Resolución de problemas y uso de tecnologías digitales en el desarrollo de competencias matemáticas

Fernando Barrera Mora
barrera@uaeh.edu.mx

Aarón Reyes Rodríguez
aaronr@uaeh.edu.mx

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Resumen. En este artículo se documenta cómo el uso de tecnologías digitales en el proceso de resolución de problemas puede apoyar a los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas, lo cual será entendido en este trabajo como el desarrollo de elementos propios del pensamiento matemático tales como: representar información, identificar relaciones entre datos e incógnitas o hipótesis y conclusiones, resolver casos particulares; explorar e identificar patrones, formular conjeturas, presentar justificaciones y comunicar resultados. Se argumenta que el carácter dinámico de las representaciones que se pueden construir con un software como Cabri-Geometry o Geogebra y la disponibilidad de herramientas de medida son factores que favorecen el desarrollo de competencias matemáticas.

Introducción

El término *competencia matemática* (mathematical literacy) es utilizado ampliamente en la literatura relacionada con la prueba PISA (Programme for International Students Assessment), en cuyo *Marco de Evaluación* se define a la competencia matemática como:

> La capacidad que tiene un individuo de identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar e implicarse en las matemáticas de una manera que satisfaga sus necesidades vitales como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (OCDE, 2006, p. 13)

Para PISA, la competencia matemática está relacionada con la habilidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas, así como para plantear y resolver problemas del mundo real e interpretar sus soluciones. Un elemento que se resalta en la conceptualización de competencia matemática es el carácter funcional del conocimiento, esto es, la capacidad para aplicarlo en la comprensión y solución de problemas que aparecen en la vida cotidiana, por ejemplo al ir de compras, realizar tareas en hogar que requieren procesos de medición, solicitar un crédito, elegir un plan de telefonía, abrir un negocio, etcétera.

El nivel de competencia de un estudiante se determina con base en la forma en que utiliza sus conocimientos y habilidades para resolver problemas, considerando los siguientes aspectos (i) situaciones o contexto del problema, (ii) el contenido que se utiliza para resolver el problema y (iii) las capacidades empleadas para matematizar (modelizar) e interpretar un problema.

En el marco de PISA se establece que nueve capacidades matemáticas (mathematical competencies) entre las que se encuentran (i) el pensamiento y razonamiento, (ii) la argumentación, (iii) la comunicación, (iv) la construcción de modelos, (v) el planteamiento y solución de problemas, (vi) representación, (vii) utilización de operaciones, y lenguaje técnico, formal y simbólico y (ix) el empleo de material y herramientas, "constituyen el núcleo mismo del concepto de competencia matemática" (OCDE, 2006, p. 84).

Por otra parte, de acuerdo con Niss (2003), poseer competencia o ser competente en algún ámbito significa dominar aspectos esenciales del mismo. Así la *competencia matemática* (mathematical competence) es la “capacidad para entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra-matemáticos” (p. 218). Las competencias matemáticas, son entonces los elementos distinguibles que constituyen la competencia matemática. Este autor distingue ocho competencias matemáticas.

(i) Pensar matemáticamente, que consiste en dominar modos matemáticos de pensamiento entre los que se encuentra la formulación de preguntas, la abstracción y la generalización, la distinción de diferentes tipos de enunciados matemáticos, así como la comprensión y manejo de los alcances y limitaciones de un concepto dado.

(ii) Formular y resolver problemas

(iii) Modelizar. Es decir, analizar los fundamentos y propiedades de modelos existentes, determinar su dominio de validez, interpretar sus elementos en términos de la realidad, construir modelos, operar los elementos del modelo, validar e interpretar los resultados derivados de éste.

(iv) Razonar matemáticamente. Es un aspecto que incluye entender y evaluar cadenas de argumentos propuestas por otros, conocer qué es una demostración y qué es lo que la distingue de otro tipo de razonamiento matemático, descubrir las ideas básicas de una demostración y elaborar argumentos matemáticos.

(v) Representar entidades matemáticas. Consiste en entender y utilizar diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos, fenómenos y situaciones, así como comprender las relaciones entre esas representaciones y la capacidad para transitar entre ellas.

(vi) Manejar símbolos matemáticos y formalismos. Incluye la capacidad para decodificar e interpretar el lenguaje matemático simbólico y su relación con el lenguaje natural, entender la naturaleza y reglas de los sistemas matemáticos formales, pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico, así como manejar y operar con expresiones simbólicas.

