AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
UAEH

DIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
SUBNODO REGIONAL DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

SIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EN EL CONTEXTO DEL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE MASA

TESIS:

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

PRESENTA:

Claudia Rosario Muro Urista
Dirigida por: Dra. Patricia Camarena Gallardo

PACHUCA, HIDALGO NOVIEMBRE, 2000

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
SUBNODO REGINAL DE MATEMATICA EDUCATIVA

ING. CLAUDIA MURO URISTA
P R E S E N T E

Nos permitimos comunicarle que este jurado después de revisar la tesis con el título "SIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EN EL CONTEXTO DEL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE MASA", que usted presenta para obtener el grado de Maestra en Ciencias con Orientación en la Enseñanza de las Matemáticas, ha decidido autorizar la 1º impresión de la misma, una vez que se han cubierto los requisitos de la normatividad respectiva y haber realizado las correcciones que fueron acordadas.

Firman de conformidad

PRESIDENTE:
DRA.PATRICIA CAMARENA GALLARDO

SECRETARIO:
M. EN C. ROSA MA. CHARGOY ESPINDOLA

VOCAL:
DR. FRANCISCO CORDERO OSORIO

1ER SUPLENTE:
M EN C. ANDRES RIVERA DIAZ

2º SUPLENTE:
M EN C. JAVIER BARRERA ANGELES

Lo anterior, para los trámites correspondientes a que haya lugar.

Con copia para.
Subnodo Regional de Matemática Educativa
Dirección de Estudios de Posgrado
Interesada

ESTE TRABAJO LO DEDICO:

A MI FAMILIA

A MI AMIGA Y DIRECTORA DE TESIS

DRA. PATRICIA CAMARENA G.

A MIS AMIGOS

A MIS MAESTROS

GRACIAS POR SU INVALORABLE AYUDA PARA EL

LOGRO DE ESTE TRABAJO. QUE ESTANDO A MI LADO ME HAN BRINDADO

ESA MIRADA INTERIOR QUE HACE DESPLEGAR UN MUNDO EN LA

FRENTE

DE LOS QUE SOÑAMOS Y DEPOSITAR EN MI LA LUZ QUE LLEVO EN MI

MANO

ÍNDICE

SIGNIFICACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EN EL CONTEXTO DEL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE MASA

INTRODUCCIÓN

La enseñanza y el aprendizaje de la serie de Fourier es un problema que ha sido motivo de diferentes investigaciones dentro de la matemática cuyo fin común es la búsqueda de alternativas de enseñanza con el propósito de que se logre el aprendizaje en el salón de clase.

La investigación que presento en este trabajo se encuentra ubicado en dicha problemática y persiguiendo el mismo fin, dentro del contexto de la ingeniería específicamente la ingeniería química, en la significación de la serie de Fourier a través de la contextualización de la misma en el fenómeno de transporte: transferencia de masa.

Puesto que una buena parte del trabajo del ingeniero químico y del estudiante de ingeniería química debe ser cuantitativo, la matemática es una herramienta clave para éste a lo largo de toda su vida de estudiante así como de profesionista. De hecho, toda la extensión del desarrollo de un proceso, como lo son los fenómenos de transporte (transferencia de masa) desde su concepción inicial hasta prever el tamaño del equipo para una planta dada, es representable matemáticamente de acuerdo a las necesidades requeridas por el ingeniero.

El proceso de la transferencia de masa es un fenómeno de transporte básico muy importante dentro del área de la ingeniería química, cuyos problemas implican una serie de conceptos matemáticos sobre la serie de Fourier. Sin embargo, la práctica educativa propia del nivel superior nos ha percatado de que en general el estudiante de ingeniería química resuelve problemas referentes a la transferencia de masa en forma aislada, sin que logre alguna relación con la enseñanza que ha tenido durante sus cursos de matemáticas. Este problema también se puede ver desde otro punto de vista, el estudiante ejercita la matemática de las series de Fourier sin saber cómo ni cuándo le serán útiles estos conocimientos a través de su vida como estudiante de alguna ingeniería, o en su vida profesional como ingeniero. El problema que tienen los estudiantes con las series de Fourier en la ingeniería química es un ejemplo del problema que existe en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, esto es, la falta de contextualización de la matemática en la ingeniería.

Por tanto, debido a que el estudiante presenta problemas en la conceptualización de la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería química, nuestra investigación parte de la necesidad de contextualizar la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa, cuya hipótesis radica en que para que el estudiante comprenda y conceptualice la serie de Fourier en el fenómeno de la transferencia de masa, es necesario vincular la matemática con la ingeniería química en la búsqueda de su significación en dicho fenómeno.

Trabajos de investigación sobre la contextualización de las matemáticas, proponen la matemática en contexto *como una estrategia didáctica que integra el conocimiento matemático con el de la ingeniería*. Camarena (1999).

La matemática en contexto es la forma cómo se imparten los temas de matemáticas necesarios en una carrera determinada de ingeniería, por lo que ésta constituye la propuesta didáctica. Camarena (1987).

Basándonos en la estrategia didáctica que propone Camarena, con el análisis y estudio del proceso de transferencia de masa a través de la serie de Fourier, se nos presenta la posibilidad de desarrollar la teoría matemática de contextualización a las necesidades y ritmo que dicta el curso de ingeniería química sobre el proceso de transferencia de masa.

En el análisis, tratamiento y desarrollo matemático de las series de Fourier en el proceso en estudio está presente la necesidad de vinculación de varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones que le darán significación al proceso a través de la Matemática en Contexto. Por tanto, nuestra investigación se sustenta en el marco de referencia de la misma cuyo objetivo, será la significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa. Así mismo, la metodología a seguir en la contextualización de la serie de Fourier se estructura en base a las diferentes etapas de la Matemática en Contexto propuesta por Camarena (1999).

De esta forma nuestro trabajo de investigación, se apoya en ... *la hipótesis de que la matemática en contexto es un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas en una escuela de ingeniería, más precisamente en escuelas en donde la matemática no es una meta por sí misma, sino una herramienta de apoyo al área que sustenta* . Camarena (1995)

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1. Planteamiento del problema de investigación

En la enseñanza de la matemática en ingeniería, se hace cada vez más apremiante hacer capaz al ingeniero de resolver problemas de muy diversa índole. La mayoría de los problemas de ingeniería requieren del conocimiento de diferentes conceptos matemáticos, uno de esos conceptos son los conceptos referentes a las series de Fourier, esto es debido a que las series de Fourier están estrechamente ligadas con el estudio de fenómenos físicos que teóricamente son infinitos.

Los problemas matemáticos referentes a la serie de Fourier que surgen en esta área, contienen conceptos comunes como lo son el infinito, el límite, la convergencia, la suma de funciones trigonométricas, etc., y forman el objeto del problema. El método de investigación que caracteriza a estos conceptos conlleva matemáticas, el planteamiento de sus diferentes problemas requiere de vinculación de conceptos, esquemas, lenguaje y simbología para la comprensión de los mismos.

Por otro lado, a través de la experiencia de nuestra práctica docente, hemos encontrado dificultades en la enseñanza y el aprendizaje, de la matemática en lo que se refiere a las especialidades de la ingeniería. 1) Dificultades en la enseñanza: el docente no concibe a la matemática contextualizada en las diferentes especialidades de la ingeniería, su matemática es dada en forma aislada, esto trae, como consecuencia el no colaborar en forma directa en la preparación del futuro ingeniero. 2) Dificultades en el aprendizaje: al estudiante le causa dificultad el conceptualizar en primer lugar, a la matemática por si misma y en segundo lugar como herramienta de apoyo dentro de la ingeniería. En general, el estudiante de ingeniería, resuelve problemas referentes a su área en forma aislada, sin que logre alguna relación con la enseñanza que ha tenido durante sus cursos de matemáticas. Este problema también se puede ver desde otro punto de vista, el estudiante ejercita la matemática en sus cursos de matemáticas sin saber cómo ni cuándo le serán útiles estos conocimientos a través de su vida como estudiante, o en su vida profesional como ingeniero.

La falta de vinculación de la matemática es un problema que existe en todas las especialidades de la ingeniería. Ejemplo de ello es la falta de vinculación de la serie de Fourier en el fenómeno de transferencia de masa. Por lo cual consideramos pertinente abordar esta investigación desde la perspectiva de la enseñanza de las series de Fourier en el contexto de la especialidad de ingeniería química.

La ingeniería química, comprende fenómenos de transferencia de masa donde está presente la serie de Fourier en la explicación y comprensión del proceso el estudiante presenta problemas en su conceptualización desde el punto de vista de la ingeniería y de la matemática por que suponemos que no existen concepciones pertinentes para relacionar y comprender la matemática de las series de Fourier en el contexto del proceso que está estudiando. La desvinculación de la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería, en particular, con la transferencia de masa, nos hace reflexionar sobre ¿cómo lograr la vinculación de los conceptos matemáticos y el fenómeno en estudio? y a través de la vinculación, ¿qué se pretende?, ¿cuál es la significación de la matemática a la que nos estamos refiriendo en dicho proceso?

Para contestarnos estas preguntas, partiremos desde el punto en el que existe la necesidad de vinculación de la serie de Fourier con la ingeniería química en la comprensión y conceptualización de la misma en el proceso de transferencia de masa. Para lograr la vinculación, esta será dada a través de la contextualización de la serie de Fourier y nuestro objetivo al contextualizar la serie de Fourier en esta investigación, será su significación en el contexto de la transferencia de masa.

Al vislumbrar y vincular los diferentes conceptos implícitos en el proceso físico de la transferencia de masa, caracterizados por un análisis matemático, estaríamos trabajando en la hipótesis de Camarena. *La Matemática en Contexto es un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas en una escuela de ingeniería, más precisamente en escuelas en donde la matemática no es una meta por sí misma, sino una herramienta de apoyo al área que sustenta.*

El análisis y vinculación de diferentes conceptos sobre la serie de Fourier y su significación en el contexto del proceso de transferencia de masa, suponemos, le proporcionaría al ingeniero químico, el apoyo para comprender y conceptualizar a la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería química y de esta manera, la comprensión del proceso teóricamente infinito bajo la perspectiva de las matemáticas; a nosotros como educadores de la matemática nos ayudaría a concebir la serie de Fourier en el contexto de la química, definir los diferentes conceptos necesarios y pertinentes para la enseñanza y aprendizaje de la serie de Fourier en vinculación con el proceso de transferencia de masa.

Con la finalidad de vincular los conceptos implícitos en esta investigación, y de ésta forma lograr la contextualización en el planteamiento del problema de transferencia de masa consideramos necesario iniciar con la propuesta de un experimento sencillo, que consiste en el secado de una sustancia humedecida con alcohol donde se lleva a cabo la transferencia de masa de alcohol hacia el exterior por la acción de aire seco. El problema de transferencia de masa dado por el experimento, llevará consigo el desarrollo de varias etapas lo cual implica una serie de conceptos como son, los conceptos, sobre las ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales parciales al obtener el modelo que representa al proceso, sobre la solución a las mismas, respecto a la serie de Fourier, así mismo, conceptos para darle interpretación a la solución obtenida en términos matemáticos y de la ingeniería química. Con la contextualización de la serie de Fourier habremos preparado nuestro objetivo en la significación de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.

1.2 Estado actual de la investigación

Los antecedentes a esta investigación los podemos clasificar en cinco aspectos: A) Antecedentes respecto a la contextualización de la Matemática. B) Antecedentes de los elementos previos a la serie de Fourier. C) Antecedentes respecto a la enseñanza y aprendizaje de las series y serie Fourier. D) Dificultades y Obstáculos Epistemológicos en la enseñanza aprendizaje de la serie de Fourier. E) Antecedentes de la serie de Fourier en el Contexto de la Ingeniería Química

A) **Los Antecedentes respecto a la contextualización de la Matemática, son los siguientes:**

- *G. P. Camarería (1987) [6]. En el diseño del curso Ecuaciones Diferenciales en el Contexto de los Circuitos Eléctricos, propone y utiliza, cuatro etapas de la matemática en contexto y hace énfasis en las matemáticas como:*
  1. *La matemática requiere de tiempo para su maduración*
  2. *La matemática requiere de disciplina mental*
  3. *La matemática requiere de un orden lógico*
  4. *La matemática requiere de un contexto*
  5. *La matemática requiere de motivaciones y reflexiones*

Los resultados que obtuvo en la experiencia fueron respuestas motivantes por parte del estudiante hacia el contexto de la matemática.

- G. P. Camarena (1995) [7]. Define la matemática en el contexto de la ingeniería,

> *..como un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas en una escuela de ingeniería, más precisamente en escuelas donde la matemática no es una meta por sí misma sino una herramienta de apoyo al área del conocimiento que sustenta, para lo cual incide en concreto sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes en el contexto de los circuitos eléctricos...*

Presenta una experimentación cuya hipótesis radica en la aceptación de la matemática en contexto

Su investigación la concluye en el peso de la matemática en contexto, ob teniendo de la experimentación que al estudiante primero se le motiva, se les pueden desarrollar habilidades más fácilmente y pueden sin mucha dificultad los conceptos.

- G. P. Camarena (1995) [8]. Presenta el reporte de investigación acerca de la incidencia de la matemática en contexto dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, en donde se llevó a cabo a través del montaje de dos experimentos realizados dentro de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica del I.P.N con los temas ecuaciones diferenciales ordinarias en el contexto de los circuitos eléctricos y el análisis de la serie Fourier en el contexto de las señales eléctricas.

- G. P Camarena (1999) [9]. Propone una estrategia didáctica que integra en los estudiantes el conocimiento matemático con el de la ingeniería. La propuesta didáctica llamada matemática en contexto, muestra las etapas de desarrollo de la contextualización entre las que se encuentran los modelos matemáticos.

