DeLaSalle | Universidad La Salle Pachuca | Universidad La Salle Cuernavaca
28–29 Octubre, 2010
Universidad La Salle Pachuca Campus La Concepción
XIII Coloquio para la Enseñanza de las Matemáticas
"Dr. Alfonso Nápoles Gándara"

Enseñanza de la Ley de Grashof con Cabri Geometry: Una Tarea de Aprendizaje

M. Campos Nava (1), F. Barrera Mora (2), A. Reyes Rodríguez (3)

(1) *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
Área Académica de Matemáticas y Física
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C. P. 42184
mkmpos77@yahoo.com.mx

(2) *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
Área Académica de Matemáticas y Física
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México. C. P. 42184
barrera@uaeh.edu.mx

(3) *Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*
Área Académica de Matemáticas y Física
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, Col. Carboneras
Mineral de la Reforma, Hidalgo, México, C. P. 42184
aaronr@uaeh.edu.mx

***Resumen*— Un elemento fundamental en la enseñanza de las matemáticas son las tareas que el profesor diseña para que el estudiante construya conocimiento o desarrolle alguna idea matemática. Por tal razón, resulta relevante preguntar si es posible establecer un conjunto de principios que orienten el diseño de tareas de instrucción. En este artículo se identifican y estructuran algunos principios de los marcos de resolución de problemas, demanda cognitiva y mediación instrumental que se utilizaron para diseñar una tarea sobre mecanismos articulados, la cual se implementó con estudiantes de segundo semestre de una licenciatura en Física. Los resultados indican que la tarea favoreció el desarrollo de diversos elementos del pensamiento matemático en los estudiantes; sin embargo, fueron las estrategias didácticas utilizadas por el profesor las que determinaron el nivel de demanda cognitiva durante la actividad en el aula.**

Palabras clave— Tareas de Aprendizaje, Pensamiento Matemático, Software Dinámico, Ley de Grashof.

I. Introducción

De acuerdo con [1] las tareas que el profesor emplea en el salón de clase son la base para el aprendizaje de los estudiantes. Las tareas que demandan llevar a cabo procedimientos memorísticos, o aquellas que requieren de un razonamiento conceptual y el establecimiento de conexiones entre diferentes conceptos y técnicas, ofrecerán a los estudiantes oportunidades diferentes para aprender ¿Qué tipo de tareas son adecuadas para promover el desarrollo de una forma matemática de pensar? ¿Qué elementos se deben considerar en su diseño? La perspectiva de resolución de problemas considera que las tareas no rutinarias son vehículos para favorecer una forma de pensar consistente con el quehacer que desarrolla un matemático durante su actividad profesional. Estas tareas se caracterizan porque permiten al estudiante explorar, discriminar entre información relevante de aquella que no lo es, encontrar relaciones entre datos e incógnitas, observar patrones, formular y validar conjeturas, comunicar resultados y elaborar generalizaciones.

Las tareas de aprendizaje en matemáticas son importantes por tres razones: (i) la instrucción en clase, por lo general, se organiza alrededor de tareas matemáticas, (ii) las tareas en que los estudiantes se involucran determinan lo que aprenden y cómo lo aprenden y (iii) las tareas son un medio para que los investigadores realicen propuestas curriculares [2].

En este contexto, y dado que una de las funciones principales de los profesores de matemáticas, debiera consistir en diseñar actividades o tareas de aprendizaje que promuevan entre los estudiantes un proceso de discusión que conduzca al desarrollo de una forma matemática de pensar, la presente investigación busca documentar y analizar el papel de una tarea de instrucción, diseñada bajo los principios de tres perspectivas teóricas, en el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento matemático en los estudiante, así como de un aprendizaje con entendimiento [3].

II. MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual de la investigación está integrado por tres elementos:

(i) la perspectiva de resolución de problemas, que aporta el sustento para responder a preguntas tales como: ¿qué significa aprender matemáticas?, y ¿qué significa pensar matemáticamente? Una idea importante en resolución de problemas es que el aprendizaje de las matemáticas involucra el desarrollo de una disposición para explorar e investigar relaciones, emplear distintas formas de representación al analizar fenómenos, usar distintos tipos de argumentos y comunicar resultados [4]. Es decir, que el estudiante use estrategias empleadas comúnmente por los matemáticos al resolver problemas [5];

(iii) el uso de las tecnologías digitales es un elemento que influye en el proceso de aprendizaje, dado su carácter de mediador entre el sujeto que aprende y el objeto de aprendizaje, por lo que es necesario integrar construcciones teóricas que ayuden a prever el efecto del uso de estas herramientas sobre la actividad de los estudiantes y los procesos cognitivos que pueden desarrollar durante la construcción de comprensión conceptual. Por ejemplo, el uso de una herramienta computacional no solo hace más potentes algunas heurísticas (estrategias de resolución de problemas), sino que también demanda del estudiante mayores niveles de razonamiento [4]. Una premisa teórica considerada en este trabajo es que cuando se incluye a las herramientas tecnológicas en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, estas permiten no sólo realizar un mejor trabajo, sino que permiten desarrollar una forma diferente de pensar y aprender [6];

(iii) el tercer elemento que se incorpora al marco conceptual, es el constructor de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje matemático [7], el cual se incluye porque este es un aspecto fundamental para que el estudiante logre el objetivo u objetivos de aprendizaje, esto es, construya conocimiento matemático a través de su acción sobre la tarea.

Es importante mencionar que la demanda cognitiva de una tarea matemática puede decaer durante la implementación de la misma, por lo cual el profesor debe estar atento al desarrollo de la actividad de los estudiantes para promover un ambiente de trabajo en el que el nivel de demanda se mantenga o incremente. En la tabla 1, se muestran las actividades y procesos asociados con el mantenimiento o disminución de los niveles de demanda cognitiva durante la ejecución de una tarea [8].

TABLA 1
PROCESOS ASOCIADOS CON EL MANTENIMIENTO O DISMINUCIÓN DEL NIVEL DE DEMANDA COGNITIVA

Mantenimiento	Disminución
(i) "Presionar" a los estudiantes para que den justificaciones, explicaciones y/o significado a través preguntas y/o comentarios. (ii) Seleccionar tareas que se basan en conocimientos previos del estudiante. (iii) Elaborar dibujos frecuentemente, para buscar conexiones conceptuales. (iv) Proporcionar suficiente tiempo para explorar.	(i) Hacer rutinarios aspectos problemáticos de la tarea. (ii) Desviar la atención del significado, conceptos, o la comprensión de la idea central de la actividad. (iii) Proporcionar poco tiempo para entender la tarea, o dar demasiado al grado de que los estudiantes queden a la deriva. (iv) Seleccionar tareas inapropiadas para determinado grupo de estudiantes.

III. METODOLOGÍA

Para la fase de trabajo de campo, se diseñó una tarea de aprendizaje matemático que se implementó en una universidad pública, con un grupo de doce estudiantes de segundo semestre de una licenciatura en física, cuyas edades estaban comprendidas entre los dieciocho y veinticinco años de edad. Durante el primer semestre de sus estudios de licenciatura los estudiantes cursaron una asignatura en la cual hicieron un uso sistemático de herramientas computacionales para resolver problemas, y en el semestre durante el cual se llevó a cabo la actividad cursaban Cálculo Diferencial y Geometría Analítica. La mayoría de los estudiantes manifestó tener poca experiencia con el uso del software de geometría dinámica Cabri Geometry, aunque habían usado Geogebra y Maple.

La tarea que se diseñó, se enmarca en el contexto de la mecánica, particularmente en el área de la cinemática de mecanismos, en la cual existe un criterio para verificar bajo qué condiciones una de las barras de un mecanismo de cuatro barras articuladas podrá efectuar revoluciones completas, con relación a alguna de las otras tres. Este criterio se conoce como Ley de Grashof y tiene relación con propiedades geométricas de cuadriláteros. La motivación principal para elegir esta actividad fue que en la literatura consultada, se enuncia dicho criterio sin hacer una discusión respecto de su validez [7].