(vii) Comunicarse en, con y acerca de las matemáticas. Se relaciona con entender las expresiones escritas, visuales u orales que otros formulan acerca de asuntos que tienen un contenido matemático y expresar ideas con diversos niveles de precisión en forma escrita, visual y oral sobre esos asuntos.

(viii) Utilizar apoyos y herramientas. Esta competencia consiste en conocer la existencia de diversas herramientas y apoyos para la actividad matemática, sus alcances, limitaciones; así como la capacidad de utilizar estas herramientas reflexivamente.

Como puede observarse, el ser competente en matemáticas consiste esencialmente en ser capaz de resolver problemas en una amplia variedad de contextos y desarrollar diversos aspectos relacionados con el pensar matemáticamente.

Resolución de problemas y competencias matemáticas

¿Cómo se puede promover el que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas? Desde la perspectiva del marco de resolución de problemas, el medio para la construcción de conocimiento y el desarrollo de una forma matemática de pensar, es resolver problemas en una amplia variedad de contextos. Para Schoenfeld (1985), el pensar matemáticamente tiene entre sus aspectos el ser ingeniosos, flexibles y eficientes para enfrentar problemas nuevos. Al resolver problemas los estudiantes aprenden a utilizar los recursos de los que disponen (hechos, procedimientos y técnicas) y se familiarizan con una amplia variedad de heurísticas y las diferentes formas de implementarlas; asimismo, tienen la oportunidad de formular preguntas, observar relaciones e invariantes, elaborar conjeturar y justificaciones, además de comunicar resultados.

Consideramos que el desarrollo de competencias matemáticas, mediante una aproximación de resolución de problemas, requiere de la conjunción e interrelación de diversos elementos entre los que se encuentran: (a) resolver problemas con alta demanda cognitiva, (b) propiciar un ambiente de instrucción que favorezca el desarrollo de una actitud inquisitiva, (c) hacer uso de diversas herramientas y medios de representación, (d) la guía y orientación de un profesor altamente capacitado en los ámbitos disciplinar, epistemológico y didáctico.

Problemas con alta demanda cognitiva. Los problemas son la base para la exploración y entendimiento de conceptos, así como de la formulación de resultados, el desarrollo de formas de trabajo y de competencias matemáticas. Los problemas no solamente guían la atención de los estudiantes hacia aspectos específicos de los conceptos o contenidos matemáticos, sino que, y posiblemente de más importancia, también hacia las formas en que procesan la información y conocimientos de los que disponen (Cai, 2003). La literatura en educación matemática aporta evidencia de que los problemas utilizados en el proceso de instrucción definen las características del aprendizaje de los estudiantes (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; NCTM, 2000; Stein y Smith, 1998).

> Tareas que solicitan a los estudiantes realizar procedimientos memorísticos de una forma rutinaria conduce a un tipo de oportunidad para el pensamiento del estudiante; tareas que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente y que los estimulan a realizar conexiones conducen a un conjunto diferente de oportunidades para el pensamiento de los estudiantes. (Stein y Smith, 1998, p. 269)

El utilizar problemas con alta demanda cognitiva (ibíd.), es decir, problemas que requieren no sólo recordar y aplicar algoritmos o procedimientos rutinarios, sino que por el contrario, hacen uso sistemático de los diferentes aspectos del pensar matemáticamente, ofrece a los estudiantes oportunidades de desarrollar competencias diversas. Por ejemplo, si los problemas se encuentran enmarcados en un contexto del mundo real, el estudiante debe simplificar el problema mediante la formulación de supuestos que facilitarán el modelizar la situación y, una vez formulado el modelo, operar los elementos del mismo en un contexto matemático para obtener conclusiones que a su vez serán interpretadas en términos del fenómeno real. Si el problema se desarrolla en un contexto puramente matemático, el estudiante podrá hacer uso de diferentes representaciones para avanzar en la resolución de un problema, manejar símbolos y formalismos, razonar matemáticamente y elaborar justificaciones y demostraciones. Por su parte, la utilización de problemas en contextos hipotéticos permitirá a los estudiantes evaluar la pertinencia e implicaciones de utilizar suposiciones particulares en la modelización de algún fenómeno Barrera-Mora y Santos-Trigo (2001).