  Etapas de la matemática en contexto:

  1. *Planteamiento del problema*
  2. *Determinación de las variables y de las constantes del problema*
  3. *Determinación del modelo matemático*
  4. *Solución matemática del Problema*
  5. *Determinación de la solución requerida por el problema*
  6. *Interpretación de la solución en términos del problema*

En su investigación, presenta un ejemplo donde muestra las etapas anteriores de la matemática en contexto y concluye que es necesario que los docentes de matemáticas incursionen en las áreas del conocimiento de las carreras en donde laboran, para presentar una matemática en contexto o con aplicaciones que sean de interés del estudiante, con lo cual, se estará preparando al futuro ingeniero para que modele los fenómenos con que se tope en su vida profesional. La matemática en contexto integra el conocimiento.

B) Los antecedentes de los elementos previos a la serie de Fourier, son los siguientes:

Los elementos previos a la serie de Fourier se localizan en educación superior "la enseñanza del cálculo ha sido reconocida como una de las fallas mayores" (S teen, 1988). El cálculo ocupa un lugar central en esta última: sus vínculos tanto en la matemática elemental (razón, proporción en aritmética, el análisis funcional, análisis complejo, divergencia, series) así como su papel en matemáticas y en ciencia lo h acen un conjunto de conocimientos de valor teórico y empírico indispensable en la educación superior.

Las investigaciones más importantes con relación a la enseñanza del cálculo se mencionan enseguida:

- Artigue (1990)[2], Señala que las dificultades que imp iden su acceso son diferentes y se entrelazan y refuerzan mutuamente, las agrupa de la siguiente forma:

  > ...Las asociadas en la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, junciones) y su conceptualización.
  > Las asociadas a l a conceptualización y la formalización de límite. Las asociadas con la ruptura álgebra/cálculo...

- Las dificultades, existentes asociadas a la complejidad de los objetos básicos del cálculo, además de la enseñanza según investigaciones son:

  El estudiante se encuentra con concepciones topológicas inadecuadas sobre los R. Sobre funciones: (Vinner, 1983), (Eisenverg, 1991); (Leinhardt, 1990), (Dubinski & Harel, 1992) muestran como el estudiante conceptualiza la función:

  > ..como la asociación a una fórmula con la práctica algorítmica y como su gráfica una curva regular...

- Otras investigaciones han estudiado la posibilidad de hacer uso de la informática, con capacidad para presentar varios tipos de representaciones por medio de sistemas de ventanas múltiples dej ando al descubierto fenómenos de adaptación perceptiva global con la limitación de la transferencia a otros ambientes. Los resultados son poco alentadores. (Schwarz, 1989), (Dagher, 1993), (Shoenfeld, 1990).

- Una de las dificultades encontradas en la concep tualización de funciones es el no considerar a la función como herramienta de trabajo matemático así como la traducción de su contexto.
- Las investigaciones sobre las dificultades asociadas con la conceptualización del límite muestran como algunos investiga dores han buscado conciliar una aproximación cognitiva e histórica basándose en la noción de obstáculo epistemológico. Brousseau (1983) [5], Sierpinska (1985) [23].
- (Cornu, 1991), en su investigación establece los obstáculos y las dificultades que en particular pueden encontrar los estudiantes. Los obstáculos epistemológicos que se presentan son:

> ...la concepción del límite como una barrera intraspasable y no alcanzable, como el último término de un proceso, que tiende al mismo tiempo a reforzar concepcion es monótonas estrictas de la convergencia. Dificultades en la percepción del límite en el contexto numérico y el contexto geométrico, conceptualizando erróneamente que la tendencia de un objeto hacia otro geométricamente significa que el limite será la mag nitud del objeto límite...

- (Sierpinska, 1985). Engloba los obstáculos anteriores en las siguientes categorías: horror al infinito, los obstáculos asociados a la noción de función, los obstáculos lógicos, los obstáculos geométricos y los obstáculos simbóli cos.
- Otras investigaciones muestran las dificultades que se presentan en el doble status operacional y estructural del límite, en las dificultades de separarse de la visión de límite en simples términos de proceso operacional al objeto límite del proceso q ue ha permitido construirlo.
- Existe un salto cualitativo que se verifica en la historia del concepto del límite. Del manejo intuitivo de la noción de límite a la noción formalizada del límite. El concepto formalizado del límite, aparece como un concepto he cho para probar (Lakatos, 1976),

rompiendo parcialmente con las formas de conocimientos anteriores.

- (M. Legrand, 1993), insiste en la ruptura Álgebra/Cálculo. Insistiendo en las rupturas necesarias en el nivel del tratamiento de la igualdad y las formas de razonamiento, donde se pasa de razonamientos por equivalencia a razonamientos por condiciones suficientes. Por ejemplo para demostrar que a es menor que b, se construye generalmente una sucesión de expresiones $a<a_1<a_2 \ldots <a_n$ hasta demostrar que $a_n<b$.
- (Praslon, 1994) opina sobre el trabajo de Legrand. "Esto es un juego sutil que supone una familiaridad con las expresiones y con las ordenes de tamaño respectivo que no pueden aprenderse sino en largo plazo".

C) Antecedentes respecto a la enseñanza y aprendizaje de las series y serie Fourier

- Farfán R (1994) [12], con relación a series y su convergencia, hace una revisión de la obra "Teoría analítica del calor" (1822), donde señala que para analizar el problema de la propagación de calor en los sólidos, Fourier describe el comportamiento buscando un estado estable y permanente, por medio de un estado estacionario, propiciando con esto, la construcción de la noción de convergencia en serie de funciones. El trabajo de investigación de Farfán, consistió en diseñar experimentalmente problemas físicos similares a los abordados por Fourier y los problemas planteados en un contexto matemático, los resultados de ésta investigación fueron los siguientes:
  - Al estudiante le resulta difícil proponer la formula de una función dada su gráfica, cuando ésta es periódica.
  - Inducen propiedades validas como la continuidad o la permanencia de la forma senoidal, del caso finito al infinito.
  - El predominio del contexto algebraico en las concepciones del sujeto, impiden el establecimiento de resultados que, siendo expresamente situados en un contexto geométrico, están condicionados al conocimiento y habilidades de corte algebraico previos.
  - La determinación del estado estacionario en el contexto físico de la propagación del calor, requiere desarrollar la intuición geométrica más allá de lo sensible.
  - La primera intuición del fenómeno físico, es perceptible, no así su representación

gráfica y analítica.

Concluyendo señala que se desprende la obligatoriedad de desarrollar la intuición mas allá de lo sensible, como una etapa previa, antes de significar el concepto de convergencia de series.

- La investigación de Farfán, R. y Albert, A. (1995)[13] referente a los antecedentes matemáticos que los profesores tienen sobre convergencia de sucesiones de funciones, se encuentran los siguientes resultados:
  - La convergencia de sucesiones numéricas es un obstáculo para comprender la convergencia de sucesiones de funciones.
  - Los profesores identifican como sucesiones de funciones de convergentes a las uniformemente convergentes y las demás como divergentes.
  - La tendencia de preservar la forma de la sucesión de funciones en la función límite.
- Albert A (1996) [1]. En su investigación, detectó en estudiantes dificultades y obstáculos en el aprendizaje de las series. A continuación se muestran los resultados.
  - Se dificulta el predominio de la noción de sucesión sobre la noción de serie.
  - Existe dificultad en la construcción de la sumabilidad de una serie infinita.
  - Existe dificultad en discernir entre el límite de una suc esión y la suma de una serie.
  - El infinito es un obstáculo epistemológico para la noción de suma de una serie infinita.
  - El infinito potencial fue obstáculo para manejar el infinito actual.
  - La suma operación aritmética binaria, es un obstáculo para la suma d e una serie infinita.

Albert, señala que para lograr superar algunos obstáculos epistemológicos, como: el infinito, serie infinita, convergencia de una serie etc. "es importante acercarse al contexto del profesionista". No solo recurre a la epistemología como una componente fundamental de la metodología que aporta importantes elementos para el diseño y análisis a priori, sino que hace énfasis en la detección de obstáculos epistemológicos y en la construcción de las nociones sobre series numéricas, pero no centrado en el individuo sino en la colectividad de la situación escolar. De modo que las relaciones sujeto -objeto no son referidas centralmente a entender sujeto como individuo sino como colectividad en la clase. Así, no son lo mismo los posibles obstáculos y procesos de construcción sobre determinadas nociones para cada estudiante que en su interacción con otros estudiantes y luego con el profesor.

Los resultados que obtuvo en la experiencia fueron respuestas motivantes por parte del, estudiante hacia el contexto de la matemática.

D) Los Dificultades y Obstáculos Epistemológicos en la enseñanza aprendizaje de la serie de Fourier.

El estudio del análisis epistemológico, es de fundamental importancia ya que nos provee de la noción de obstáculo epistemológic o y nos ayuda a decidir cuáles obstáculos pueden evitarse, o bien, cuáles no se deben evitar y en consecuencia: cómo serán superados. Por tanto, el análisis epistemológico nos plantea problemas globales y fundamentales como una guía a la producción de los conceptos fundamentales de la serie de Fourier en la matemática y en el proceso de Transferencia de Masa.

Los obstáculos epistemológicos a través de la historia de los conceptos relativos a la serie de Fourier y más aún, la conexión de estos conceptos en e l proceso de transferencia de masa, muestran las diferentes dificultades que ha tenido el estudiante, para apropiarse de éste conocimiento. Hemos encontrado los siguientes:

De acuerdo a G. Bacherald (1938) [3]: *…No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano, es en el acto mismo de conocer íntimamente que aparecen por una suerte de necesidad funcional para conocer…. Uno conoce cont ra un conocimiento anterior…*

Algunas investigaciones que nos proporcionan elementos en el estudio de la componente epistemológica en la investigación, son las siguientes:

Es en siglo XVIII, cuando empieza a hablarse de la posibilidad de expresar una función arbitraria de x en serie trigonométrica que involucre senos y cosenos de múltiplos de la variable.

La Propagación de calor, Fourier (1822) [15], es singularmente importante, tanto para la ingeniería como para el análisis matemático mismo. El estudio de Fourier es esencialmente un análisis cualitativo y empírico del fenómeno físico en cuestión de la intuición acerca de la certeza sobre la convergencia de la solución, ligada a la naturaleza propia del fenómeno (la temperatura no es infinita). Y sobre el lo hace descansar sus posteriores desarrollos analíticos anteponiendo así el contexto físico al geométrico y al algebraico, haciendo uso de este último de habilidades matemáticas propias de la época ajena a nuestras tradiciones educativas.

La forma de perc ibir el fenómeno de la propagación de calor, en el estudio de problemas físicos actuales planteados por la ingeniería, requiere del análisis cualitativo y de una representación adecuada, esto es debido a la importancia de estudiar el contexto físico a fin de procurar tener los conceptos que posibiliten futuros diseños didácticos en contextos afines a la ingeniería en diversos campos que lo propicien.

- Farfán R (1995) [14], en su estudio histórico sobre series, menciona que el trabajo con serie es en la époc a del medievo, en la que se dio el primer esfuerzo por establecer las bases científicas del estudio de los fenómenos de variabilidad y cambio. Así encuentra que en la obra de Oresme, ya se muestra la Geometría como herramienta de uso, donde el problema inv olucra dar la suma de una serie numérica infinita.

  Continuando, menciona que del siglo XIV al XVIII, el trabajo con series es la suma de ellas, instituyéndose como instrumento de "predicción". Euler en el cálculo de sumas estableció analogías para la soluc ión de sumas de series. En ésta etapa conceptual sobre series, se encontró un obstáculo epistemológico el cual impidió el tránsito de la siguiente fase.

  El obstáculo epistemológico en mención, fue precisamente adjudicar la naturaleza de los términos de la serie a su suma, debido a que la concepción de función es analítica arbitraria, propia del siglo XVIII.

  Cauchy, recurre a un estilo de procedimientos y da una lista de criterios de convergencia proveniente de la comparación con series cuya suma es conocida , para que Cauchy diera a conocer estos criterios de convergencia, se dio antes un estudio de convergencia. El estudio se dio con el trabajo de Joseph Fourier sobre la conducción de calor. En esta obra se deduce la ecuación que rige el comportamiento del fenómeno, utilizando el instrumento de "predicción paramétrica" natural de la época para encontrar un Estado Permanente en el cual las temperaturas llegaran por último sin sufrir cambios.

De la obra de Fourier, la solución al problema de conducción de cal or, es una serie trigonométrica infinita de la que es necesario determinar sus coeficientes.

Como la serie representa un sistema de temperaturas, éstas no pueden ser infinitas y la convergencia de la serie queda establecida: Para probar tal afirmación Four ier recurre a la inducción euclidiana hasta la transformación de la solución en una integral. En todo su desarrollo está presente el fenómeno físico concreto que le permitió falsamente de acuerdo al conocimiento matemático actual iniciar el estudio de la c onvergencia. Como el Estado Permanente es único, la también la solución es única, mostrando con ello la convergencia de la serie.

Por tanto encontrar el estado estacionario conlleva a la verificación de la convergencia y así un estudio de ella donde el pro blema físico y el concepto matemático son indistinguibles y la consideración del estado estacionario marca una ruptura epistémica. El problema se traslada de calcular sumas de series infinitas al estudio de su convergencia. Entonces en esta etapa conceptua l, el estudio de la convergencia genera una nueva dificultad en el concepto de convergencia uniforme. "Fácil" y no uniforme "Difícil" Mencionadas las dos etapas conceptualmente diferentes se detectan constructores utilizados para conformar el concepto y lo s obstáculos epistemológicos que impidieron el tránsito a la siguiente fase.

Los obstáculos epistemológicos hallados en estas investigaciones se dan a continuación:

1) En el Cálculo de sumas de series Numéricas Infinitas: los obstáculos epistemológicos que se detectan son *identificación de la naturaleza de la suma con los términos de la serie (para funciones).*

2) En el estudio de la convergencia de las series: existe una ruptura epistémica con el

obstáculo epistemológico Convergencia "fácil" y "difícil".