El diseño de la actividad consideró 4 elementos que desde nuestra perspectiva debe poseer toda tarea: (i) un objetivo de aprendizaje, (ii) consideración de los elementos matemáticos que se estructurarán en torno al objetivo de aprendizaje, (iii) descripción del escenario para desarrollar la tarea y (iv) consideración y análisis de un proceso inquisitivo, descrito mediante una trayectoria hipotética [4].

En mecánica, un mecanismo de cuatro barras no deformables, articuladas en sus extremos, es también conocido como mecanismo de Grashof, si se cumple que al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra. Dado un cuadrilátero cuyas longitudes de sus lados son A, B, C y D, averigüe si es un mecanismo de Grashof. ¿Qué criterio puede usar para saber si un mecanismo de 4 barras, es de Grashof?

Durante la ejecución de la tarea, la actividad del profesor consistió en hacer preguntas que motivaran a los estudiantes para tratar de justificar sus observaciones, comunicar sus ideas y resultados. Este proceso inquisitivo tuvo el objetivo de mantener el nivel de demanda cognitiva de la tarea. Las preguntas que el profesor formulara no debían de ayudar de más al estudiante, pero debían enunciarse de forma tal que guiaran su trabajo y le permitieran encontrar las conexiones propuestas en la ruta hipotética elaborada de forma previa a la implementación de la tarea.

En la fase de análisis se contrastó la ruta hipotética contra la ruta seguida realmente por los estudiantes y se trató de identificar qué variables influyeron en las desviaciones.

IV. RESULTADOS

Durante el desarrollo de la actividad, se sugirió a los estudiantes que abordaran algunos casos particulares y que fueran explorados con Cabri Geometry, particularmente con apoyo del comando "animación" con lo cual se esperaba que los estudiantes identificaran patrones de comportamiento en las distintas configuraciones geométricas, que plantearan conjeturas sobre el funcionamiento del mecanismo de Grashof, para posteriormente tratar de justificarlas formalmente.

En la figura 1 se muestra un caso particular en el que mecanismo de longitudes 2, 4, 5 y 7 configurado en Cabri puede funcionar como mecanismo de Grashof, al animar la barra más corta y mantener inmóvil la barra de longitud 5 , se verifica que puede dar vueltas completas sin problemas.

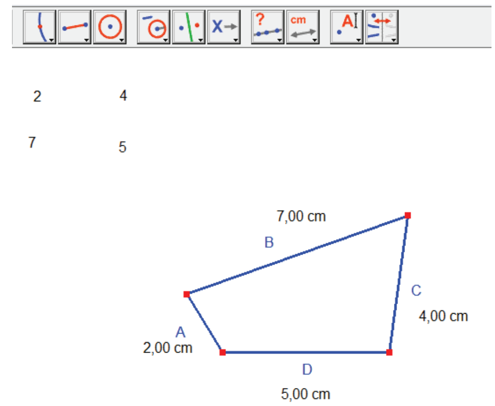

Fig 1 Posible configuración para un mecanismo.

Este caso particular que fue propuesto a los estudiantes, les permitió conjeturar que si las longitudes de las barras más corta y más larga (2 y 7) suman lo mismo que las longitudes de las otras dos barras (4 y 5), el mecanismo puede operar como tipo Grashof.

En la figura 2, se muestra otra configuración con cuatro barras de las mismas longitudes que en el caso previo. Al tratar de animar la barra de longitud 4 y mantener estática la barra más larga, se verifica que el mecanismo no puede operar como tipo Grashof.