El ambiente de instrucción. La resolución de problemas es una actividad que involucra "conceptualizar a la disciplina como un conjunto de dilemas o problemas que necesitan explorarse y resolverse en términos de recursos y estrategias matemáticas" (Santos-Trigo, 2007, p. 523). En este contexto, en las aproximaciones de resolución de problemas se considera que los estudiantes necesitan entender que el estudio de las matemáticas es una actividad en la cual tienen que participar para identificar y comunicar ideas ligadas con situaciones problemáticas, en las que constantemente tienen que formular preguntas que les permitan reconocer información relevante para dar significado a conceptos matemáticos (Moreno-Armella y Sriraman, 2005). Así, es importante que en el salón de clase se constituya en una comunidad de aprendizaje en la que se lleve a cabo una actividad análoga a la que desarrollan los matemáticos profesionales al construir nuevo conocimiento. Lo anterior significa que el estudiante explore relaciones entre objetos matemáticos, desarrolle un pensamiento creativo al enfrentar problemas con alta demanda cognitiva, pero que puedan ser resueltos con base en los recursos que posee; que comunique y discuta sus ideas con sus compañeros y el profesor, además de que elabore y exprese justificaciones oralmente y por escrito.

Las herramientas. Existe un amplio acuerdo en que las tecnologías cognitivas, entendidas como medios que ayudan a trascender las limitaciones de la mente (Pea, 1987) influyen en las características del aprendizaje que construyen los estudiantes. Particularmente, el uso de herramientas computacionales durante la resolución de problemas puede promover el que los estudiantes exploren y analicen problemas matemáticos desde perspectivas en las que se favorecen las aproximaciones visuales y empíricas. Las tecnologías digitales permiten a los estudiantes experimentar, observar relaciones matemáticas, formular conjeturas, construir pruebas y comunicar resultados en formas que complementan y amplían las aproximaciones con papel y lápiz.

¿De qué forma, el uso de las tecnologías digitales puede apoyar el desarrollo de competencias matemáticas? Mediante el uso de las tecnologías digitales es posible construir representaciones que son dinámicas, es decir, representaciones que ayudan a identificar relaciones entre las variables del problema, lo a que a la vez permite formular conjeturas, partiendo de casos particulares. Otro aspecto importante de las tecnologías digitales es que ayudan a establecer conexiones entre las formas en que unas representaciones cambian y el efecto que esto tiene en otras de ellas. Además, estas representaciones son manipulables, lo cual significa que es posible interactuar, operar o modificar las representaciones y sus relaciones de una forma más directa de lo que es posible en ambientes de papel y lápiz, mediante la acción de un mouse y el teclado. La conjunción de las características anteriores se traduce en la posibilidad de crear familias de configuraciones, que al modificarse permiten a los estudiantes la observación de relaciones e invariantes que son el punto de partida para el desarrollo de una actividad matemática robusta orientada a la exploración, la formulación de conjeturas, el razonamiento matemático, proporcionar argumentos y la comunicación de resultados. En resumen, una actividad orientada al desarrollo de competencias matemáticas.

La actividad del profesor. El profesor es un elemento clave del proceso de instrucción. Los estudiantes aprenden matemáticas a través de las actividades y experiencias que los profesores les proporcionan (NCTM, 2000) de tal forma que las competencias matemáticas que desarrollan se encuentran moldeadas por las formas de enseñanza a las que son expuestos en el aula. En este contexto, profesores altamente capacitados en los ámbitos disciplinar, epistemológico y didáctico, tendrán mejores oportunidades de diseñar tareas y escenarios de instrucción que promuevan el desarrollo de competencias matemáticas. El contar con conocimientos profundos sobre los contenidos matemáticos es la base para una enseñanza de calidad, pues no cabe duda que no se puede enseñar aquello que no se sabe. Más aún, argumentamos que las prácticas didácticas son determinadas por la estructura conceptual del profesor, es decir, la forma en que sus conocimientos disciplinares, sobre epistemología y didáctica se encuentran organizados y articulados en su mente. El conocimiento de teorías que analizan el cómo aprenden los estudiantes, así como los medios para implementar estas ideas teóricas en el salón de clase, son también elementos esenciales de la actividad docente.

Una actividad de instrucción con potencial para el desarrollo de competencias matemáticas

La tarea mediante la cual se ejemplifican los elementos expuestos en las secciones previas se inserta en el contexto de la cinemática de los mecanismos. La tarea trata sobre un criterio que permite determinar si en un mecanismo de cuatro barras articuladas, una de ellas puede efectuar revoluciones completas con respecto a alguna de las restantes. Este criterio se denomina Ley de Grashof y se relaciona con propiedades de los cuadriláteros. Los mecanismos que satisfacen la Ley de Grashof tienen importantes aplicaciones ya que permiten convertir el movimiento circular en un movimiento oscilatorio o viceversa. Este tipo de conversión de movimiento es útil para el funcionamiento de máquinas como por ejemplo la vagoneta manual (Figura 1).

