Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Escuela Superior de Tizayuca
Tópicos Selectos de Robótica II
Dr. Farid García Lamont

Modelo dinámico de robots manipuladores

Contenido

- Modelado de Euler-Lagrange
- Velocidades
- Esquema del robot
- Ejes de referencia
- Transformaciones homogéneas
- Estimación del Jacobiano

Modelo dinámico

- Modelo Dinámico (Ecuacion de Euler-Lagrange)
  - Energías cinética y potencial (Lagrangiano)
    - Velocidades angulares y lineales de centros de masa
      - Obtención de Jacobianos
        - Transformaciones homogéneas
          - Sistemas de referencia (Denavit-Hartenberg)
            - Grados de libertad

Ecuación de Euler-Lagrange

Obtención de las energías **cinética** *K* y **potencial** *V*, para formar el *Lagrangiano L*:

$$L = K - V$$

Modelo dinámico al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, i = 1, \ldots, n$$

Donde:

q_i: son las coordenadas generalizadas,
Q_i: son las fuerzas externas,
n: es el numero total de juntas.

Energía cinética

Movimiento lineal:

$$K_v = \frac{m}{2} v^T v$$

Donde:

m: masa del eslabón,
v: velocidad lineal de la masa.

Movimiento rotacional:

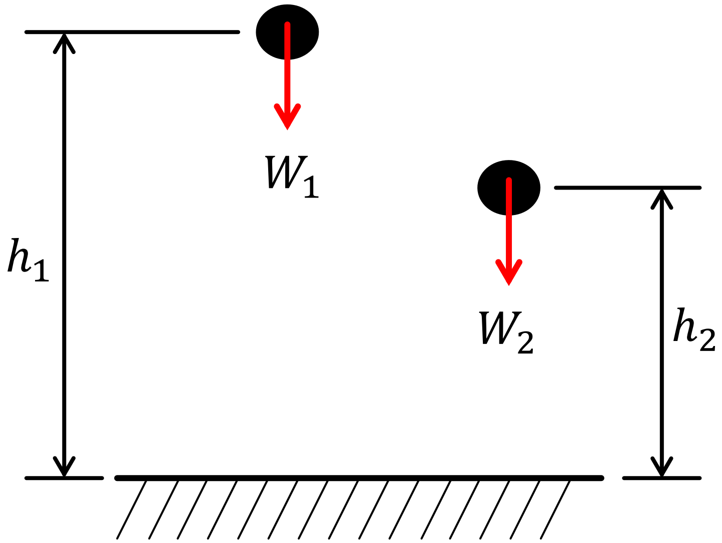
$$K_\omega = \frac{1}{2} \omega^T I \omega$$

Donde:

ω: velocidad angular del eslabón,
I: matriz de momentos de inercia.

Energía potencial

Capacidad que tiene un sistema para realizar un trabajo en función de su posición, i.e., es la energía almacenada que un sistema puede entregar.



Energía potencial que acumulan los pesos es:

$$V_1 = W_1 h_1$$
$$V_2 = W_2 h_2$$

Si $W_1 = W_2$, se puede ver que:

$$V_2 < V_1.$$

Velocidades lineales

$$v_p = J_v(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

v_p Vector de velocidad lineal de un punto p (puede ser el efector final o una junta en especifico).

$\boldsymbol{q}$ Vector de coordenadas de los grados de libertad.

$\dot{\boldsymbol{q}}$ Vector de derivadas, respecto del tiempo, de las coordenadas de los grados de libertad.

J_v Matriz Jacobiana, del movimiento lineal, del punto p del robot.

Velocidades angulares

$$\omega_p = R_p^T J_\omega(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

ω_p Vector de velocidad angular del eslabón p.

R_p^T Matriz rotacional del eslabón p respecto de la base del robot.

$\boldsymbol{q}$ Vector de coordenadas de los grados de libertad.

$\dot{\boldsymbol{q}}$ Vector de derivadas, respecto del tiempo, de las coordenadas de los grados de libertad.

J_ω Matriz Jacobiana, del movimiento angular del eslabón p del robot.

