar comportamientos particulares de otros objetos (circunferencias, segmentos y puntos) dentro de la representación. Por ejemplo, observaron que la circunferencia que pasa por los tres puntos (A, B y P) es tangente a la recta L cuando el ángulo APB alcanza su valor máximo. Así, la solución de la tarea se redujo a dibujar una circunferencia tangente a la recta y el punto de tangencia fue el punto deseado. Nuevamente, el análisis de las propiedades relevantes de la posible solución los condujo a construir la mediatriz del segmento AB y la línea perpendicular a L que pasa por el punto P. El lugar geométrico del punto de intersección de esas rectas, cuando P se mueve sobre la recta L, generó una parábola. En este acercamiento, la parábola fue la clave para encontrar la solución de la tarea. Los maestros se sorprendieron de que una cónica fuera usada para encontrar el punto donde el observador puede obtener la mejor vista de la fachada del palacio. También reconocieron que la presentación dinámica del problema fue central para identificar dos resultados matemáticos: (a) dada una recta L y un segmento AB que no es paralelo a la recta L, entonces existe un punto P' sobre la recta tal que la circunferencia que pasa por los puntos A, B y P' es tangente a la recta L. En este caso, el ángulo AP'B es el ángulo con el máximo valor, (b) dada una recta L, un punto P sobre esa recta y un segmento AB que no es paralelo a L, entonces el lugar geométrico del punto de intersección de la mediatriz del segmento AP (o PB) y la recta perpendicular a L que pasa por el punto P, cuando P se mueve sobre la recta L, es una parábola.

Los episodios de resolución de problemas descritos en este artículo, proporcionaron información útil para identificar una ruta potencial mediante el cual los estudiantes pueden abordar una la tarea matemática con el uso de la herramienta. Así, la construcción de la representación dinámica, la cuantificación de atributos (medida de segmentos, ángulos, etcétera), la identificación de lugares geométricos o las representaciones gráficas son actividades clave que pueden ayudar a los estudiantes a identificar y explorar propiedades matemáticas interesantes. Además, el uso de las herramientas también puede ser relevante en la búsqueda de argumentos para justificar esos resultados.

Comentarios finales

¿Cómo construir trayectorias hipotéticas de aprendizaje? ¿Quiénes deben participar y cuál es el proceso alrededor de esa construcción? En este trabajo se presentó un ejemplo que ilustra cómo el uso de herramientas computacionales puede fomentar en los maestros el desarrollo de un método inquisitivo en la solución de los problemas, mismo que les permite formular preguntas constantemente, utilizar distintas representaciones, buscar relaciones y formas de sustentarlas, así como comunicar resultados.

Existe evidencia de que el uso de las herramientas ofrece a los maestros la oportunidad de participar en un proceso de búsqueda que puede guiarlos en la

> Un aspecto relevante del software dinámico es que las relaciones funcionales del problema pueden prescindir de una representación algebraica inicial, ya que se pueden representar gráficamente con la ayuda del *software*. La representación gráfica demanda que el estudiante ubique el dominio apropiado para identificar las propiedades relevantes del problema (raíces, máximo o mínimo, etcétera); la facilidad que tiene para realizar las operaciones le permite centrar la atención en el significado de los resultados.

reconstrucción o el descubrimiento de relaciones matemáticas y formas de sustentarlas. Además, les puede permitir pensar y abordar los problemas desde perspectivas distintas y complementarlas (Santos-Trigo, 2007b).

Cada herramienta induce en los estudiantes distintas formas de pensar el problema y el empleo de varias de estas herramientas les permitirá no sólo complementar los métodos de solución, sino también, contrastar el potencial de las herramientas en la representación y búsqueda de relaciones. Por ejemplo, el uso del *software* dinámico resulta importante en la representación inicial del problema, ya que ésta se construye con base en el análisis de las propiedades matemáticas de los objetos asociados con el problema. Las representaciones dinámicas ayudan al maestro visualizar el problema, identificar y explorar algunas relaciones que resulten al mover elementos dentro de la propia representación del problema. Además, es fácil cuantificar atributos como longitudes, perímetros, áreas, pendientes, medidas de ángulos y observar cómo estos atributos cambian cuando ciertos objetos se mueven en la representación del problema.

Un aspecto relevante del acercamiento con el uso del *software* dinámico es que las relaciones funcionales del problema no requieren de una representación algebraica inicial, puesto que éstas se pueden representar gráficamente con la ayuda del *software*. La representación gráfica demanda que el estudiante ubique el dominio apropiado para identificar las propiedades relevantes del problema (raíces, máximo o mínimo, etcétera); así, la facilidad que tiene para realizar las operaciones le permite centrar la atención en el significado de los resultados.

De manera general, los rasgos que se muestran en los distintos episodios en la resolución del problema esbozan elementos de un marco inquisitivo donde se resalta la importancia de que los profesores y estudiantes problematicen su aprendizaje. Es decir, que formulen preguntas, que utilicen distintas representaciones, formulen conjeturas y relaciones y, con el uso de distintas herramientas, exploren y sustenten sus resultados con argumentos que incluyan aspectos visuales y empíricos y acercamientos formales (Santos-Trigo, 2007a).

Finalmente, la construcción de trayectorias de aprendizaje representa una actividad a partir de la cual los maestros pueden reconocer el potencial y las limitaciones asociadas con el uso de las herramientas para representar y explorar relaciones. Además, la utilización de las herramientas puede promover la discusión de los contenidos matemáticos en términos de identificar rutas que orienten a los estudiantes en la comprensión y aplicación del contenido matemático.

[Notas]

1 ENLACE es el programa conocido como "Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros Escolares", que la Secretaría de Educación Pública está utilizando para evaluar el rendimiento académico de los estudiantes en educación básica.

Reconocimientos
Agradecemos el apoyo recibido de Conacyt, mediante el proyecto con referencia #47850 que involucra el uso de herramientas computacionales en la resolución de problemas matemáticos.

[Referencias]

[1] Clement, D. H. y Sarama, J., 2004, "Learning trajectories in mathematics education", *Mathematical thinking and learning*, vol. 6(2), pp. 81-89.
[2] Gravemeijer, K. y Doorman, M., 1999, "Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39(1-3), pp. 110-128.
[3] Santos-Trigo, M., *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*, México, Trillas, 2007a.
[4] Santos-Trigo, M, 2007b, "Mathematical problem solving: An evolving research and practice domain", *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, vol. 39, pp. 523-536.
[5] Simon, M. y Tzur, R., 2004, "Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 6(2), pp. 91-104.
[6] Wells, G. (ed.), *Action Talk & Text. Learning & teaching through inquiry*, Nueva York, Teachers College Press, 2001.
[7] Zbiek, R.M., Heid, M.K. y Blume, G.W. (2007). Research on technology in mathematics education. En F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.