Ley de Grashof: Considere un mecanismo plano de cuatro barras articuladas en sus extremos. Sean, s la longitud de la barra más corta, l la longitud de la barra más larga, p y q las longitudes de las dos barras restantes. Al menos una de las barras del mecanismo puede dar una revolución completa si y solo si $l + s \leq p + q$ (Chang, Lu & Wu, 2005).

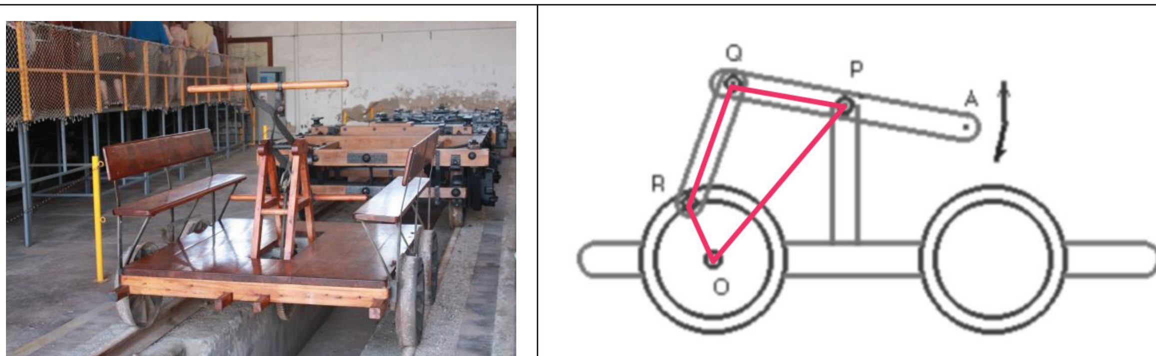

Figura 1. Vagoneta manual[2]

En este artículo no se analiza el tránsito de la situación real al modelo matemático, sino que se centra la atención en las oportunidades para el desarrollo de competencias matemáticas que ofrece el fenómeno ya simplificado y modelado matemáticamente.

Los resultados que se presentan corresponden al análisis de la información derivada de implementar la tarea con un grupo de 12 estudiantes de segundo semestre de una licenciatura en física, en una universidad pública en México. Los estudiantes poseían poca experiencia en el uso del software Cabry-Geometry, aunque habían utilizado con cierta frecuencia el software Geogebra. La actividad se llevó a cabo durante una sesión que tuvo una duración de dos horas y fue dirigida por uno de los integrantes del equipo de investigación. Es importante mencionar que el profesor que implementó la actividad no era uno de los profesores habituales del grupo de estudiantes. La sesión fue grabada en video y

[2] Fotografía tomada de http://www.fcaf.cat/portal/2007/05/658/

posteriormente se realizó la transcripción de la grabación. La unidad de análisis fue el trabajo de los estudiantes en su conjunto.

La tarea. La tarea se dividió en dos fases (ver apéndice A), la primera de ellas fue orientada a que los estudiantes se familiarizaran con el uso de algunos de los comandos de Cabri, mediante la construcción de casos particulares de cuadriláteros, a partir de cuatro segmentos de longitud dada. En esta fase se formularon preguntas que ayudaran a los estudiantes a reconocer que dados cuatro segmentos, no siempre es posible construir un cuadrilátero con ellos por lados. En la segunda fase se les propuso la siguiente situación:

Un mecanismo de 4 barras no deformables y articuladas en sus extremos se llama mecanismo de Grashof, si al menos una de ellas pueda dar una revolución completa con relación a alguna de las otras. Formula un criterio para determinar si un cuadrilátero es un mecanismo de Grashof, en función de las longitudes de los lados del cuadrilátero.

Se sugirió a los estudiantes construir diversos casos particulares para que trataran de encontrar una relación entre los lados de aquellos cuadriláteros que funcionaban como mecanismos de Grashof. Se propuso que probaran con cuadriláteros en los cuales los cuatro lados son iguales, con cuadriláteros en los que dos pares de lados son iguales y en los cuadriláteros en los que todos los lados son diferentes. Durante la tarea se promovió el que los estudiantes no solamente realizaran conjeturas, sino que proporcionaran argumentos para justificarlas. Asimismo, se utilizó una animación tridimensional de un mecanismo como apoyo visual para que los estudiantes comprendieran el funcionamiento de un mecanismo articulado de cuatro barras de Grashof (Figura 2), además de que identificaran los nombres de sus componentes: la barra que puede dar revoluciones completas se denomina manivela, la barra que presenta un movimiento oscilatorio se denomina balancín, mientras que la barra que une dos manivelas o una manivela con un balancín se denomina acoplador y la barra fija se denomina bastidor.