- Albert A, continuando con las investigaciones sobre series, menciona algunos obstáculos epistemológicos para el entendimiento del concepto de límite asociado a series con el estudio de (Cornu 1993) y (Sierpinska 1985). Comu identifica:

  1. El aspecto metafísico de la idea de Límite: se refiere a consideraciones como que las matemáticas no sólo se reducen a cálculos y simples manipulaciones algebraicas; en ellas intervienen, entre otras, el infinito, envolviéndolo en un halo de misterio.

  2. Lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande: todas las cosas suceden como si efectivamente existieran números muy pequeños, que sin ser cero, son más pequeños que los números reales positivos.

  3. Se alcanza el infinito: aparecen frases como: se aproxima, tiende a, tiende a aproximarse.

  4. El paso al Límite: pasar de lo finito a lo infinito, los valores al límite se toman sin conciencia del proceso infinito

- De (Sierpinska, 1985) se citan los siguientes obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

  I. Horror al infinito:

  1. No se acepta que el paso al límite sea una operación matemática.
  2. Se busca eliminar el problema del infinito mediante el grado de exactitud.
  3. Los razonamientos son basados en la inducción
  4. Se establece transferencia de propiedade s de los términos de la sucesión a su límite
  5. Los métodos algebraicos para manipular magnitudes, así como sus significados asociados, se transfieren de aquellas de tamaño finito a las de magnitud infinita.
  6. Se advierten también obstáculos de naturaleza física, se alude a la posibilidad de alcanzar efectivamente el límite.

  II. Obstáculos debidos a la noción de función:

  Existe un universo restringido de funciones, se centra la atención en la fórmula analítica, por encima de los demás aspectos que la cara cterizan: dominio, contradominio, gráfica, valores y propiedades.

E) E1 antecedente respecto a la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería es el siguiente:

- G. P. Camarena (1993) [10]. Diseña un curso denominado, *"Análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas* . Con el objeto de contextualizar la serie de Fourier en la ingeniería electrónica, en particular en el análisis de señales eléctricas.

- No existen antecedentes respecto a la serie de Fourier en la Ingeniería Química. Cab e hacer mención de la evidencia encontrada en la cita del siguiente texto: A. S. Foust (1989) [16j. *Solución de las ecuaciones para el estado inestable*

> *...Aunque las ecuaciones para el estado inestable son relativamente sencillas de establecer su solución ofrece casi siempre grandes dificultades. La solución depende de la geometría y de las condiciones. Las ecuaciones han sido resueltas para un cierto número de geometrías y de condiciones sencillas. En vista de que la discusión matemática es muy detallada, sale del propósito de esta obra.*
> *Al trabajar con la ecuación de calor, Fourier desarrolló una solución analítica que utiliza series Trigonométricas infinitas, conocidas como la serie de Fourier. Para facilitar el cálculo, se han preparado soluciones a las ecuaciones de estado inestable de calor en forma gráfica para unas cuantas formas geométricas sencillas (lámina plan, esfera y cilindro) estas mismas gráficas son útiles para el proceso de transporte de masa.....*

De acuerdo a los diferentes antecedentes, anteriormente descritos, se puede concluir que de alguna manera, la preocupación en la enseñanza y aprendizaje de las series y la serie de Fourier han motivado a diferentes investigadores a analizar los algunos aspectos, sobre las mismas. La justificación de la Matemática en Contexto en el problema investigación que planteamos en el presente trabajo es una necesidad de vinculación de la matemática y la ingeniería en la enseñanza de las series de Fourier.

CAPITULO 2

MARCO DE REFERENCIA Y METODOLÓGICO

Basados en el enfoque de la idea para la enseñanza constructivista Piagetana, en la que todo conocimiento implica creación, es decir, el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten ver el objeto de cierta manera y extraer de él cierta información misma que es asimilada por dichas estructuras. Piaget (1970) [19]. Donde la nueva información produce modificaciones - acomodaciones en las estructuras intelectuales de tal manera que cuando el sujeto se acerc a nuevamente al objeto lo ve de manera distinta de cómo lo había visto originalmente y es ahora otra información que le es relevante y sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognocitivas, construyéndose así el conoci miento sobre le objeto, nuestra investigación tiene como propósito primeramente, cubrir una necesidad en la enseñanza de la matemática, relativa a la enseñanza de la serie de Fourier, en el contexto de la ingeniería química, específicamente en el proceso d e la transferencia de masa, la estrategia didáctica que se propone en la enseñanza de la matemática para este fin, es la Matemática en Contexto, cuyas bases radican en el constructivismo. Para posteriormente, con la matemática contextualizada, dar significado a la serie de Fourier en el proceso físico de la ingeniería química en estudio.

La enseñanza de este conocimiento matemático bajo la perspectiva de la Matemática en Contexto, tiene como objeto, vincular la matemática referente a las series de Fourier e n el contexto del proceso de la transferencia de masa, cuyo objetivo es integrar en los estudiantes el conocimiento matemático con el de la ingeniería química.

Al contextualizar la matemática de la serie de Fourier el objetivo, será precisamente estudiar investigar y analizar la integración de este conocimiento al estudiante, de tal forma que nunca esté separado del sujeto; en el proceso del conocimiento de la contextualización de la serie de Fourier, pretendemos que el sujeto asigne al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto. Para tal investigación hemos de trabajar bajo el marco teórico de los Campos Conceptuales. Vergnaud (1981) [24], cuyo objetivo radicará en analizar las diferentes concepciones que el estudiante tenga de la serie de Fourier y conocer la red de conceptos y el campo conceptual que el estudiante ha de formar con respecto al conocimiento matemático en estudio.

A continuación se da los puntos importantes de las teorías Piagetanas, que marcan el constructivismo, del marco de referencia de la Matemática en Contexto y la teoría de Campos Conceptuales.

2.1 Constructivismo

- Piaget (1973) [20], expresa que el alumno debe razonar y actuar sobre un problema con respecto al todo, analizarlo y coordinar sus acciones físicas y mentales para obtener un resultado, y afirma, que las estructuras no se adquieren del exterior, las actividades intelectuales facilitan el análisis de los diversos aspectos del problema, así como la construcción y utilización mental de varios sistemas. Para Piaget las acciones mentales o físicas son necesarias para el pensamiento; sostiene que la estructura cognitiva se refiere a cierta representación de la materia de estudio o situación problemática que involucra las relaciones de las partes del todo, misma que es construida activamente por el organismo humano. Entonces la psicología trata con un sistema que se va estructurando. La concepción de estructura, supone que el sistema cognitivo es dinámico flexible y capaz de cambiar con el tiempo. Por tanto el aprendizaje y la ejecución de las matemáticas serán asunto del pensamiento activo y de la operación sobre el medio ambiente más que memorización. El aprendizaje, postula el constructivismo, es un proceso activo y no una recepción pasiva del conocimiento para la construcción. La acción será así el origen de todo conocimiento, que va desde la manipulación del medio físico hasta aspectos sociales e internalizados (medio social). Actividades que involucran, una transformación del objeto (física o conceptual) y del sujeto (por la ampliación o modificación de sus esquemas cognitivos. Entonces la tarea del enseñante constructivista, consistirá en diseñar y presentar situaciones que apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El paso siguiente consiste en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, el profesor y con textos.

- Piaget (1975) [21], En esta obra analiza los modos de conocimiento de la cual, rescatamos lo siguiente:

  "Se puede sostener que si todo modo de conocimiento, sin exceptuar el instinto, consta de informaciones acerca del medio exterior, supone ta mbién sin exceptuar el aprendizaje, una estructuración impuesta a título de condición previa y necesaria por el funcionamiento interno ligado a la organización del sujeto. Pero esta estructuración se presenta, en dos formas isomorfas: una forma hereditaria como lo es el caso del instinto que en lo que respecta a su lógica interna, las formas o esquemas de la inteligencia es sensorio-motriz.

  La otra forma es no programada e interviene en calidad de mecanismo asimilador en todo aprendizaje y conduce por asimi laciones progresivas hasta la inteligencia sensorio - motriz. Estos modos de conocimiento adquiridos (construidos), serían la parte que es adquirida desde el exterior, del medio o de la experiencia y la parte que es debida a la actividad del sujeto considera do como funcionamiento endógeno. Este segundo aspecto es de naturaleza lógica-matemática, puesto que tiene que ver con las coordinaciones de la s acciones del sujeto y con los objetos como tales, (endógeno: elemento que nace en el interior del órgano que l o engendra)"

  Este carácter lógico-matemático es muy visible en la percepción que lleva consigo un esquematismo y una geometrización que no dependen exclusivamente del objeto.

  En todo aprendizaje está lógica de los esquemas es cada vez más importante y va acompañada de una geometría evidente, así pues nos vemos conducidos a suponer la existencia de tres grandes tipos de conocimientos: las formas hereditarias (instinto) las formas lógico-matemáticas progresivamente construidas (en los casos superiores que caracterizan a la inteligencia) y las formas adquiridas en función de la experiencia (desde el aprendizaje hasta el conocimiento físico). La formas 2 y 3 no están disociadas ni reducibles la una y la otra.

Se pueden distinguir tres formas de conocimiento que son resultado del ejercicio de las funciones cognoscitivas en el hombre: conocimientos adquiridos gracias a la experiencia física en todas sus formas. En segundo lugar la categoría de la programación hereditaria como es el caso de estructuras perceptivas. En tercer lugar la categoría de los conocimientos lógico-matemáticos que llegan a ser independientes de la experiencia y no obtiene de los objetos como tales, sino de las coordinaciones de las acciones ejercidas por el sujeto sobre el objeto.

Entre los modos de conocimiento hereditario y los conocimientos debido a un aprendizaje, se aborda el problema de los conocimientos lógico-matemáticos debido a que no pertenece a ninguno aunque es necesario para el segundo.

I. **Matemática Lógica.** A primera vista las es tructuras aritméticas y geométricas son adquiridas por la experiencia de los objetos por aprendizaje empírico. Las estructuras lógicas son hereditarias.

Las estructuras espaciales constituyen el puente entre las estructuras lógico matemáticas y la estructura ya sea hereditaria o por aprendizaje.

II. **Matemáticas y aprendizaje.** Las estructuras lógicas matemáticas no pueden estructurarse por medio de los mecanismos comunes del aprendizaje, en el caso de la experiencia lógica matemática los conocimientos ob tenidos no se sacan de los objetos como tales, sino de las acciones ejercidas sobre ellos. Desde este punto de vista la construcción es endógena.

III. **Estructuras lógico-matemáticas.** No son resultados de aprendizajes empíricos sino que constituyen la condición necesaria para la organización y registro de la experiencia El carácter necesario de las estructuras lógico matemáticas no prueba en nada su herencia, es el resultado de su equilibración progresiva por autorregulación.

IV. **El hecho de que las estructuras lógico-matemáticas** no se reducen ni a combinaciones hereditarias la manera de instinto, ni a aprendizajes. Se reconoce igualmente en el hecho de que las construcciones lógicas y matemáticas no consisten ni en invenciones ni en descubrimientos en los sentidos limitados y precisos de éstos dos términos. La invención en matemáticas, una vez efectuada parece estar determinada, e incluso predeterminada por todo o que precede y se impone, por tanto con necesidad.

> *...Para comprender la naturaleza del proces o de construcción hay que analizar ante todo las razones que retardan las combinaciones nuevas y las condiciones que las hacen posibles después. Estas condiciones por lo menos son dos: de naturaleza formal o lógica y la otra de naturaleza psicológica....*

Desde el punto de vista de Psicología, se trata simplemente de descubrir el proceso desde el punto de vista del sujeto pensante y sobre todo actuante, este proceso de abstracción es característico del pensamiento lógico -matemático y difiere de la abstracci ón simple y aristotélica. Dado un objeto exterior por ejemplo un experimento, el sujeto se limita a disociar las cualidades ofrecidas y a retener una de ellas la forma por decir algo, desechando las demás. Por el contrario en el caso de la abstracción lógi co matemáticas, lo dado es un conjunto de acciones o de operaciones previas del sujeto mismo con sus resultados. La abstracción consiste en tomar conciencia de la existencia de una de estas acciones u operaciones, es decir en subrayar su interés posible cu ando había sido desdeñada. En segundo lugar se trata de reflejar la acción observada proyectándola sobre un nuevo plano, por ejemplo el del pensamiento por oposición a la acción práctica. En tercer lugar se trata de integrarla en una nueva estructura es de cir de construir ésta, solamente es posible si se cumplen dos condiciones: a) la estructura nueva debe ser una reconstrucción de la anterior, si no existe coherencia ni continuidad; b) debe de agrandar lo anterior, generalizándola por combinación. Las oper aciones lógicas no han suministrado una ayuda adecuada para explicar la capacidad del niño para aprender los conceptos y destrezas matemáticas más básicas.

De los estudios cognitivos se deduce uno de los supuestos básicos subyacentes de la investigación actual sobre aprendizaje que consiste en aceptar que el niño construye de un modo activo el conocimiento y es a través de la interacción con el medio y la organización de sus propios constructos mentales. Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento, lo interpreta lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.

2. 2 La Matemática en Contexto

La necesidad de contextualizar la matemática en la ingeniería enfocada a la enseñanza de la matemática de la serie de Fourier, conlleva la finalidad de que en el aprendizaje de la misma, el estudiante construya de un modo activo el conocimiento en una etapa posterior a través de la interacción con la matemática en contexto y la organización de sus propios constructos mentales. Donde se pretende que en investigaciones posteriores a la contextualización de la serie de Fourier, el estudiante con el apoyo de la matemática en contexto, estructure y asimile a la luz de sus propios esquemas el conocimiento de la serie de Fourier, con la finalidad de darle significación en el proceso de transferencia de masa, que siguiendo la enseñanza Piagetana, toda actividad cognoscitiva y motriz desde la percepción y el hábito al pensamiento conceptual y reflexivo consiste en vincular significaciones, y toda significación supone una relación entre un significante y una realidad significada. El símbolo y el signo implican una diferenciación desde el punto de vista del sujeto entre le significante y el significado. El símbolo puede ser elaborado por el individuo, mientras que el signo requiere la vida social para constituirse. Entonces los símbolos pueden socializarse y un signo siempre es colectivo.