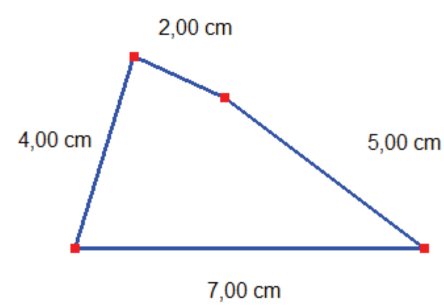

Fig 2 Otra configuración con las mismas barras

En la figura. 1 se puede notar que las barras A y C articuladas por uno de sus extremos a la barra D (estática), tratan de efectuar movimientos de rotación pura, sin embargo la barra B tiene una tendencia muy particular: trata de rotar, pues sus extremos están articulados con los extremos libres de A y C, y además tiene tendencia a trasladarse. Este tipo de movimiento, se conoce en cinemática, como movimiento plano general. Los puntos intermedios de la barra B, también llamada barra acopladora, describen por lo general lugares geométricos poco comunes, que suelen representarse con polinomios de hasta sexto grado [9].

Durante la realización didáctica se observó que la mayoría de los estudiantes propuso sus propios casos particulares con el objetivo de obtener una mejor compresión de la tarea. Propusieron, por ejemplo, el mecanismo de cuatro barras cuyas longitudes fueran 3, 4, 5 y 6, por otro lado los estudiantes empezaron a conjeturar que la condición para que la manivela gire completamente tiene que ver con la suma de longitudes dos de las barras y su comparación con la suma de las longitudes de las otras dos.

Algunos estudiantes tuvieron la iniciativa de explorar el comportamiento de los ángulos para encontrar relaciones entre las longitudes de los lados, los ángulos y el hecho de que el mecanismo funcione. Un equipo por cuenta propia empezó a cuestionarse ¿qué pasa si en la misma configuración tratamos de dar giros a otra de las barras?, es decir, sugirieron cambiar de manivela. Otro equipo dividió el cuadrilátero en dos triángulos por medio de una diagonal, para analizar los ángulos, lo que les permitió argumentar que las diagonales del mecanismo podían medir a lo más la suma, o a lo menos, la diferencia de dos de las barras. El mismo equipo propuso utilizar la ley de cosenos para tratar de calcular los ángulos del mecanismo en términos de las longitudes de las barras.

En términos generales, las observaciones preliminares al término de la realización didáctica, permiten considerar que los objetivos planteados para la tarea de aprendizaje fueron alcanzados y el software de geometría dinámica fue relevante para tal fin, ya que les permitió a los estudiantes descubrir por cuenta propia la Ley de Grashof. Los estudiantes mostraron disposición para tratar de justificar formalmente sus conjeturas.

Una de las aportaciones relevantes de este estudio es que a diferencia de estudios previos relacionados con el diseño de tareas de aprendizaje, se trató de mostrar con detalle cómo fue diseñada una tarea en particular, desde la elección de un contexto, el establecimiento los objetivos de aprendizaje, la forma en que los elementos del marco conceptual incidieron en el diseño, hasta el desarrollo de la guía de aplicación, el establecimiento de rutas hipotéticas de solución y las preguntas que se consideran relevantes para que el profesor propicie un ambiente inquisitivo durante la implementación de la tarea.

Con base en los resultados obtenidos en este trabajo se sugieren algunas líneas de investigación que podrían ayudar a avanzar en la agenda orientada a establecer el papel de las tareas de instrucción en el desarrollo de un pensamiento matemático en los estudiantes.

(1) Contrastar las estrategias de resolución de tareas de aprendizaje diseñadas bajos los principios aquí establecidos en diferentes escenarios de instrucción.

(2) Revisar el marco de la demanda cognitiva de las tareas de aprendizaje con base en tareas que promueven el uso de tecnologías digitales.

(3) Análisis de los elementos de un diseño curricular basado en tareas de aprendizaje matemático.

(5) Análisis de las características de los sistemas de formación profesional que propicien el desarrollo de conocimientos y habilidades necesarios en el diseño de tareas de aprendizaje.

V. APÉNDICE A

ALGUNOS PRINCIPIOS IDENTIFICADOS PARA EL DISEÑO DE TAREAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Resolución de Problemas

Las actividades planteadas deben centrarse en el proceso de pensamiento de los estudiantes, de forma que favorezcan su autonomía y les permita reconocer que un problema puede tener múltiples soluciones.