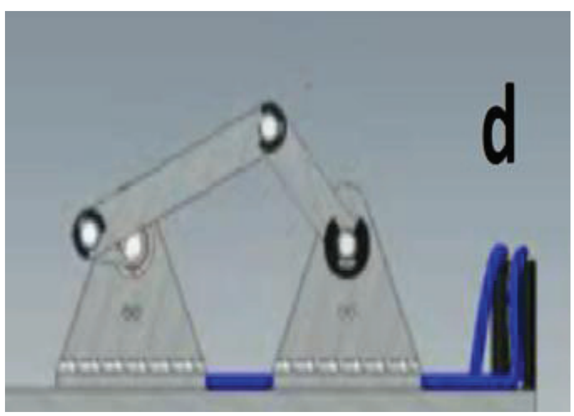

Figura 2. Simulación tridimensional de un mecanismo de Grashof.

Esta tarea posee un alta demanda cognitiva debido a que los estudiantes no disponen de un procedimiento o algoritmo que puedan aplicar de forma inmediata para obtener el criterio solicitado. Además de que no hay una ruta explícita o bien determinada para obtener una solución. La tarea requiere que los estudiantes exploren y entiendan conceptos, procesos y relaciones matemáticas, que accedan a sus recursos y que los utilicen para avanzar en el proceso de solución; en resumen, la tarea requiere que los estudiantes “hagan matemáticas” (Smith y Stein, 1998).

Primer episodio. Entendimiento y exploración de la tarea

En esta fase, los estudiantes iniciaron la exploración de la situación tratando de construir un cuadrilátero con base en cuatro segmentos (Figura 3). Los estudiantes se dieron cuenta de que no siempre era posible construir un cuadrilátero al analizar el caso en el que los segmentos dados miden 2, 3, 4 y 11 centímetros. Además distinguieron la diferencia entre la imposibilidad de realizar esta construcción y las dificultades observadas en la construcción del cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 centímetros, las cuales consistieron en que los estudiantes trazaban dos de los lados con el uso del compás, y cuando tenían que trazar los otros dos lados, no se percataron que para que cerrara el cuadrilátero, uno de los vértices debía ser a la intersección de dos circunferencias.

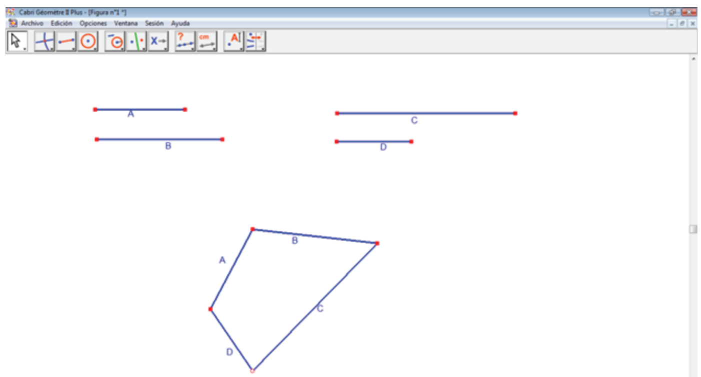

Figura 3. Construcción dinámica de un cuadrilátero a partir de cuatro segmentos dados.

En el extracto que se presenta a continuación se observa cómo los estudiantes mediante su trabajo con el software dinámico formularon la conjetura de que para que sea posible construir un cuadrilátero dados cuatro segmentos, la suma de tres cualesquiera de sus lados debe ser mayor que la longitud del lado restante. Los estudiantes expresaron además algunas ideas para sustentar la conjetura (I= Instructor, E= Estudiante).

I: muy bien… ¿quién ya tiene el cuadrilátero? … de lados 2, 3, 4 y 11? ¿Quién ya lo construyó?

E1: no se puede…. no se puede

E2: no cruza…

I: ¿no cierra?

E2: no

I: pero hace rato tampoco cerraba el anterior….

E2: pero es que aquí la suma de los otros tres lados no llega a ser la otra…

I: ¿entonces?