Matriz de momentos de inercia

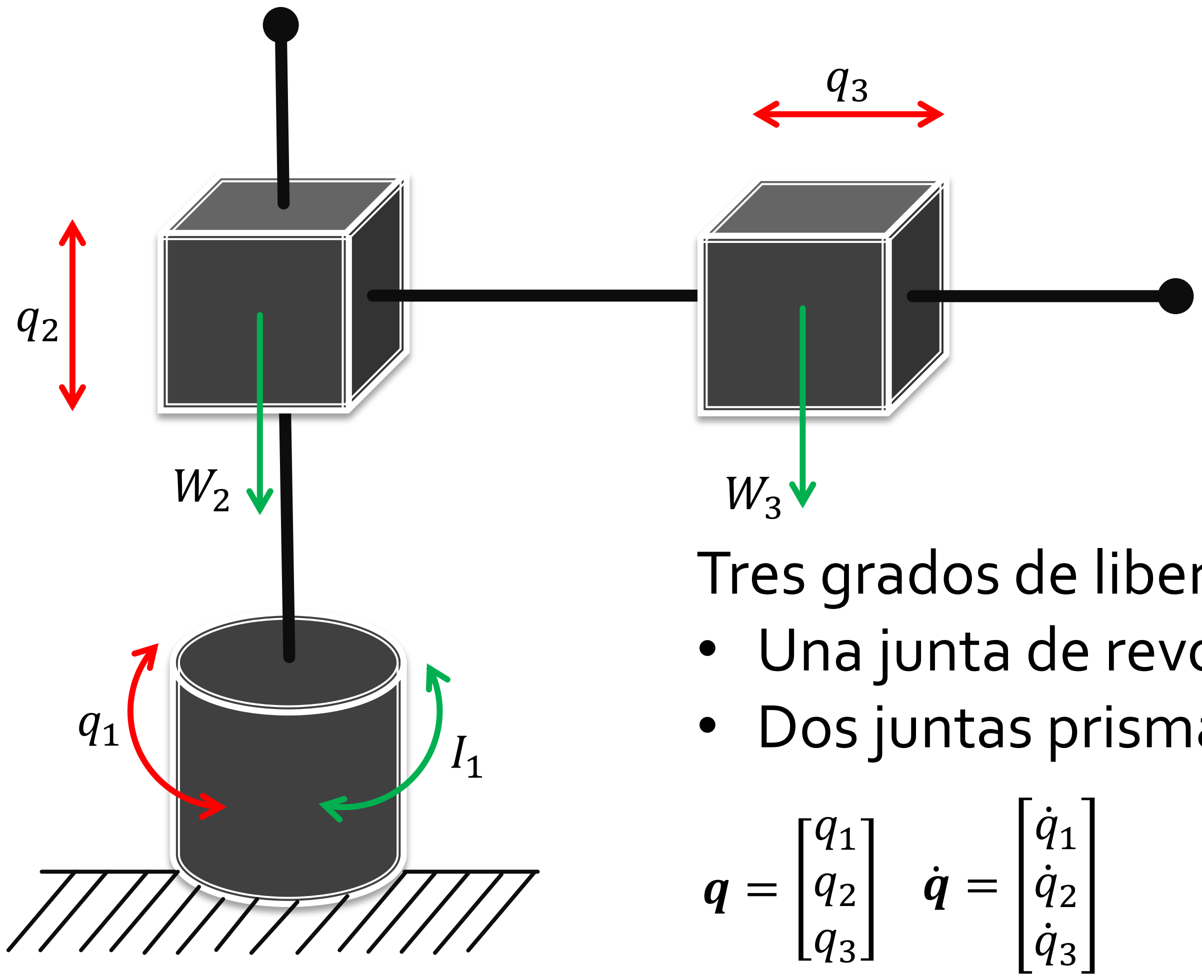
$$I = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2)dm & -\int xydm & -\int xzdm \\ -\int xydm & \int (x^2 + z^2)dm & -\int yzdm \\ -\int xzdm & -\int yzdm & \int (x^2 + y^2)dm \end{bmatrix}$$

Donde $\int dm = \int \rho(x, y, z)dxdydz$, siendo $\rho(x, y, z)$ la función de densidad de los eslabones. La cual, para este caso, se asume constante.