La matemática en el contexto de la ingeniería, menciona (Camarena, 1995).

> ...Es una estrategia didáctica que integra en los estudiantes el conocimiento matemático con el de la ingeniería. La matemática en contexto es un medio ideal para la enseñanza de las matemáticas en una escuela de ingeniería, más precisamente en escuelas donde la matemática, no es una meta por sí misma, sino una herramienta de apoyo, al área del conocimiento que sustenta favoreciendo con esto, el proceso de enseñanza-aprendizaje...

La matemática en contexto se presenta con la necesidad de vincular la matemática con las diferentes especialidades de la ingeniería, esto es debido a que en general, el estudiante de ingeniería, resuelve problemas referentes a su área en forma aislada, sin que logre alguna relación con la enseñanza que ha tenido durante sus cursos de matemáticas. Este problema también se puede ver desde otro punto de vista, el estudiante ejercita la matemática sin saber cómo ni cuándo le serán útiles estos conocimientos a través de su vida como estudiante de alguna ingeniería, o en su vida profesional como ingeniero. El problema, no solamente es del estudiante, el problema viene desde más atrás, los diferentes autores de libros de texto, los profesores, los programas de estudio de matemáticas e ingeniería, abordan los temas de la especialidad con una marcada ausencia de la matemática, de tal forma, que las matemáticas que recibe el estudiante por todos los conductos, es una matemática y la poca matemática que utiliza es otra.

> ...El divorcio que existe entre las matemáticas y sus aplicaciones o su uso en el área que sustenta, es una de las grandes causas de la irregularidad escolar en el área de matemáticas y el bajo nivel académico del egresado ya que la realidad del ingeniero en ejercicio se presenta como el enlace entre la matemática y la ingeniería en cuestión. El matemático resuelve problemas de la matemática que servirán a la ingeniería sin ser consciente de ello. El ingeniero usa matemáticas que se presentan ante él como modelos ya elaborados y el paso que se tiene que dar entre la matemática y la ingeniería prácticamente se debe a unos pocos científicos en matemáticos o ingenieros con una fuerte formación en matemáticas, los cuales han desarrollado la ingeniería...

La concepción especifica de la matemática en contexto, es el cómo debe ser la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería. (Camarena, 1995):

a) Una herramienta fundamental

b) Una materia formativa

Estos dos aspectos permitirán al estudiante:

- Manejar el lenguaje de la ingeniería
- Minimizar errores
- Realizar cálculos teóricos en vez de cálculos prácticos, ahorrando tiempo y recursos
- Pronosticar comportamientos
- Tener mayor precisión en el análisis del problema
- Manejar un orden y disciplina mental dentro de la ingeniería su de su vida cotidiana
- Adquirir espíritu crítico
- Lograr un criterio científico

Por lo tanto, la vinculación entre la matemática y la ingeniería (la matemática en contexto) nos permite matematizar o modelar un problema real específico de la ingeniería, dar interpretación al problema de acuerdo a la solución matemática, agregando a esto, la matemática en contexto nos permite significar la matemática misma dentro de la ingeniería, facilitando el proceso enseñanza-aprendizaje ya que ofrece aplicaciones no artificiales de interés para el alumno. *La matemática en contexto permite un certero diseño curricular de los cursos de matemáticas en escuelas de ingeniería*. (Camarena, 1997)

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN CONTEXTO

De acuerdo con (Camarena, 1999),.. La matemática en contexto, es la forma en como se imparten los temas de matemáticas necesarios en una carrera determinada de ingeniería. El hablar de matemáticas en contexto no es simplemente ofrecer aplicaciones sino desarrollar la teoría matemática a las necesidades y ritmo que dictan los cursos de ingeniería. En la contextualización de la matemática en la ingeniería se llevan a cabo las etapas de la matemática en contexto:

1. Planteamiento del problema
2. Determinación de las variables y de las constantes del problema
3. Determinación del Modelo matemático

4. Solución matemática del problema
5. Determinación de la solución requerida por el problema
6. Interpretación de la solución en términos del problema

...La etapa central de la matemática en contexto es el modelaje o modelo matemáticos decir la matematización del problema.

2. 2 Aspectos De La Teoría De Campos Conceptuales de Vergnaud

La necesidad de contextualizar la matemática de la serie de Fourier, estriba en continuar con investigaciones posteriores. Se deja en claro que en la búsqueda de una forma didáctica de las matemáticas, con la contextualización de la serie de Fourier, pretendemos, desarrollar la teoría matemática acorde al proceso físico de la transferencia de masa para que el estudiante, construya posteriormente su conceptualización sobre la serie de Fourier a través de diferentes situaciones y se forme su propio Campo Conceptual, sobre la misma.

De tal forma, nuestro propósito en una investigación posterior, es incursionar en los Campos Conceptuales de Verganud, (1990) [25], para complementar nuestra investigación con elementos constructivistas, por lo que abrimos desde este momento el camino que seguirá el trabajo.

La mayoría de los psicólogos interesados hoy por la didáctica de la Matemática son en algún sentido constructivistas. Se piensa que las competencias y concepciones son construidas por los propios estudiantes.

Pero el hecho de que la mayoría de los investigadores no especifiquen suficientemente las condiciones físicas y sociales bajo las cuales tiene lugar el conocimiento abre el camino a una amplia variedad de posiciones epistemológicas desde un constructivismo simple hasta un constructivismo radical que niega la posibilidad de la mente para reflejar aspectos objetivos de la realidad.

La solución epistemológica afirma (Vergnaud, 1990), es un principio bastante sencillo:.... la construcción del conocimiento consiste en la construcción progresiva de representaciones mentales implícitas o explícitas, que son homomórficas a la realidad para algunos aspectos y no lo son para otros....

Esta es la razón que ha llevado a Vergnaud al estudio de la enseñanza y aprendizaje de los campos conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere de varios tipos de conceptos, procedimientos y representac iones simbólicas que están conectadas unas con otras. Los conceptos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones. Cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un sólo concepto sino que precisa de varios de ellos.

La característica importante de esta teoría es la consideración de los fenómenos de enseñanza-aprendizaje bajo el enfoque del campo conceptual.

(G. Vergnaud, 1990), en su conferencia llamada "El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Ca mpo Conceptual"(Le role de I'enseignant á la lumiére des concepts de schéme et de champ conceptuel) describe el esquema y el campo conceptual como experiencias no fáciles de comprender, pero si conceptos útiles para el enseñante que constituyen una ayuda s ignificativa para comprender su acción: " No solamente son esenciales los conceptos de Esquema y de Campo Conceptual para comprender el desarrollo cognoscitivo de los estudiantes, también, son útiles para que el profesor maneje situaciones y actividades de ntro del salón de clases".

Vergnaud, toma como referencia las investigaciones de Piaget y Vitgosky y las complementa ofreciendo una definición del concepto de esquema. Muestra cuando y donde el profesor puede influenciar en la formación de nuevos esquemas, guiando la elección de operaciones acciones e información. Menciona que las tareas cognitivas, teoremas, representaciones lingüísticas y simbólicas y la clasificación de situaciones, componen el modo de conocimiento.

Toma como primer punto de discusión, l os problemas de la orientación de la investigación hoy en día. El primero de estos problemas los refiere al agotamiento de las ideas y los modelos en las ciencias cognitivas. De entre ellos prevalece el problema de la conceptualización, cuya importancia es tá en el corazón de los procesos cognitivos.

"Como el psicólogo y el profesor, me siento involucrado en los debates sobre las ciencias cognoscitivas, particularmente en lo que se refiere al enfoque de la conceptualización que tiene tras de sí un desarrollo muy grande y que es un término difícil de definir en lo textos y que es posible examinar desde otros puntos de vista"

El segundo problema lo orienta en torno a la formación profesional en términos de la didáctica La mayor parte de los conocimientos están expuestos, una parte está explícita, pero el vacío está en la psicología y la didáctica.

"La duda comienza por la didáctica y la psicología que existe desde hace más de un siglo, cuyas referencias son Piaget y Vitgosky los cuales nos han aportado elementos esenciales para la comprensión de la cultura y de la culturización, llevadas a la educación".

Piaget aporta el concepto de esquema, como un elemento esencial para comprender i una persona se conduce y como genera situaciones, cuales son las variantes oper atorias que nos aportan el concepto. La diferencia de Piaget y Vitgosky, es que el primero defiende la idea de que el niño desarrolla una estructura lingüística, ya dada, la cual se contrapone con Vitgosky que designa la zona aproximada de desarrollo que (ZPD) comprende el lapso entre la vida adolescente hasta la adulta, los mecanismos adecuados serian estructuras lingüísticas que son parte del lenguaje, donde las ideas y los conceptos científicos son formas del lenguaje en contraposición de las ideas que s e dan en forma cotidiana.

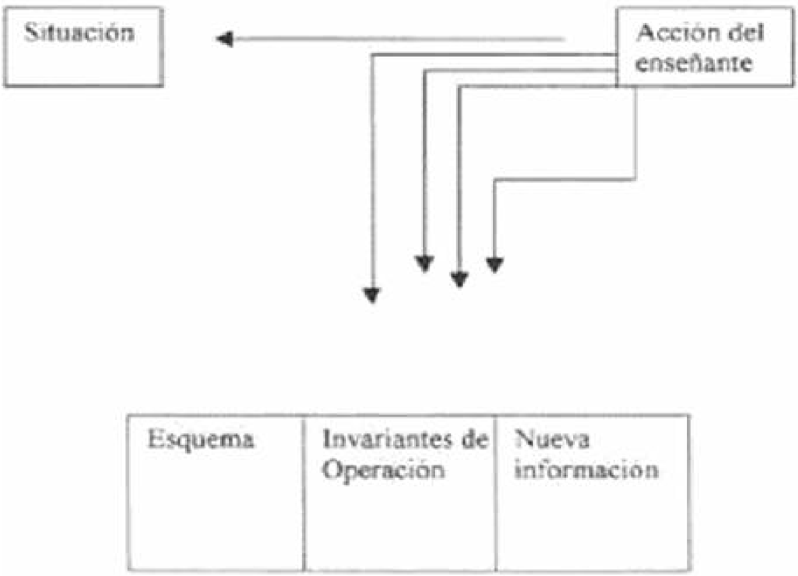
Vitgosky habla del concepto del inconsciente como una variante operatoria, mientras que Piaget desarrolla una teoría de la función simbólica como un intercambio entre la interiorización de la acción (asimilación) y la acomodación al objeto que epistemológicamente sigue la propuesta de Vitgosky en cuanto a un lenguaje interior y de la progresividad lingüística de los demás.

De acuerdo a Vergnaud las teorías de Piaget y Vitgosky son buenas pero no explican que el conocimiento es el c onocimiento, haciéndose las siguientes preguntas: cual es su referencia?, ¿cuál es su objeto referente?, ¿dónde esta y cuál es la interacción sujeto -objeto?

Para contestarse éstas preguntas, presenta la definición de esquema como una totalidad dinámica y funcional. Primeramente como algo que funciona como una unidad y en segundo lugar como una organización invariable de la conducta por situaciones dadas. En tercer lugar el esquema lo compone en cuatro categorías:

a) Los objetivos de intención y anticipación
b) R eglas de acción
c) Invariaciones operatorias
d) Posibilidades de inferencia en situaciones

Un problema entre la ciencia cognitiva es que la intención del sujeto ni las reglas de acción pueden constituir un concepto de esquema. Clasifica las invariaciones operator ias en dos grandes categorías: los conceptos en acto y los teoremas en acto. Los conceptos en acto son categorías que permiten producir la información pertinente en una situación. Los teoremas en acto son proposiciones tenidas por verdaderas que le permite n al sujeto trazar la información de los conceptos en acto. La representación del esquema es la siguiente:

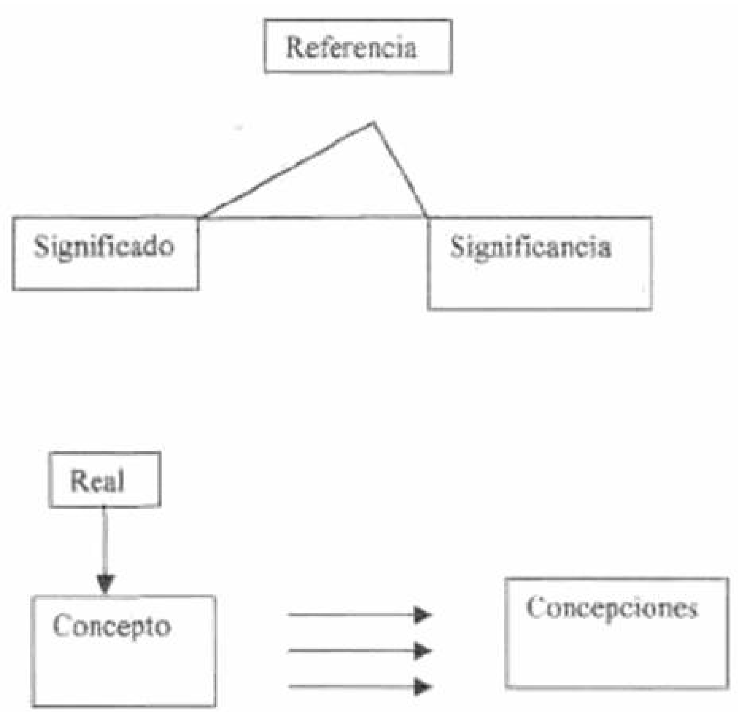


Representación del esquema de acuerdo a Vergnaud

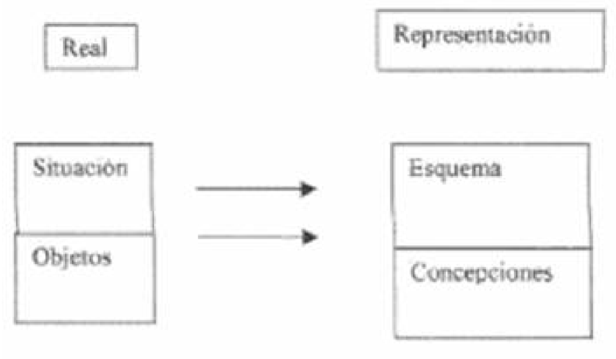
Posteriormente Verganuad da la definición de concepto conceptualización y Campo Conceptual como sigue:

"Un concepto no es ni verdadero ni falso, solamente es pertinente de acuerdo a la información o referencia que utiliza, por los objetivos de las reglas y de las acciones en una situación. La conceptualización consiste en el conjunto de teoremas y co nceptos. Entonces un Campo Conceptual (idea), es el conjunto de situaciones pertinentes entre ellas, que dependen de los conceptos necesarios por analizar. Una situación no puede ser pertinente con un solo concepto. La representación del concepto de acuerd o a Vergnaud, se presenta a continuación:

No existe ninguna situación sin esquema, ni esquema sin situación. Los conceptos son relativos a los objetos reales y después son experimentados en forma predictiva para el descubrimiento de lo real, entonces los esquemas no pueden ser operatorios si no descansan sobre sus invariantes, objetos y teoremas en acto, por lo tanto el esquema siguiente nos da la relación entre las situaciones y el esquema:



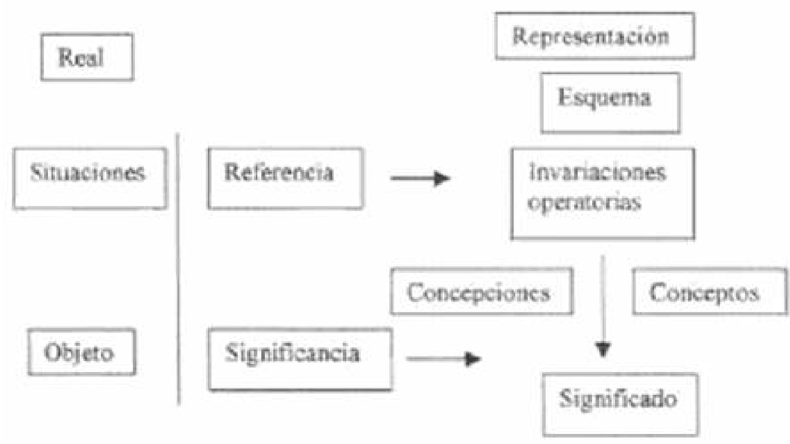
Esquema del concepto de acuerdo a Vergnaud



Relación entre el esquema y la situación de acuerdo a Vergnaud

Verganud continua con la siguiente exposición:
Sin conceptos de esquema y de situación es imposible entender como la situación es posible y además es equivalentemente imposible entender la adquisición del co nocimiento matemático. Relaciona al concepto, el esquema y la situación para definir el Campo Conceptual.

A continuación se representa el Campo Conceptual:



Esquema del Campo Conceptual, según Vergnaud

Dados los aspectos de la matemática en contexto, (C amarena, 1999) y la teoría de Campos Conceptuales de (Vergnaud, 1990), podemos percibir la necesidad de enmarcar nuestro trabajo de investigación con sustento en la Matemática en Contexto. No podemos desligar el objetivo de investigaciones posteriores a la contextualización de la serie de Fourier, dejamos como antecedente, la teoría de Campos Conceptuales.

2.4 Marco Metodológico

Para continuar con nuestro objetivo es necesario contar con el apoyo de la metodología, que guíe las distintas etapas y análisi s en este trabajo de investigación.

La descripción de la metodología a usar, se estructura en tres aspectos:

1. Estudio preliminar sobre la enseñanza y el aprendizaje de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.

2. contextualización de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa a través de las etapas de la Matemática en Contexto.

3. Significación de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa por medio de la contextualización de la misma.

1. Estudio preliminar sobre la enseñanza y el aprendizaje de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa. Contiene tres análisis:

- **Análisis, de entrevistas a profesores** de matemáticas e ingeniería química que tiene como objeto, analizar las diferentes concepciones de los profesores que imparten la materia de fenómenos de transporte en ingeniería química sobre el proceso de transferencia de masa y su vinculación con la serie de Fourier y analizar las diferentes concepciones de los profesores de matemáticas y física sobre la contextualización de la matemática en la ingeniería, particularmente, sobre el fenómeno de la transferencia de masa.

- **Análisis de los programas de estudio** de la especialidad de ingeniería química y matemáticas. Todo esto con el objeto de estudiar la forma de concepción y enseñanza del problema y su vinculación con la matemática de la serie de Fourier.

- **Análisis relativo a los estudiantes**. En el análisis relativo a los estudiantes, se hacen explícitas las distintas concepciones que de los estudiantes se tiene hasta el momento sobre el saber matemático específico de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.

  En este análisis, la noción de concepción matemática de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa tiene un lugar privilegiado y responde a dos necesidades distintas: 1) Poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre la serie de Fourier en el proceso, las representaciones y modos de tratamiento que le son asociados al exhibir su adaptación más o menos buena a la resolución de tal o cual clase de problemas de transferencia de masa; así mismo, 2) nos permitirá luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica transportada por los modelos empiristas del aprendizaje, permitiendo diferenciar los saberes que los profesores desean transmitir de los conocimientos efectivamente construidos por los estudiantes. El término concepción involucra dos tipos de objetos distintos:

- Las concepciones matemáticas de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa, posibles para una noción dada.
- Las concepciones desarrolladas por los estudiantes en un ambiente cultural o en el contexto de un proceso de aprendizaje.

Se designa por la expresión "conceptual espontánea" los conceptos desarrolladas por los estudiantes a propósito de una noción antes de que ésta haya sido un sujeto oficial de aprendizaje.

En las investigaciones de problemas matemáticos, el análisis se apoya simultáneamente sobre los dos niveles. La identifica ción de los principales conceptos matemáticos relativos a la serie de Fourier en la transferencia de masa, que se apoya solamente sobre el estudio de su desarrollo histórico, constituyendo un marco de referencia para el análisis de los conceptos del estudi ante hacia el proceso.

2. contextualización de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa en su desarrollo a través de las etapas de la Matemática en contexto.

Para el apoyo de la contextualización de la serie de Fourier, se realiza el análisis de libros de texto y posteriormente se desarrollan las seis etapas de la matemática en contexto.

- Análisis de libros de texto.

Se analizan libros de texto de matemáticas e ingeniería y física -matemática con el objeto de estudiar las diferentes for mas de exposición de cada uno de los autores que abordan el proceso de transferencia de masa y la serie de Fourier en la búsqueda de la contextualización.

- 1° Etapa. Planteamiento del Problema de transferencia de masa.

El planteamiento del problema se hace con el apoyo de un diseño experimental sencillo, donde se lleva a cavo el fenómeno de la transferencia de masa.

- 2° Etapa. Determinación de las constantes y variables del problema de transferencia de masa.

Con el planteamiento del problema a través del e xperimento propuesto, se analiza los diferentes mecanismos que sigue el proceso de transferencia, y se selecciona uno. La selección de las variables y constantes presentes en el mecanismo de transferencia de masa, se hace con la finalidad de acotar el meca nismo y dar prioridad a las variables y constantes que influyen directamente en lo que se quiere conocer.

- 3o Etapa. Determinación del modelo matemático del fenómeno de transferencia de masa.

A través del planteamiento del problema, por medio del experimento donde se lleva a cabo el fenómeno de transferencia de masa, así como la especificación de las variables y constantes presentes en el proceso, se procede a determinar la ecuación que gobierna dicho fenómeno de transferencia, llegando de esta forma a la matematización del problema.

- 4° Etapa. Solución matemática del problema de transferencia de masa.

Con la ecuación que representa el proceso de transferencia de masa, obtenida a través del modelo del planteamiento del problema con el diseño del experimento propuesto, se procede a dar solución matemática a la ecuación.

- 5o Etapa. Determinación de la solución requerida por el problema de Transferencia de Masa.

Con el planteamiento del problema, la especificación de las variables y constantes, la ecuación que gobierna el fenómeno de transferencia y la solución, matemática a través de la serie de Fourier, se logra dar la solución del problema en términos del fenómeno físico en la ingeniería química.

- 6o Etapa. Interpretación de la solución en términos del problema de Transferencia de Masa.

En términos de las condiciones específicas del problema planteado se analizan las soluciones para determinar la solución buscada.

3. Significación de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa por medio de la contextualización de la misma.

Dada la contextualización de la serie de Fourier, con el desarrollo de las seis etapas anteriores, nuestro objetivo es la significación del proceso de transferencia de masa.

CAPITULO 3

ESTUDIO PRELIMINAR SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA SERIE DE FOURIER EN EL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE MASA.

En el estudio preliminar sobre la enseñanza y el aprendizaje de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa, comprende tres análisis: Análisis de entrevistas a profesores del área de matemáticas y la ingeniería, en específico profesores de ingeniería química. Análisis de programas de estudio referentes a la serie de Fourier y el proceso de transferencia de masa. Análisis relativo a los estudiantes de ingeniería química a través de un cuestionario exploratorio. Los tres análisis se hacen con el propósito, de estudiar y analizar los diferentes puntos de vista del profesor acerca del tema, de estudiar y analizar de que forma los programas de estudio abordan a la serie de Fourier y el proceso de transferencia de masa, tanto en la matemática como en la ingeniería química y de analizar, las ideas y concepciones que el estudiante de ingeniería química tiene acerca del proceso y su relación con la matemática. Detalles de estos análisis se dan a continuación:

3.1 Análisis de la entrevista a profesores

Se realizó un estudio de caso, con tres entrevistas, con el objeto de estudiar y analizar los diferentes puntos de vista del profesor de ingeniería química, de matemáticas y física que han impartido alguna vez un curso en el cual se incluye la serie de Fourier y el tema de transferencia de masa o transferencia de calor o movimiento. El objetivo de estas entrevistas es conocer el punto de vista de cada uno de ellos acerca del proceso de enseñanza de la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería, analizar si existe vinculación y en que forma vinculan la matemática con las diferentes especialidades, analizar el predominio de la conceptualización de la serie de Fourier en la ingeniería, conocer, de acuerdo a su experiencia docente las diferentes dificultades que presentan los estudiantes para entender proceso de transferencia de masa y la serie de Fourier, estudiar si de alguna forma el profesor realiza alguna contextualización de la matemática de la serie de Fourier y además, conocer la manera de cómo imparten el tema en particular y los recursos de que se valen para su enseñanza, las preguntas fueron diferentes para cada profesor de acuerdo a su especialidad. A continu ación se presentan los resultados de las tres entrevistas.

Profesor 1
Licenciado en matemáticas. Instituto Tecnológico de Toluca (ciencias básicas).

1.- ¿Qué dificultades presentan los estudiantes para entender los conceptos referentes a las series de Fourier?

> **En general los alumnos tienen dificultad para entender lo que son las series de Fourier**.

2.- ¿Cómo imparte en sus cursos el tema de las series de Fourier?

> **Primero en un curso anterior, se dan los antecedentes a Las series de Fourier. Cuyo antecedente es la representación de una función periódica en series de Taylor con el objeto de que el estudiante, como una señal periódica pueda representarla como la suma de funciones no periódicas en polinomios en un intervalo o en un punto y después se dan los conceptos de la serie de Fourier. Las series de Fourier se exponen de manera siempre igual, donde se busca que el estudiante la reconozca y pueda desarrollarla dada una función.**

3.- ¿Cuál es la importancia de la enseñanza de las series de Fourier?

Es importante que el estudiante comprenda el tema debido a que en las especialidades de ingeniería se utilizan mucho...

4.- ¿Sabes en cuáles especialidades?

Sí. En las especialidades de .., Electrónica y Electromecánica...

5.- ¿Se considera alguna relación matemática entre las series de Fourier y algún fenómeno en estudio en su enseñanza?

No. El estudiante no entiende la matemática, menos su aplicación

6.- Profesor, al impartir este tema de matemáticas, se vincula con la ingeniería para lograr alguna conexión como aplicación entre los procesos de transferencia?

No. Es muy difícil para el estudiante

7.- Crees que es importante que se de la vinculación entre la matemática y la ingeniería para contribuir en la formación del ingeniero?

Si, es importante pero no todos pensamos igual....

Del análisis anterior, se puede percibir con la entrevista, que él tiene el conocimiento de que las series de Fourier son importantes en las diferentes especialidades de la ingeniería. Sin embargo no se da la contextualización de las ecuaciones ni de las series. Los conceptos matemáticos se dan en forma aislada de la ingeniería, sin hacer nada por cambiar esta forma de enseñanza de la matemática.

Profesor 2

Ingeniero Químico. Instituto Tecnológico de Toluca (Ingeniería Química).

l.- ¿Qué dificultades presentan los estudiantes para entender el proceso de transferencia <de masa?

> **Los estudiantes tienen dificultades para entender el proceso de transferencia de masa, por falta de antecedentes físico-químicos, propios de la especialidad.**

2.- ¿Cómo imparte en sus cursos el tema de transferencia de masa

> **Muestro el panorama de los procesos de transporte, dando la mayor importancia a los fenómenos de transferencia de calor y de movimiento. La transferencia de masa, se da de manera somera debido a la poca información teórica del proceso. Lo que se imparte es por deducción de la transferencia de calor. Además experimentalmente podemos obtener buenos datos y datos gráficos por medio de gráficas pertenecientes a la conducción de calor con buenas aproximaciones para cualquier sustancia. Los cálculos matemáticos utilizados son sencillos, en base únicamente a una integral. Lo que nos interesa en el proceso de transferencia de masa es calcular la constante de difusión de masa**

3.- ¿Considera importancia incorporar a su clase la vinculación de las series de Fourier como solución de las mismas, con el objeto de obtener la serie de conceptos necesarios en la significación del proceso en estudio?