E2: no existe

E2: es que estos 3, nunca va a cerrar

I: … nos puedes decir lo que hace rato me comentaste, nos puedes decir en voz alta ¿por qué te diste cuenta que el cuadrilátero anterior no se iba a poder construir?

E2: bueno, eso era parte de la pregunta ¿no? ¿Qué criterios puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero puedas decir si su construcción es posible o no?… esto es porque si sumamos las longitudes de tres de los lados, esta suma debe de ser mayor al cuarto lado, porque si queda igual entonces quedaría sobrepuesto y entonces sería una línea recta ¿no? Entonces la suma de tres debe ser mayor a la cuarta…

La posibilidad de modificar las construcciones al variar dinámicamente las longitudes de los segmentos iniciales permitió a los estudiantes formular un criterio análogo a la desigualdad del triángulo para el caso de los cuadriláteros. En esta fase la acción del profesor fue importante para promover el que los estudiantes justificaran y expresaran sus argumentos y conclusiones.

Al abordar la actividad central sobre el criterio de Grashof, se observó que la mayoría de los estudiantes propuso casos particulares, por ejemplo el mecanismo de cuatro barras cuyas longitudes fueran 3, 4, 5 y 6. Los estudiantes realizaron diversos intentos hasta que finalmente pudieron construir un cuadrilátero que satisfizo el criterio de Grashof y que mostraba un comportamiento del tipo manivela-balancín[3], como el ejemplificado en la animación tridimensional que se les mostró.

Segundo episodio. Elaboración y justificación de conjeturas

Los estudiantes conjeturaron que la condición para que la manivela produzca revoluciones completas, tiene que ver con la suma de longitudes de dos de las barras y su comparación con la suma de las longitudes de las otras dos. El uso del comando animación y la posibilidad de construir fácilmente diversos casos particulares, a través de la modificación dinámica de segmentos o números, permitió a los estudiantes formular diversas conjeturas y discutir sus observaciones con sus compañeros.

E1: ya vi un factor… entonces la barra conectora y este tienen que ser mayor que la manivela y el soporte
E2: sí, o iguales
E1: o iguales, sí también iguales
E2: a ver si los hago que sean iguales, entonces a esta vamos a ponerle 2, 6 y 4 a esta, no 5 y 3, chécate que tal funciona [el mecanismo de lados 2, 6, 4 y 3 se "rompe" mientras que en el mecanismo con lados 2, 6, 5 y 3 todas las barras se alinean en algún momento]
E1: sí, sí funciona
E2: ¡no funciona!, ¿por qué no funciona? [es decir, las barras se alinean]
E1: ahora, ponle el resortito (se refiere a usar el comando animación), ¡huy! se rompió, acórtala
E2: ¿esta?, no, esa hay que hacerla más larga, acorta la otra, ahora trázalas…
E1: ya está
E2: ahora ocúltalos y ponle el resortito en ese punto, ¡huy! se rompió, acórtala y esa más grande, más, más, por ahí, ya está
E1: ya funcionó
E2: entonces este es el balancín
E1: entonces la suma de este que está fijo y la manivela
E2: la manivela y la base
E1: la suma de esas longitudes debe ser mayor o igual que la suma de los otros dos
E2: menor

[3] En un mecanismo de este tipo una de las barras funciona como manivela, mientras otra funciona como balancín que efectúa un movimiento oscilatorio en una trayectoria circular pero sin dar vueltas completas.

E1: no mayor o igual
E2: no menor, mira la suma de este y este dan 5 y algo y las otras dan 10 y algo
E1: entonces la suma debe ser menor o igual
E2: por eso, eso te estaba diciendo y tu decías que mayor
E1: entonces la de la barra y la manivela
E2: menor o igual que las otras dos
E1: ya está

El grupo de estudiantes anterior no fue el único que con base en el uso de la herramienta conjeturó las condiciones de la ley de Grashof. A continuación se presenta el extracto de la discusión de otro grupo de estudiantes que también elaboraron una conjetura similar.

