Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Área Académica de Matemáticas y Física

Línea de investigación: Biomatemáticas
Programa educativo: Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Nombre de la asignatura: Optativa de Matemáticas Aplicadas.
Tema: Dinámica de poblaciones.
Ciclo: Julio-Diciembre de 2007.
Profesor: Roberto Ávila-Pozos

Tema: Dinámica de poblaciones
Abstract: In this course we present some mathematical models to understand fundamental biological processes such as population growth, mutation and natural selection. It is an introductory course in mathematical modeling with a focus on biomathematics.
Keywords: Biomathematics, Mathematical Models.
Palabras clave: Biomatemáticas, Modelos matemáticos.

Primera Escuela de Verano en Biomatemáticas

Roberto Ávila-Pozos

Centro de Investigación en Matemáticas
Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

5 de junio de 2007

Modelo de crecimiento Malthusiano de tiempo discreto

Sea $N[n]$ la población al tiempo n
La población en cualquier momento está definida por

$$N[n+1] = N[n](1 + b - d)$$

donde b es la tasa de nacimientos y d la tasa de defunciones
Si b y d no cambian en el tiempo, decimos que el proceso es *estacionario*
Sea $\lambda = 1 + b - d$, de tal forma que

$$N[n+1] = \lambda N[n]$$

Modelo de crecimiento Malthusiano de tiempo discreto

Si definimos $N[0]$ la población en el tiempo $n = 0$

$$N[1] = \lambda N[0]$$

De la misma manera

$$N[2] = \lambda N[1] = \lambda\lambda N[0] = \lambda^2 N[0]$$

En general

$$N[n] = \lambda^n N[0]$$

Modelo de crecimiento Malthusiano de tiempo continuo

Sea $N(t)$ la población en cualquier instante t
El cambio de la población en el tiempo, está dada por

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t)(b-d)$$

donde b y d son constantes y representan las tasas de nacimientos y decesos, respectivamente

Para encontrar el valor de $N(t)$, debemos resolver esta *ecuación diferencial de variables separables*

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = (b-d)dt$$

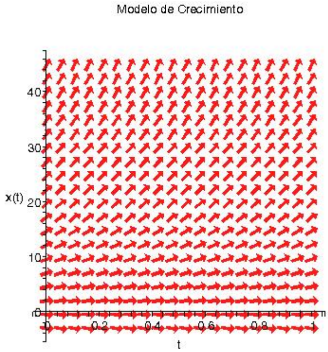
Modelo de crecimiento Malthusiano de tiempo continuo

Entonces la solución está dada por

$$N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$$

donde N_0 es la población en el tiempo $t = 0$
Si $(b - d) > 0$, entonces $N(t)$ crece
Si $(b - d) < 0$, entonces $N(t)$ decrece
Si $(b - d) = 0$, entonces $N(t)$ no cambia

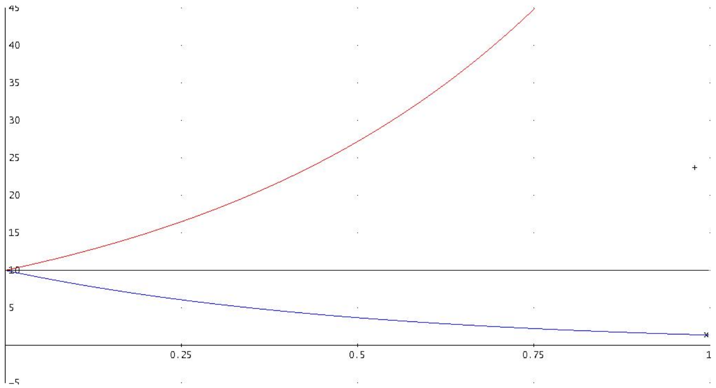
Modelo de crecimiento Malthusiano de tiempo continuo



Campo de direcciones para la ecuación diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = (b - d)N(t)$$

Modelo de crecimiento Malthusiano de tiempo continuo



Gráficas de $N(t)$ para $2 = (b - d) > 0$, $-2 = (b - d) < 0$ y $(b - d) = 0$, con $N_0 = 10$

Modelo logístico

Pensemos ahora en un modelo en el que el crecimiento está limitado. Un modelo de ese tipo, es el llamado *modelo logístico*

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

donde r y K son constantes y están relacionadas con la tasa de nacimiento y los procesos de regulación, respectivamente.
Esta ecuación también se puede escribir como una ecuación diferencial de variables separables de la forma

$$\frac{dN(t)}{N(t)(K - N(t))} = \frac{r}{K}dt$$

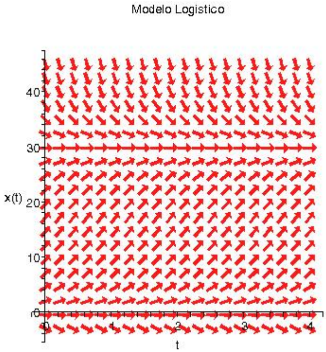
Modelo logístico

Cuya solución es

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 - (N_0 - K)e^{-rt}}$$

En $t = 0$, $N(t) = N_0$ y
lím $= K$

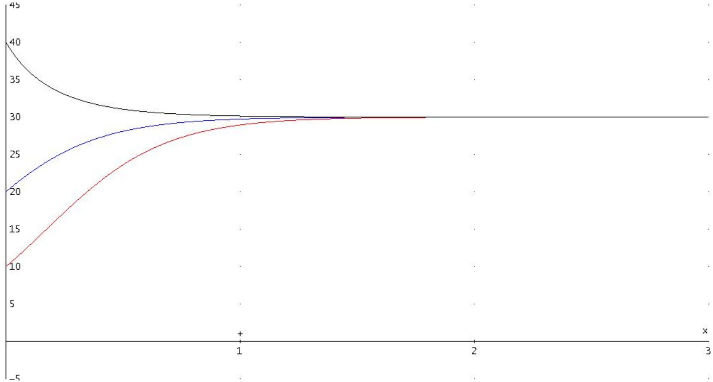
Modelo logístico



Campo de direcciones para la ecuación diferencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Modelo logístico



Gráficas de $N(t)$ para $N_0 = 10$, 20 y 40, con $K = 30$ y $r = 2$