Las actividades deben promover y facilitar la experimentación, así como la elaboración de conjeturas; la discusión y comunicación de ideas y estrategias, además de que deben crear conexiones entre los conocimientos previos y los que se vayan adquiriendo.

Deben conectar distintas áreas de las matemáticas u otras áreas del conocimiento.

Demanda Cognitiva

Plantear problemas que admiten varias soluciones y representaciones, y que creen conexiones entre distintas áreas de las matemáticas.

Proveer el tiempo adecuado para solución de la tarea, (ni mucho, ni poco).

Plantear problemas que se basen en los conocimientos previos de los estudiantes.

Realizar preguntas que permita a los estudiantes la extensión de la actividad y la generación de nuevos problemas.

Tecnología Digital

El uso de software dinámico para resolver las tareas debe contribuir a evitar o disminuir prácticas algorítmicas únicamente.

La tecnología puede favorecer la identificación de patrones subyacentes a la resolución de la tarea.

El software se debe usar para facilitar la identificación e implementación de heurísticas en la solución de los problemas e incluso para extenderlas.

La incorporación de herramientas digitales puede permitir a los estudiantes explorar problemas que con solo lápiz y papel serían menos accesibles.

VI. APÉNDICE B

SUGERENCIAS EN RELACIÓN CON EL DESARROLLO CURRICULAR

I. Los contenidos matemáticos a discutir en clase deberían estar enfocados a no sólo fomentar aspectos rutinarios y memorísticos.

II. Bajo el enfoque presentado en este trabajo, los contenidos no pueden enseñarse en una secuencia lineal, que es como suelen aparecer en el currículum.

III. El tiempo asignado a la revisión de cada contenido debería ser lo suficientemente extenso para que los estudiantes se involucren con procesos tales como identificar patrones, plantear estrategias de resolución de problemas, experimentar ideas, plantear conjeturas, tratar de dar justificaciones formales, extender y formular nuevos problemas (pensar matemáticamente).

IV. La tecnología digital en clase de matemáticas debería ser sistemática, ya que existe consenso en cuanto a la importancia que tienen.

V. La demanda cognitiva es un elemento a tomar en cuanta durante el diseño curricular, establecer actividades de aprendizaje con un alto nivel de demanda cognitiva es fundamental.

VII. AGRADECIMIENTOS

Los dos primeros autores agradecen el apoyo recibido de Conacyt, a través del proyecto de investigación con referencia #61996.

VIII. REFERENCIAS

[1] W. Doyle, "Work in mathematics classes: the context of students' thinking during instruction," *Educational Psychologist*, vol. 23, pp. 167-180, Feb. 1988.

[2] M. K. Stein, J. Remillard, and M. Smith, M, "How curriculum influences student learning," in *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, vol. 1, F.K. Lester, Ed. New York: Macmillan, 2007, pp.319-369.

[3] J. Hiebert, T. P. Carpenter, E. Fennema, K. C. Fuson, D. Wearne, H. Murray, A. Olivier, and P. Human, *Making sense: teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann, 1997.

[4] F. Barrera, "Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales," Área Académica de Matemáticas y Física, Mineral de la Reforma, Hidalgo, Segundo Reporte Técnico del Proyecto CONACYT #61996, Jul. 2008.

[5] M. Santos-Trigo, *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México: Trillas, 2007.

[6] A. Aviram, "From 'computers in the classroom' to mindful radical radical adaptation by education systems to the emerging cyber culture," *Journal of Educational Change*, vol. 1, pp. 331-352, 2000.

[7] J. Shigley, J. *Análisis Cinemática de Mecanismos.* México: MacGraw Hill, 1970, p.184.

[8] M. K. Stein, and M. S. Smith, "Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice," *Mathematics teaching in the middle school*, vol. 3, pp. 268-275, Jan. 1998.

[9] J. Shigley, and J. Uiker, *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. México: McGraw Hill, 1999, p. 23.