E4: como te decía 2 y 3 son 5 y 7 es el más largo, entonces ahora este, ¿cuál es que tengo que animar? ¿Es este?
E3: depende cual sea tu barra acopladora, ¿cuál es tu barra fija?
E4: es que por ejemplo tienes estos dos, este es el más largo ¿no?, sumas estos dos y este, son 9, entonces este tiene que ser exactamente 9 para que funcione y pueda girar y no se va a romper… es que al momento, por ejemplo aquí cuando son colineales, en ese momento debe de medir los 3 juntos deben de medir la longitud del más largo para que no se reviente, cuando son colineales, en el momento que son colineales
E5: sería como el primero que hicimos ¿no?
E4: ajá, bueno cuando gira, por ejemplo ¿cuánto les da la suma?
E5: la suma de estos dos debe ser la misma que la de estos dos, ¿sí? porque intentamos con otros y no nos da…ajá, este y este si los sumas te da lo mismo si sumas este y este
E4: ¡aaah!, sí, por eso, debe ser porque por ejemplo cuando este está exactamente colineal todo, debe ser la misma longitud, por ejemplo estos dos y estos dos deben dar lo mismo o como te digo los 3 debe ser la misma longitud que uno
E5: a parte el que debe de girar es el que tiene menor longitud
E4: exactamente, el que tiene menor longitud es el que debe de girar, si giras el grande pues se va a tronar
E5: ¿qué pasa si gira otro?
E3: el sistema funciona a partir de que la base y el ¿cómo se llama?, estas tengan la misma longitud y sin importar que estas sean diferentes, inténtalo
E4: ahí por ejemplo, la suma de los dos que se están moviéndose
E3: da 5
E4: bueno por ejemplo ahí, no queda coplanar porque una longitud es mayor que las otras dos completas…

Algunos estudiantes tuvieron la iniciativa de explorar el comportamiento de los ángulos para encontrar relaciones entre las longitudes de los lados, los ángulos y el hecho de que el mecanismo sea de Grashof. Otro equipo dividió el cuadrilátero en dos triángulos por medio de una diagonal, para analizar los ángulos, lo que les permitió argumentar que las diagonales del mecanismo podían medir a lo más la suma o a lo menos la diferencia de dos de las barras. El mismo equipo propuso utilizar la ley de cosenos para tratar de calcular los ángulos del mecanismo en términos de las longitudes de las barras.

En general, todos los estudiantes formularon conjeturas en relación con la condición que debe satisfacer un mecanismo articulado de cuatro barras para funcionar como mecanismo de Grashof, aunque no todas ellas fueron correctas (Cuadro 1).

Cuadro 1. Conjeturas formuladas por los estudiantes

El tamaño de las barras, la barra móvil debe ser más pequeña que las otras
La longitud del paralelogramo
Que la suma de 2 lados es igual a la suma de los otros dos
De que la medida de dos de los lados (el fijo y el que gira) sea mayor que el lado acoplador
Yo pienso que deben ser iguales los lados o números continuos
Que la suma de dos lados debe ser igual a la suma de los otros dos
Que la suma de las longitudes de la barra y de la manivela debe ser menor a la suma de los dos segmentos restantes
Que la suma de las barras consecutivas sea igual a las otras dos, o que el de la manivela y la de soporte sea mayor que las otras dos
El lado más grande es la base, la suma del lado base y la manivela tiene que ser menor que los otros 2 lados
Que la suma de los lados A+B = C + D
Que la suma de dos lados sea igual a la suma de los otros dos lados
Que una debe ser pequeña en relación a las demás o 2 barras sumadas sus longitudes deben ser igual a la suma de las otras dos

Observaciones finales

El dinamismo de las representaciones que es posible construir con el software de geometría dinámica permitió a los estudiantes construir familias de configuraciones que les permitieron elaborar diversas conjeturas relacionadas con la construcción de cuadriláteros y con las condiciones de la Ley de Grashof, mediante aproximaciones empíricas y visuales. La forma de trabajo en parejas y en equipos de tres personas favoreció la discusión y el desarrollo de competencias matemáticas específicamente relacionadas con la formulación de justificaciones. Las justificaciones estuvieron centradas fuertemente en argumentos basados en la visualización y la construcción de casos particulares aunque también se expresaron argumentos deductivos de forma oral. El trabajo en equipo favoreció el que los estudiantes pusieran en práctica la competencia de comunicación al expresar sus observaciones ideas y justificaciones a sus compañeros y al instructor. También se promovió el uso de representaciones símbolicas y el desarrollo de una forma matemática de pensar. Se observó que el uso de la tecnología para abordar una actividad con alta demanda cognitiva favoreció el desarrollo de competencias matemáticas, y un ambiente de trabajo análogo al que desarrollan matemáticos profesionales al resolver problemas. Sin embargo hay que ser cautelosos al momento de realizar generalizaciones, porque los resultados de implementar este tipo de actividades se ven afectados por el contexto en que se desarrollan.