El calculo de los momentos de inercia también depende de la geometría de los eslabones. Por comodidad, la matriz se queda indicada como:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Robot cilíndrico (esquema)



Tres grados de libertad:

- Una junta de revolución
- Dos juntas prismáticas

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Lagrangiano del robot

Energía cinética:

Movimiento rotacional

$$K = \frac{1}{2}\omega_1^T I_1 \omega_1 + \frac{m_2}{2} v_2^T v_2 + \frac{m_3}{2} v_3^T v_3$$

Movimiento lineal

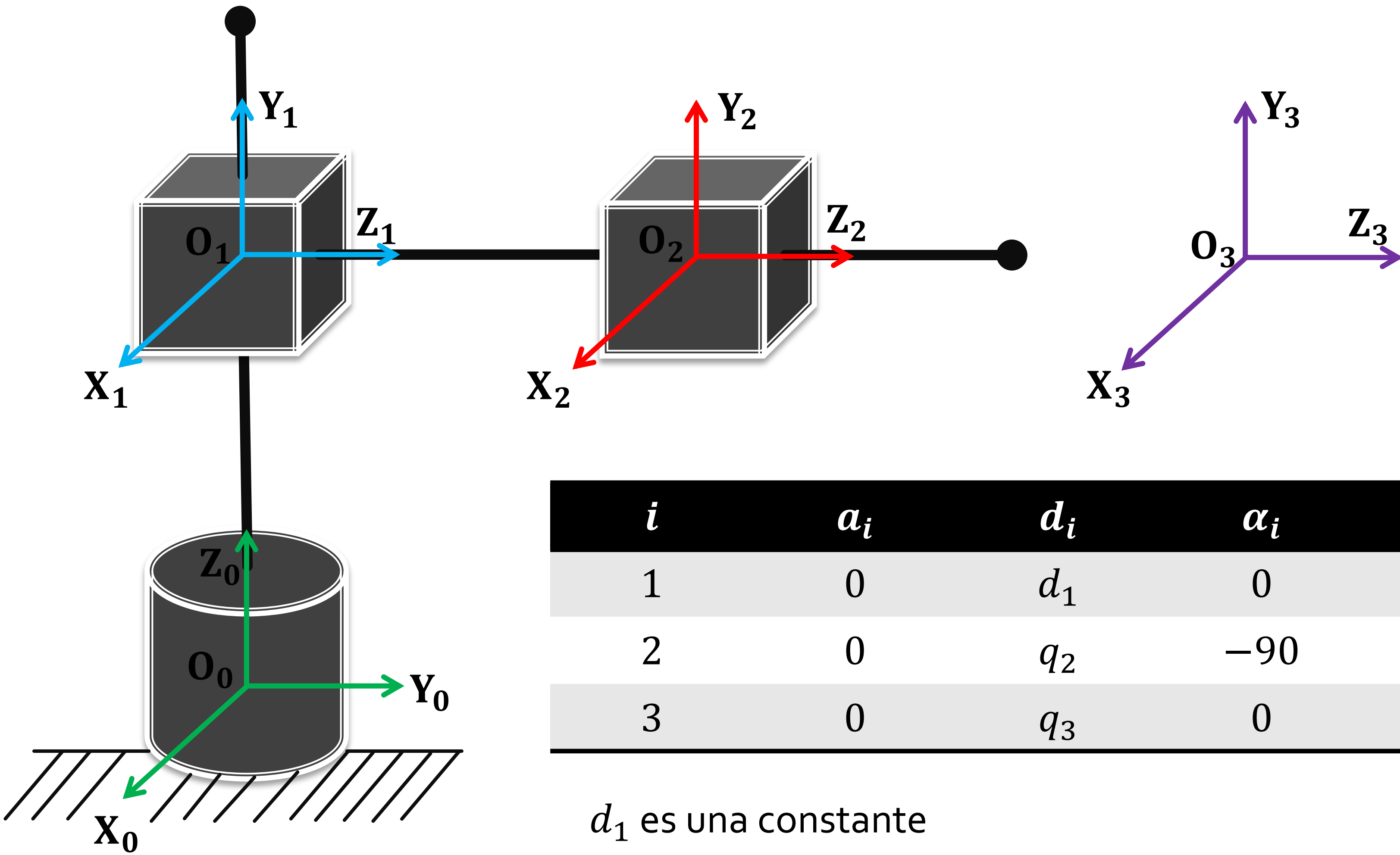
Energía potencial:

$$V = (W_2 + W_3)q_2$$

Por lo tanto el Lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}\omega_1^T I_1 \omega_1 + \frac{m_2}{2} v_2^T v_2 + \frac{m_3}{2} v_3^T v_3 - (W_2 + W_3)q_2$$

Asignación de referenciales



i	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	0	d_1	0	q_1
2	0	q_2	-90	0
3	0	q_3	0	0

d_1 es una constante

Convención Denavit-Hartenberg

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\cos\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	a_i	d_i	α_i	θ_i
1	0	d_1	0	q_1
2	0	q_2	-90	0
3	0	q_3	0	0

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformaciones homogéneas

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & -q_3 \sin q_1 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & q_3 \cos q_1 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$T_0^1 = \mathbf{A}_1$$

$$T_0^2 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$$

$$T_0^3 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$$

Construcción del Jacobiano

$J = [J_1, \dots, J_n]$ Donde *n* es la cantidad de juntas y $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$ si la junta es prismática.