Considero que sí son importantes las series de Fourier, pero el estudiante no comprende la relación matemática y el proceso físico -químico. Entonces omitimos las matemáticas y les damos alguna fórmula. Además ellos van a ser ingenieros no matemáticos.

4.- ¿Considera que el estudiante le da significación al proceso?

En el campo de la ingeniería el estudiante si lo comprende, que es lo mismo que el significado.

5.- ¿Para el proceso de transferencia de masa, se propone algún experimento con la finalidad de que el estudiante comprenda mejor el fenómeno?

No. No es necesario, porque el estudiante sí lo comprende

Dado el campo de acción del profesor, éste le da mucha importancia a la ingeniería al contrario de las matemáticas. Se puede percibir la poca importancia que le da la comprensión y conceptualización del fenómeno. Considera que a través de fórmulas el estudiante ya aprendió.

Cabe hacer mención que todas las preguntas diseñadas al profesor no fueron expuestas debido a que le profesor decidió terminar la entrevista.

Profesor 3

Investigador Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey Campus Toluca

1. ¿Qué importancia tienen las ecuaciones diferenciales

parciales y las series de Fourier en la ingeniería?

Las series de Fourier y las ecuaciones diferenciales parciales no se ven en ningún curso de licenciatura en ingeniería, se toca el tema en el curso propedéutico para la maestría y en la maestría de Ingeniería Industrial y Electrónica, el tema se imparte en una semana y se dan conceptos generales poniendo atención en aplicaciones. No en los difíciles conceptos matemáticos. Nuestro objetivo son las aplicaciones en la ingeniería. El estudiante de ingeniería, con los conceptos generales sobre la serie de Fourier, comprende e interpreta los problemas propios de la ingeniería electrónica e industrial.

2. Cuáles son esos conceptos a los que se refiere profesor?

Los conceptos básicos sobre las series de Fourier, como lo son, el cálculo de las constantes, la convergencia, la periodicidad, la transformada...

El profesor, termina su entrevista con la respuesta anterior, argumentando que tiene una clase enseguida. De su entrevista concluimos lo siguiente: considera que las series de Fourier es tan solo una herramienta para abordar otros temas en la ingeniería y maestría. Solamente se imparten los aspectos indispensables que, en muchas ocasiones resultan ser insuficientes por la poca profundización en su conceptualización y significación de la ingeniería misma.

Conclusiones de la entrevista a profesores:

Relacionando los resultados de las entrevistas, tenemos que: la mayoría de los profesores considera que el tema es difícil para el estudiante en el contexto matemático, en el cual deben tener antecedentes algorítmicos sobre las series. En las carreras de electrónica, química y electromecánica se profundiza en el tema como aplicación, además de los postgrados. Consideran que la vinculación es importante para, pero no se pueden tocar temas muy complejos como éstos, debido a que el estudiante no está preparado para su conceptualización y significación.

Por tanto, podemos proponer que la contextualización de las series de Fourier en el proceso de transferencia de masa puede ser una incorporación al discurso matemático el cual comprende varios conceptos que dotarían de significado al proceso en estudio.

3.2 Análisis de la revisión de los programas de estudio.

La revisión curricular se realizó con el propósito de verificar que los programas de estudio de la especialidad de ingeniería química y matemáticas, en los que se aborda el tema de transferencia de masa o bi en, las ecuaciones diferenciales parciales y las series de Fourier respectivamente además de conocer, los cursos donde se imparte. Enseguida se presenta el resultado de la revisión realizada.

Nombre del curso: Fenómenos de Transporte
Carrera: Ingeniería Química
Ubicación del curso dentro de la carrera: Este curso se imparte en el sexto semestre de la carrera como parte de la especialidad. Tiene como aprendizaje requeridos, el curso de matemáticas III de Ecuaciones diferenciales y de química, los cursos de termodinámica, balance de materia y energía.

Estructura General: El curso: Fenómenos de Transporte, esta constituido de las siguientes unidades:

I. Ecuaciones de variación para sistemas no isotérmicos en transferencia de calor II. Transferencia de calor por convección
III. Mecanismos de transporte de masa
IV. Balance de materia
V. Transporte en la interfase

Extensión del tema: La primera unidad contiene los siguientes temas:

1.1. Las ecuaciones de energía
1.2. Las ecuaciones de energía en coordenadas curv ilíneas
1.3. Aplicaciones de las ecuaciones de variación en los problemas de transmisión de calor en estado estable en una y dos dimensiones

La segunda unidad contiene los siguientes temas:

2.1. Convección libre
* 2.1.1. Análisis dimensional y correlaciones empíricas

2.2. Convección forzada

- * 2.2.1 Análisis dimensional y correlaciones empíricas
- * 2.2.2 Analogías

2.3. Ebullición y Condensación

2.4. Aplicaciones

La tercera unidad contiene los siguientes temas:

3.1. Definiciones de concentraciones, velocidades y densidades de flujo de materia

3.2. Transporte molecular

- ➢ 3.2.1 Deducción de la ley de Fick y sus formas equivalentes
- ➢ 3.2.2 Cálculo de las difusividades en mezclas binarias y multicomponentes en función de la presión y la temperatura para gases líquidos y sólidos

3.3. Transferencia de masa por convección

La cuarta unidad contiene los siguientes temas:

4.1. Condiciones límite

4.2. Perfiles de concentración y distribuciones de densidad de flujo de materia

- ➢ 4.2.1. A través de un gas estacionario con área constante y área variable
- ➢ 4.2.2. Con reacción química

La quinta unidad contiene los siguientes temas:

5.1. Análisis dimensional y correlaciones empíricas para coeficientes individuales

5.2. Teoría de la doble capa

5.3 Relación entre los coeficientes individuales y globales de transferencia de materia

Como se puede apreciar el programa de estudio de la especialidad de ingeniería química no aborda a la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa. Por lo tanto no se le da significación a través de la misma. Los conceptos matemáticos y su significación se encuentran ausentes en el aprendizaje del proceso de transferencia de masa.

Nombre del curso: MATEMÁTICAS IV

Especialidad: Ingeniería Química.

Ubicación del curso dentro de la carrera: Este curso se imparte en el cuarto semestre de la carrera y tiene como cursos anteriores: Matemáticas I, Matemáticas III y como posteriores dentro de la ingeniería química, Termodinámica, Operaciones unitarias I, II, III, IV y VI, Fenómenos de Transporte I y II, Instrumentación y Control.

Estructura General: El curso: MATEMÁTICAS IV está constituido de las siguientes unidades:

I. series de Fourier.

II. Ecuaciones Diferenciales Parciales.

III Transformada de Laplace.

IV Aplicaciones de la transformada de Laplace.

Extensión del tema: La primera unidad contiene los siguientes temas:

1.1. Introducción, importancia del uso de y aplicación de las series de Fourier.

1.2. Propiedades y trazo de función es trigonométrico, y periodos.

1.3. Funciones ortogonales.

1.4. Cálculo d e coeficientes de una serie de Fourier.

1.5. Desarrollo de una función de periodo arbitrario en una serie de Fourier.

1.6. Desarrollo de una función par o impar con periodo arbitrario en una serie de Fourier.

1.7. Desarrollo de medio rango.

1.8. 1Forma compleja de la serie de Fourier

1.9. Aplicaciones.

Dentro de la carrera de Ingeniería Química se considera en el curso de matemáticas IV, el tema de series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales Parciales, no existe conexión entre un concepto y otro ya que se dan en forma aislada. Las ecuaciones parciales y la serie, se abordan con los conocimientos del curso de matemáticas III. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en el cual el programa dedica una unidad a sucesiones, series, series de potencias, serie de Taylor y serie de Maclaurin.

En las aplicaciones a los temas, solamente se da la ecuación de calor, sin entrar a detalles. No se menciona el proceso de transferencia de masa. La curricula contiene en mayor extensión a la Transformada de Laplace.

Conclusiones:

A través de la revisión de los programas de estudio vigentes en el Instituto Tecnológico de Toluca percibimos la falta de conceptualización de la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería química. Los conceptos sobre la serie y los conceptos refer entes al proceso de transferencia de masa se perciben en forma aislada, existiendo una ruptura entre la matemática y la ingeniería.

3.3 Análisis relativo a los estudiantes

El análisis relativo a los estudiantes se realizó con el objeto de conocer, las ide as intuitivas y concepciones que el estudiante de ingeniería química tiene acerca de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa, así como la forma de representación f matemática del fenómeno, con el propósito de conocer y analizar, cuáles s on las formas de vinculación entre la matemática y el proceso, que el estudiante tiene, para comprender el tema y además de analizar los diferentes conceptos con los que cuenta el estudiante en la conceptualización del proceso de transferencia de masa por medio de la serie de Fourier y como le da significación a través de las mismas. Para tales propósitos se diseñó un cuestionario exploratorio basado en la propuesta de un experimento sencillo que se lleva a cavo en el laboratorio de operaciones de ingenierí a química. El análisis fue un estudio de caso, que consistió en aplicar un cuestionario a dos estudiantes y a un profesor de ingeniería química del Instituto Tecnológico de Toluca. El tiempo para la contestación del cuestionario fue en dos sesiones cada un a de dos horas. A los estudiantes y profesor se les aplico en cuestionario en sesiones diferentes.

Para proponer el experimento tomamos como referencia el mecanismo fundamental de transporte. Si el modelo de transporte consiste en dos clases diferentes de moléculas tiene lugar la transferencia de masa. Se supone que el elemento volumen representado en la figura que se da continuación, contiene dos especies diferentes de moléculas, designadas por a y b.

Todas las moléculas son iguales en cuanto al tamaño y s e mueven a velocidades iguales siguiendo una dirección errática, moviéndose en todas las direcciones posibles. Si se encuentran más moléculas "a" en un volumen dado, tenderán a emigrar en un movimiento errático a la región vecina de concentración inferior. Si la diferencia de concentración se sostiene, habrá un flujo estable de moléculas "a", que emigrarán de la región de alta concentración a la de concentración inferior.

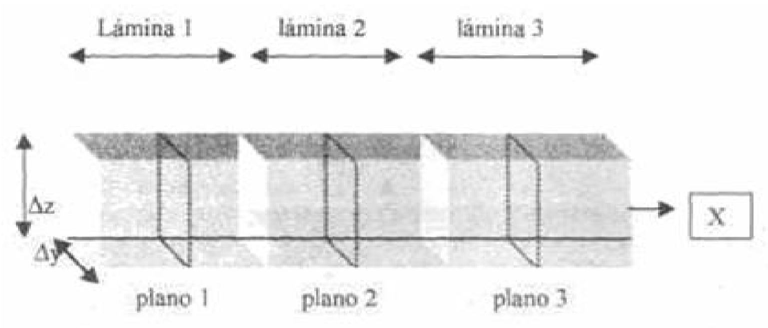


figura 1. Elemento volumen de la sustancia modelo

En torno a estos conceptos, el experimento se propuso haciendo algunas consideraciones con el propósito de que al aplicar el cuestionario, el estudiante contara con un modelo sencillo de transferencia de masa y de esta forma facilitar la concepción de la serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.

El experimento a continuación se describe: Se tiene un gel coloidal humedecido con alcohol que se va a secar, el material se empaca en una charola con espesor y longitud considerable. La cara superior se expone a una corriente de aire y el alcohol se transfiere a través del gel. Las moléculas a, de alcohol se transfieren a través de las moléculas b, del gel. Con el aire, el alcohol se transfiere a través del gel por transporte molecular. Para que el estudiante modele el experimento en el cuestionario, debemos establecer lo siguiente: la transferencia de masa de alcohol es constante a través del gel. La concentración inicial en el gel es uniforme y el fenómeno de transporte de moléculas de alcohol es por conducción.

En el experimento la charola se somete al secado en un equipo especial de secado. El equipo tiene un medidor de pérdida de humedad del líquido en unidades de volumen que se puede leer durante el tiempo en que dura la operación. El medidor de volumen ya no cambia cuando se considera que ya termino el tiempo de secado y por consecuencia que él gel está seco. Nosotros fuimos tomando el tiempo de secado con un cronómetro.

La concentración inicial del gel antes del secado es uniforme y la transferencia de Masa de alcohol es constante. El tiempo de inicio del secado es en un tiempo t_0.

El experimento lo esquematizamos por medio de la siguiente figura.

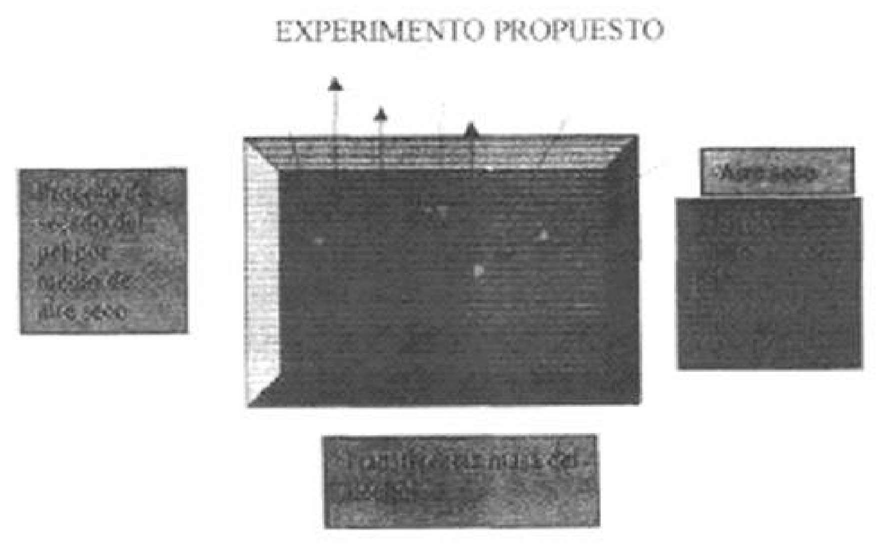


figura 2. Esquematización del experimento

Cuestionario exploratorio

De acuerdo a lo anterior sin perder de vista nuestro o bjetivo en esta investigación, el cuestionario se estructuró en siete aspectos:

I. Sobre el conocimiento del fenómeno físico de la transferencia de masa.

1. ¿Cómo es la concentración del gel humedecido con el alcohol, en los diferentes puntos de la charola. Por ejemplo ¿en el centro, en la superficie y el fondo de la charola? ¿Cómo percibes la concentración con respecto a éstos puntos?