Referencias

Barrera-Mora, F. y Santos-Trigo, L. M. (2001). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 166-185). Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-254). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Chang, W.-T., Lin, C.-C., & Wu, L. I. (2005). A note on Grashof´s Theorem. *Journal of Marine Science and Technology, 13*(4), 239-248.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

Niss, M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges* (pp. 215-220). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2006). *PISA 2006, marcos de la evaluación - Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura* (Trad. Bercero Borja García). España: Santillana.

Santos-Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM, 39*, 523-536.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(5), 344-350.

Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268-275.

Apéndice A. Guía para la implementación de la actividad

Fecha:__________________________

Guía de la actividad

Instrucciones: Lee con atención lo que se te solicita, si tienes dudas pregunta al profesor, es importante que trates de responder a todas las preguntas, escribiendo todas las ideas y recursos matemáticos que utilices para dar solución.

Preámbulo

Abre el software de geometría dinámica Cabri Geometry y construye, de forma individual:

a) Un cuadrilátero de lados 5, 7, 8 y 13 centímetros. ¿Tuviste alguna dificultad?

Compara el cuadrilátero que tú construiste con el de tus compañeros más cercanos. ¿Hay alguna diferencia? En caso de existir diferencia ¿a qué lo atribuyes?

b) Un cuadrilátero de lados 2, 3, 4, y 11 centímetros. ¿Tuviste alguna dificultad?

Pregunta a tus compañeros más cercanos si ellos pudieron construirlo o no. ¿Qué diferencia percibes con respecto al cuadrilátero que se te solicitó construir anteriormente?

c) ¿Un cuadrilátero queda bien definido al especificar las longitudes de sus cuatro lados? ¿Por qué?

¿Qué criterio puedes seguir para que dados los lados de un cuadrilátero, puedas decidir si su construcción es posible o no?

Tiempo máximo: 15 minutos

Actividad central (lee con atención)

Un mecanismo de 4 barras no deformables y articuladas en sus extremos se llama mecanismo de Grashof si al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra. Formula un criterio para determinar si un cuadrilátero es un mecanismo de Grashof, en función de las longitudes de los lados del cuadrilátero.

Sugerencia:

Trata de representar la información con ayuda del software dinámico, si tienes dudas respecto a la actividad pregunta al profesor. Puedes usar el comando animación para confirmar si alguna de las barras da giros completos.

Si todavía no logras construir un cuadrilátero que funcione como un mecanismo de Grashof, observa con atención la animación en video que se proyectará de un mecanismo cuatro barras: (Observar video)

¿Aún no logras representar un mecanismo de Grashof?

Observa con atención los intentos previos que realizaste en el software dinámico

¿De qué crees que depende el que una de las barras del mecanismo pueda dar una revolución completa?

Tiempo máximo para explorar: 15 minutos

Para tratar de entender qué está pasando con el problema, es decir, por qué algunos cuadriláteros trabajan como mecanismos de Grashof y otros no, te invitamos que trabajes los siguientes casos particulares, formando equipo con otro compañero. Si tienes dudas de la forma en que vas a trabajar, pregunta al profesor.

Análisis de casos particulares

Caso I. ¿Qué pasa si A = B =C = D?

Para este primer caso, con la guía del profesor, construyan un mecanismo de 4 barras articuladas, en el cual, las cuatro barras tengan la misma longitud.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

II. ¿Qué pasa si A=B y C=D o A=C y B=D? A continuación, revisen en equipo los casos en los que las 4 barras no tengan la misma longitud, pero que se tengan dos barras de la misma longitud, y otras dos de diferente longitud a las primeras, pero iguales entre sí.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

Caso III. A + B = C + D; o A + C = B + D. Ahora realicen la configuración de un mecanismo, en el cual las cuatro barras sean de diferente longitud, pero que la suma de longitudes de dos, sea igual a la suma de otras dos, por ejemplo, configurar el mecanismo cuatro barras con los datos A=2; B=7 ; C=4 ; D =5.

Anoten sus conclusiones y observaciones (discute con tu compañero y lleguen a un acuerdo)

Tiempo máximo para analizar los tres casos: 30 minutos

Después de revisar los casos anteriores ¿tienen alguna conclusión respecto a la pregunta inicial? ¿Tienen sospechas respecto a qué se debe cumplir para que una de las barras gire vueltas completas? Discutan entre compañeros de equipo y escriban las conclusiones que tienen o los acuerdos a los que han llegado respecto a la pregunta.