$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix}$ si la junta es rotacional.

Dado $T_0^i = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_i$, entonces:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{r_{11}} & \phantom{r_{12}} & Z_{i-1} & O_i \end{array} \\
T_0^i = & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & dx \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & dy \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Jacobianos de centros de masa

$$J_1 = \begin{bmatrix} Z_0 \times (O_1 - O_0) & \vec{0} & \vec{0} \\ Z_0 & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z_0 O_1

$$O_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

J_{v_1}

J_{ω_1}

$$J_{v_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobianos de centros de masa

$$J_2 = \begin{bmatrix} Z_0 \times (O_2 - O_0) & Z_1 & \vec{0} \\ Z_0 & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z_1

O_2

$$O_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

J_{v_2}

J_{ω_2}

$$J_{v_2} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin q_1 & 0 \\ 0 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobianos de centros de masa

$$J_3 = \begin{bmatrix} Z_0 \times (O_3 - O_0) & Z_1 & Z_2 \\ Z_0 & \vec{0} & \vec{0} \end{bmatrix}$$

$$T_0^3 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & -\sin q_1 & -q_3 \sin q_1 \\ \sin q_1 & 0 & \cos q_1 & q_3 \cos q_1 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z_2

O_3

$$O_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 \\ \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} (q_2 + d_1) \cos q_1 & -\sin q_1 & -\sin q_1 \\ (q_2 + d_1) \sin q_1 & \cos q_1 & \cos q_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow J_{v_3} \\ \\ \\ \leftarrow J_{\omega_3} \\ \\ \end{array}$$

Velocidades angulares

$$\omega_1 = R_1^T J_{\omega_1}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & 0 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R_1

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 \\ -\sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

Velocidades lineales

$$v_1 = J_{v_2}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$
$$v_2 = J_{v_3}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 \sin q_1 \\ \dot{q}_2 \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = \begin{bmatrix} (q_2 + d_1)\dot{q}_1 \cos q_1 - (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \sin q_1 \\ (q_2 + d_1)\dot{q}_1 \sin q_1 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \cos q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Energía cinética

Movimiento rotacional:

$$\frac{1}{2}\omega_1^T I_1 \omega_1 = \frac{I_{33}}{2}\dot{q}_1^2$$

Movimiento lineal:

$$\frac{m_2}{2}v_2^T v_2 = \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2$$

$$\frac{m_3}{2}v_3^T v_3 = \frac{m_3}{2}[(q_2 + d_1)^2\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2]$$

Lagrangiano y ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L = \frac{I_{33}}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{m_3}{2}\left[(q_2 + d_1)^2\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] - (W_2 + W_3)q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = I_{33}\dot{q}_1 + m_3(q_2 + d_1)^2\dot{q}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right] = I_{33}\ddot{q}_1 + m_3(q_2 + d_1)^2\ddot{q}_1 + 2m_3(q_2 + d_1)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_1} = u_1$$

Lagrangiano y ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L = \frac{I_{33}}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{m_3}{2}\left[(q_2 + d_1)^2\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] - (W_2 + W_3)q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = m_3(q_2 + d_1)\dot{q}_1^2 - (W_2 + W_3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2\dot{q}_2 + m_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right] = m_2\ddot{q}_2 + m_3(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_2} = u_2$$

Lagrangiano y ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L = \frac{I_{33}}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{q}_2^2 + \frac{m_3}{2}\left[(q_2 + d_1)^2\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2\right] - (W_2 + W_3)q_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_3} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right] = m_3(\ddot{q}_2 + \ddot{q}_3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_3} = u_3$$

Modelo matricial

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} + \mathbf{M}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{\tau}_u$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_{33} + m_3(q_2 + d_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + m_3 & m_3 \\ 0 & m_3 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 2m_3(q_2 + d_1)\dot{q}_1 & 0 \\ -m_3(q_2 + d_1)\dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ W_2 + W_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\tau}_u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Referencias

- Spong, M., Vidyasagar, M.: *Robot Dynamics and Control*. John Wiley Ed., 1989.
- Lewis, F.L., Abdallah, C.T., Pawson, D.M.: *Control of Robot Manipulators*. MacMillan Ed., 1993.