II. Sobre la representación del fenómeno y el concepto de infinito

2. Trazar la gráfica de la función que crees posible para la concentración del gel de acuerdo a la pérdida de humedad del gel en donde $C_{t0}(x)$ sea la concentración para un instante de tiempo dado t_0. Lo mismo para $t + \Delta_{t0}$, hasta $t + n\Delta_{t0}$.

3. ¿Es posible identificar la naturaleza de la gráfica que se acaba de trazar?

III. Sobre la posibilidad de modelar de acuerdo al experimento una ecuación diferencial parcial para representar el fenómeno de la transferencia de masa.

4. ¿Construye una expresión para la concentración del gel que este en función del tiempo t?
5. Trazar la curva que representa la concentración del gel contra la posición x en la charola para un tiempo t.
6. ¿Construye una ecuación que represente las curvas obtenidas anteriormente para cada tiempo t?

IV Sobre el concepto de estado estacionario

7. ¿Qué ocurre con el valor de la concentración del gel para cada punto de la charola cuando se expone al secado con el aire seco a medida que transcurre el tiempo?

8. ¿Qué ocurre con el valor de la concentración del gel para cada punto de la cha rola, cuándo el tiempo es casi infinito?

9. Bosquejar la gráfica que represente dicho estado

10. ¿Qué relación tiene con las otras gráficas?

V Sobre el concepto de estado de variación

11 ¿Cuál sería de variación en el experimento propuesto? ¿Cómo se re presenta?

VI Sobre el concepto de la serie de Fourier

13. ¿Cómo conceptualizas a la serie de Fourier para el proceso de transferencia de masa

VII Sobre la significación del proceso

14 ¿Qué significado le das al proceso de transferencia de masa?

3.3.2 Resultados

Datos obtenidos en el cuestionario

Para proporcionar los datos obtenidos en el cuestionario marcamos a los estudiantes con una E y la inicial de su nombre: estudiante Marisol (EM), estudiante Fredy (EF) y el profesor Carlos (PC). Los datos se e xponen en tablas con preguntas por aspecto, con dos columnas, donde en la primera columna se tiene los estudiantes y al profesor. En la segunda columna sus respuestas.

Primer aspecto: Sobre la el conocimiento del fenómeno de la transferencia de masa.

1. ¿Cómo es la concentración en los diferentes puntos de la charola?

EM	**La concentración es la misma en cualquier punto de la charola**
EF	**En el centro la concentración del gel es mayor que en la superficie de la Charola**
PC	**Es diferente. La masa de alcohol f luye a la superficie**

Segundo aspecto: II. Sobre la representación del fenómeno y el concepto de infinito

2. Trazar la gráfica de la función que crees posible para la concentración del gel de acuerdo a la pérdida de humedad del gel en donde C_{t0} (x) sea la concentración para un instante de tiempo dado t_0. Lo mismo para $t+D_{t0}$. hasta $t + nD_{t0}$.

3. ¿Es posible identificar la naturaleza de la gráfica que se acaba de trazar?

EM	**No se da función alguna, pero sí sé gráfica. No se identifica la gráfica**
EF	**No se da función alguna, pero sí sé gráfica. No se identifica la gráfica**
PC	**No se da función alguna pero sí sé gráfica. No se identifica la gráfica**

Las gráficas se muestran a continuación:

Las gráficas que se hicieron muestran la concentración del alcohol en función de la temperatura. Esta variable para ellos es la más importante. Todo el proceso es por la transferencia de calor.

Tercer aspecto: Sobre la posibilidad de modelar de acuerdo al experimento una ecuación diferencial parcial para representar el fenómeno de la transferencia de masa.

4. ¿Construye una expresión para la concentración del gel que este en función del tiempo t?

5. Trazar la curva que representa la concentración del gel contra la posición x en I charola para un tiempo t.

6. ¿Construye una ecuación que represente las curvas obtenidas anteriormente para cada tiempo t?

EM	**No contesta ninguna pregunta**
EF	**$\P C_{gel}/\P P_{gel}=P^{0}_{gel}$= presión de vapor del gel, $\P C/\P t=0$. No traza curvas**
PC	**$C_{gel}=(C_1-C_0)+(T_0-T_1)$. Donde C_0 es la concentración inicial de l gel, T_0 temperatura inicial y T_1 temperatura final. No traza ninguna curva**

Cuarto aspecto: Sobre el concepto de estado estacionario

7. ¿Qué ocurre con el valor de la concentración del gel para cada punto de la charola cuando se expone al secado con el aire seco a medida que transcurre el tiempo?
8. ¿Qué ocurre con el valor de la concentración del gel para cada punto de la charola, ¿Cuándo el tiempo es casi infinito?
9. Bosquejar la gráfica que represente dicho estado
10. ¿Qué relación tiene con las otras gráficas?

EM	**No se contesta**
EF	**No se contesta**
PC	**El valor de la concentración aumenta y es la misma para cada punto de la charola. No se trazan gráficas**

Quinto aspecto: Sobre el concepto de estado de variación

11 ¿Cómo sería el estado de variación en el experimento propuesto? ¿Cómo se representa?

Ninguna persona lo contesta

Sexto aspecto: Sobre el concepto de la serie de Fourier

12. ¿Cómo conceptualizas a la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa

EM	**No se contesta**
EF	**No se contesta**
PC	**La serie de Fourier, la conozco para la conducción de calor. Aquí debe ser lo mismo**

Séptimo aspecto: Sobre la significación del proceso

13 ¿Qué significación le das al proceso de transferencia de masa?

EM	**Es un fenómeno de transporte muy importante para la Ingeniería Química**
EF	**Es un fenómeno donde la masa del gel que entra en la operación del secado es la misma que cuando se termina la operación. Lo importante en el fenómeno es la temperatura que es la que influye para que se dé la difusión de masa.** **El ingeniero lo que calcula es la constante de difusión a través de Gráficas**
PC	**Es una difusión en gases o cualquier otra sustancia donde se calcula la concentración en función de la temperatura**

Con el objeto de presentar una visión que nos proporcione las concepciones que tienen los estudiantes y el profesor sobre la serie Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa, resumimos los resultados que arroja la aplicación del cuestionario de la siguiente manera:

- **Se percibe claramente la falta de conceptualización del proceso en estudio**
- **No existen procedimientos y conceptos sobre el proceso de transferencia de masa.**
- **En el contexto de la Ingeniería, la serie de Fourier no está contextualizada**
- **El contexto algebraico y algorítmico, sobre el conocimiento del proceso, predomina al enfocar la concepción de la transferencia de masa en el cálculo de coeficientes de difusividad y perfil de concentraciones; no pueden significarlo**

- **Se encuentran ausentes los conceptos referentes al proceso de la transferencia de masa y los conceptos sobre la serie de Fourier.**
- **Los estudiantes y el profesor conciben al proceso de transferencia de masa como un fenómeno químico aislado de la matemática**
- **Debido a la falta de concepción matemática y física de la serie de Fourier en el proceso, no existe la contextualización de la serie de Fourier en el proceso.**

Después de los resultados obtenidos en los análisis anteriores resumimos una clara falta de vinculación de la serie de Fourier en la ingeniería correspondiéndol e la ausencia de conceptualización y significación a esta noción. Por consecuencia, consideramos pertinente y como una necesidad, contextualizar la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa.

CAPITULO 4

LA CONTEXTUALIZACIÓN DE LA SERIE DE FOURIER EN EL PROCESO DE TRANSFERENCIA DE MASA

Antes de presentar el desarrollo de las etapas de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa, es necesario exponer el análisis de libros de texto referentes al concepto matemático en estudio y al proceso de transferencia de masa. El análisis y estudio de los libros de texto, se hizo con el propósito de estudiar de qué manera los libros abordan el tema, qué énfasis se le da, si es que existe la contextualización de Fourie r en el proceso de transferencia de masa y, contestarnos las siguientes preguntas: ¿abordan el proceso de transferencia de masa haciendo un análisis matemático del mismo?, ¿qué conceptos manejan?, ¿de qué forma se tratan los conceptos y procedimientos en e strecha conexión para el aprendizaje del proceso de transferencia de masa?, ¿de qué conceptos sobre la serie de Fou rier están estructurados los temas de estudio?, ¿se abordan como tal los conceptos matemáticos implícitos al tema?

Los resultados del análisi s que nos da respuesta a las preguntas anteriores se dan a continuación.

4.1 Análisis de libros de texto.

Se analizaron libros de texto de ingeniería química, de matemáticas y de ecuaciones de la física matemática, con el propósito de analizar de qué mane ra se abordan los conceptos matemáticos y cuáles son los conceptos relativos a las series de Fourier en la transferencia de masa.

Para el análisis de libros de texto se tomó el siguiente criterio:
Conceptos y extensión de las series de Fourier en la exposi ción general del libro ya sea texto de matemáticas o de ingeniería química.

1. Extensión de conceptos sobre las series de Fourier en el proceso
2. Estructura general de conceptos referidos al tema.
3. Estadísticas: Número de páginas dedicadas a la exposición de cad a sección.
4. Método utilizado en la exposición.
5. El papel de los problemas de transferencia de masa.
6. Presentación de la teoría sobre serie de Fourier y su relación con el proceso de transferencia de masa.
7. Exploración de los supuestos del autor.
8. Exploración de las nociones: transferencia de masa, infinito, propagación de masa en el espacio estado estacionario, estado de variación y significación de la transferencia de masa a través de la serie de Fourier.
9. Exploración de la contextualización de la serie de Four ier en el proceso de transferencia de masa.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Textos de Ingeniería Química

Christie J Geankoplis, (1982). Proceso de Transporte y Operaciones Unitarias. México: CECSA [17]

1. Extensión de conceptos sobre las series de Fourier en el proceso de transferencia de masa en la exposición general del libro.

El texto contiene 11 capítulos en 749 páginas, de los cuales dentro del capítulo 5 se dedica un párrafo para dar la ecuación diferencial parcial general que representa la transferenc ia de masa como una deducción del proceso de propagación de calor, se menciona la serie de Fourier como solución a la ecuación diferencial parcial sin su obtención. La solución de la ecuación diferencial parcial solamente se menciona como la misma que se u tiliza en la de calor. La serie de Fourier está ausente.

2. Estructura general del tema.

Capítulo 5. Principios de transferencia de masa.

5.1 Introducción a la transferencia de masa, difusión en gases, difusión en líquidos difusión en sólidos y difusión en geles

5.2 Transferencia de masa en estado inestable

5.3 Transferencia conectiva de masa

5.4 Temas selectos (transferencia de masa en suspensiones, de gases en sólidos porosos, difusión con convección y reacción química y métodos numéricos para la difusió n molecular.

3. Estadísticas

Sección	Páginas	Definiciones	Teoremas	Teoremas sin Demostrar	Conceptos	Ejercicios algorítmicos	Ejercicios de Comprensión	Problemas
1	26	14	0	0	0	1	0	10
2	7	2	0	0	0	3	0	10
3	15	10	0	0	0	7	0	10
4	6	5	0	0	0	1	0	10

Como puede verse, en la tabla anterior, el autor:

- No presenta teoremas y carece de conceptos sobre el proceso. No existe ninguna relación de la serie con el proceso para su estudio.
- La mayoría de los ejercicios se proponen y se resuelven en forma algorítmica, sin que se dé la comprensión de ellos, el autor maneja siempre deducciones, no maneja conceptos
- Considera los problemas como parte de su exposición y no de conceptos sin que se resuelvan. Los propone al final del tema.

4. Método utilizado en la exposición

Con el análisis del texto: la exposición y definiciones, el autor las hace a partir de ejemplos, induciendo para avanzar en la teoría y posteriormente supone y de deduce que se entiende esta y busca el desarrollo de habilidades en el estudiante a través de p ocos ejercicios, sin llegar a la conceptualización del tema. Carece de conceptos.

5. El papel de los problemas

Se contemplan problemas sin ningún concepto sobre la serie de Fourier. Desde el inicio del tema, los problemas, propuestos por el autor, son pro blemas que no se resuelven a través de serie, no les da significado, de esta forma el autor considera que los conceptos no tienen importancia sobre la serie en el proceso y considera que nos son importantes en el aprendizaje del proceso.

6. Presentación de la teoría

La teoría es presentada a través de pocas definiciones y problemas, no existe la conceptualización del proceso ni la significación del mismo.

7. Exploración de los supuestos del autor

- No se considera la historia de cómo surge el proceso de tra nsferencia de masa con la representación de la ecuación diferencial parcial y su solución así como significación en los conocimientos para el aprendizaje de los estudiantes.
- El autor supone que por lo que refleja en su exposición que los distintos conocim ientos que expone son homogéneos, sin considerar las dificultades inherentes al conocimiento y los obstáculos epistemológicos.
- El autor supone que desglosando el tema poco a poco se da con seguridad el aprendizaje bastando con que el estudiante entienda su exposición para continuar con su aplicación.
- El autor no le da énfasis al proceso matemático de la transferencia de masa ni para darle significado.
- El autor supone que con la formalización del proceso de transferencia de masa en la ingeniería química, el estudiante debe entender las definiciones y las puede aplicar.

8. Exploración de las nociones: infinito, series de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales, convergencia, estado estacionario, propagación de ondas en el espacio, estado de variación del proceso y la falta de conexión de los anteriores conceptos en el proceso de transferencia de masa.

Se da por hecho que el estudiante tiene nociones sobre ecuaciones diferenciales. El concepto y la palabra infinito, no aparece en ningún lugar del tema. La serie de Fourier se menciona como parte del fenómeno de conducción de calor. No existen los conceptos de estado estacionario, estado de variación. No hay ilación con ningún concepto.

El proceso de transferencia de masa, se aborda, teniendo como antecedente el proceso de transferencia de calor. No se consideran los conceptos de las ecuaciones diferenciales parciales y la serie de Fourier dentro del proceso, únicamente se mencionan como fórmula para deducir otra.

9. Exploración de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa.

El autor no presenta conceptos sobre el proceso de transferencia de masa, en relación, a la serie de Fourier. Por tanto la serie de Fourier carece de contexto en la ingeniería, en el proceso de transferencia de masa.

A S. Foust .R (1989). Principios de Operaciones Unitarias. México: CECSA [16]

1. Extensión del proceso de Transferencia de masa en la exposición general del libro.

El texto contiene 1 capítulo dividido en tres partes con 687 páginas, donde en la parte II, con

175 páginas se lo dedica al tema. El proceso de transferencia de masa se trata si: profundizar en la matemática. Las ecuaciones diferenciales parciales se indican en 1 ecuación general para representar el proceso, como deducc ión del proceso de transferencia de calor. No se resuelve la ecuación diferencial. No se menciona a Fourier.

2. Estructura general del Tema.

Parte II Transporte molecular

1. Mecanismo del transporte molecular
2. Aplicaciones del Transporte molecular. Teor ía de estado estable
3. Aplicaciones al estado inestable de la Teoría de Transporte molecular
4. Mecanismo de transporte Turbulento
5. Fundamentos de Transferencia Turbulenta
6. Transferencia en la interfase
7. Nomenclatura

3. Estadísticas

Sección	Páginas	Definiciones	Teoremas	Teoremas sin Demostrar	Conceptos	Ejercicios algorítmicos	Ejercicios de Comprensión	Problemas
1	30	12	0	0	0	6	6	20
2	19	6	0	0	0	3	5	21
3	12	3	0	0	0	0	1	11
4	16	5	0	0	0	0	3	11
5	65	15	0	0	0	10	5	42
6	221	12	0	0	0	0	3	16
7	3	0	0	0	0	0	0	0

De la tabla anterior se deduce lo siguiente: los conceptos manejados en la explicación del proceso de transferencia de masa son nulos, no existen contenido matemático en la exposición general del libro. La representación del proceso se da com o una fórmula.

4. Método utilizado en la exposición

El autor dedica muy poco espacio a la exposición del tema. La parte II del texto comprende a la transferencia de masa, de momento y de calor.

Como se puede ver, las definiciones y la exposición de la teor ía es deficiente, son pocos los problemas dados como ejemplo.

5. El papel de los problemas

La gran mayoría de los problemas propuestos no son algorítmicos, si no de comprensión.

6. Presentación de la Teoría

El autor en el desarrollo de sus exposiciones n o considera la acción del sujeto sobre el objeto del conocimiento, dejando ver el poco interés en que el estudiante tenga interacción con los conceptos sobre la transferencia de masa, evitando que él mismo rehuya sistemáticamente al enfrentarse a ellos y a sus conexiones matemáticas de tal manera que el estudiante no construye sus conocimientos.

Al autor le basta que el estudiante entienda su definición, para posteriormente entre en la etapa de los ejercicios y erróneamente creer que el estudiante ha "apren dido".

7. Exploración de los supuestos del autor

- El proceso de transferencia de masa, es abordado desde el contexto de la ingeniería química. La ecuación diferencial parcial que representa al proceso de transferencia de masa no es modelada bajo ningún pro blema de transferencia de masa, simplemente se da como conocida sin contenido matemático ni significación. Por lo tanto el autor considera que lo anterior es suficiente para el aprendizaje de los estudiantes.
- Se puede apreciar que el autor por lo que refle ja en su exposición, los distintos conocimientos que expone son homogéneos, sin considerar las dificultades inherentes al conocimiento y los obstáculos epistemológicos presente en el proceso de transferencia de masa, como lo es el límite y el infinito.
- El autor no le da énfasis al proceso matemático de la transferencia de masa ni para darle significado.
- El autor supone que con la definición de la transferencia de masa y resolución de algunos problemas el estudiante puede entender las definiciones y las pued e aplicar posteriormente.

8. Exploración de las nociones: infinito, series de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales, convergencia, estado estacionario, propagación de ondas en el espacio, estado de variación del proceso y la falta de conexión de los anteriores conceptos en el proceso de transferencia de masa.

Los conceptos como infinito, no aparecen en ningún lugar del tema. La serie de Fourier se menciona como parte del fenómeno de conducción de calor. No existen los conceptos de estado estacionario, estado de variación. No hay ilación con ningún concepto matemático.

El proceso de transferencia de masa, se aborda, teniendo como antecedente el proceso de transferencia de calor. No se consideran los conceptos de las ecuaciones diferenciales parciales y la serie de Fourier dentro del proceso, únicamente se mencionan como fórmula para deducir otra.

9. Exploración de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa

El autor no considera la contextualización de las series d e Fourier como apoyo a su exposición del fenómeno de la transferencia de masa. No se perciben los conceptos matemáticos presentes en el proceso.

Textos de Matemáticas

Murray R. Spiegel(1995) Transformadas de Laplace. México. Mcgraw-hill [18]

1. Extensión de las series de Fourier en la exposición general del libro.

El texto contiene II capítulos con 257 páginas. El capítulo 1, esta dividido en 7 subcapítulos donde se tratan algunos aspectos de la serie de Fourier cuyo contenido es de 28 páginas. No se contempla el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales, únicamente se mencionan los valores de frontera, no existe conexión con el proceso de transferencia de masa, no se profundiza en la matemática.

2.Estructura general del Tema.

Subcapítulos. series e integrales de Fourier con 28 paginas

1. series de Fourier.
2. Funciones pares e impares.
3. serie de Fourier de seno y coseno
4. Forma compleja de una serie de Fourier
5. Transformadas finitas de Fourier
6. Transformada de Fourier
7. Teorema de convolución, identidad de Parseval

3. Estadísticas

Sección	Páginas	Definiciones	Teoremas	Teoremas sin Demostrar	Conceptos	Ejercicios algorítmicos	Ejercicios de Comprensión	Problemas
1	4	1	0	0	0	0	0	0
2	4	1	0	0	0	2	2	3
3	4	1	0	0	0	2	2	4
4	4	0	0	0	0	2	2	4
5	4	1	0	0	0	5	5	4
6	4	1	0	0	0	2	0	6
7	4	0	0	0	0	2	0	3

De la tabla anterior se deduce lo siguiente: No existen conceptos sobre la serie de Fourier, donde se exponga el tema en la contextualización del proceso de transferencia de masa. La serie de Fourier se aborda con el cálculo de sus coeficientes, y halla la serie para algunas funciones, no se le da significación. La serie de Fourier carece de vinculación con la ingeniería en el proceso de la transferencia de masa.

4. Método utilizado en la exposición

- El autor dedica muy poco espacio a la exposición del tema de las series de Fourier. Las ecuaciones diferenciales parciales solamente se mencionan.
- Como se puede ver, las definiciones son muchas para el poco espacio que se le dedica al tema y la exposición de la teoría es demasiado poca, son pocos los problemas dados

como ejemplo ya que la mayoría de los ejemplos son algorítmicos.

5. El papel de los problemas

La gran mayoría de los problemas propuestos no son algorítmicos, sino de comprensión. Al autor le basta con que el estudi ante entienda su definición, para posterior vente entra en la etapa de los ejercicios, y erróneamente creer que el estudiante ha "aprendido".

6. Presentación de la Teoría

El autor no conecta el proceso matemático con el proceso de transferencia de masa, n o se considera la contextualización de las ecuaciones diferenciales parciales y las series de Fourier como apoyo a su exposición y la forma de exposición de la transferencia de masa. No se perciben los conceptos presentes en el proceso.

7. Exploración de las nociones: infinito, series de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales, convergencia, estado estacionario, propagación de ondas en el espacio, estado de variación del proceso y la falta de conexión de los anteriores conceptos en el proceso de transferencia de masa.

El concepto infinito, aparece en la definición de la serie de Fourier. En las aplicaciones, principalmente en la conducción de calor, la serie de Fourier se menciona como parte del fenómeno. No existen los conceptos de estado estacionario, estado de variación. No hay vinculación con ningún concepto matemático.

No se consideran los conceptos de las ecuaciones diferenciales parciales y la serie de Fourier dentro de las aplicaciones, estas únicamente se mencionan como fórmula para deducir otra .

8. Exploración de los supuestos del autor

- El proceso de transferencia de masa, no es abordado por el autor. Ni en el contexto de la matemática ni en el contexto de la ingeniería química. Por lo tanto la ecuación diferencial parcial que representa al proc eso de transferencia de masa no es modelada bajo ningún problema de transferencia de masa. En las aplicaciones de la serie de Fourier en la solución de ecuaciones diferenciales parciales se tocan problemas de cuerda vibrante y conducción de calor, donde las ecuaciones parciales simplemente se da como conocida sin contenido matemático ni significación. Por lo tanto el autor considera que lo anterior es suficiente para el aprendizaje de los estudiantes.

- Se puede apreciar que el autor por lo que refleja en su exposición de la serie de Fourier, los distintos conocimientos que expone son homogéneos, sin considerar las dificultades inherentes al conocimiento y los obstáculos epistemológicos que conlleva el aprendizaje de la serie de Fourier.
- El autor no le da énfasis al proceso matemático de la serie de Fourier
- El autor supone que con la definición de la serie de Fourier y resolución de algunos problemas, el estudiante puede entender las definiciones y las puede aplicar posteriormente en diferentes problemas.

9. Exploración de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa

El autor no considera el fenómeno de la transferencia de masa para su exposición en las aplicaciones. Por lo tanto no considera la contextualización de las se ries de Fourier como apoyo a su exposición del fenómeno de la transferencia de masa No se perciben los conceptos matemáticos presentes en el proceso.

David W. Zachmann(1990)Ecuaciones Diferenciales Parciales. Schaum.Mcgraw-Hill [11]

1. Extensión de las ecuaciones diferenciales parciales en la exposición general del libro.

El texto contiene 14 capítulos. Los primeros 4 capítulos con 42 páginas, aquí es donde se tratan la mayoría de los aspectos de las ecuaciones diferenciales parciales. No existe conexi ón con el proceso de transferencia de masa. La serie de Fourier se trata solamente en dos capítulos, el capítulo 6 y 7.

2. Estructura general del tema por capítulos.

Capítulo 1. Introducción.

2. Clasificación y características

3. Ecuaciones diferenciales parciales elípticas

4. Ecuaciones diferenciales de Evolución

5. Ecuaciones de primer orden

6. Desarrollo en funciones propias y transformadas integrales(teoría)

7. Desarrollo en funciones propias (aplicaciones)

8-14. Diferentes métodos de solución a las ec uaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico, parabólico y elíptico.

3. Estadísticas

Sección	Páginas	Definiciones	Teoremas	Teoremas sin Demostrar	Conceptos	Ejercicios algorítmicos	Ejercicios de Comprensión	Problemas
1	4	1	0	0	0	0	0	0
2	4	1	0	0	0	2	2	3
3	4	1	0	0	0	2	2	4
4	4	0	0	0	0	2	2	4
5	4	1	0	0	0	5	5	4
6	4	1	0	0	0	2	0	6
7	4	0	0	0	0	2	0	3

Como puede verse en la tabla anterior el autor:

- Presenta teoremas sin demostrarlos. No se presentan conceptos sobre la serie de Fourier. Solamente se aborda como fórmula, no se le da significación.
- La mayoría de los ejercicios se proponen y se resuelven en forma algorítmica, sin que sé de la comprensión de ellos. No existe la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería, se maneja siempre deducciones para resolver problemas. Considera los problemas como parte de su exposición.

4. Método utilizado en la exposición

Con el análisis del texto: la exposición y definiciones, el autor las hace en forma breve para avanzar en la teoría y posteriormente supone y de deduce que se entiende ésta, busca el desarrollo de habilidades en el estudiante a través de ejercicios, sin llegar a la conceptualización de la serie de Fourier en el contexto de la ingeniería química a través del proceso de transferencia de masa.

5. El papel de los problemas

Se contemplan problemas desde el inicio del tema , propuestos por el autor, quitándole conceptos e importancia a la exposición general, y con esto en el aprendizaje de los estudiantes en el concepto de la serie de Fourier.

6. Presentación de la teoría

La teoría es presentada a través de definiciones y problemas, en forma progresiva, no existe la conceptualización de la serie de Fourier en la significación del proceso.

7. Exploración de las nociones: infinito, series de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales, convergencia, estado estacionario, propagación de ondas en el espacio, estado de variación del proceso y la falta de conexión de los anteriores conceptos en el proceso de transferencia de masa.

Se da por hecho que el es tudiante tiene nociones sobre el infinito y ecuaciones diferenciales parciales, su solución, la serie de Fourier, el estado estacionario y el estado de variación.

8. Exploración de los supuestos del autor

- El autor supone con su exposición, que el estudian te entenderá las definiciones y ejemplos y con esto se dará el aprendizaje. Si el estudiante entiende lo expuesto y después ejercita lo entendido, resolviendo ejercicios algorítmicos y muchos problemas, entonces ya comprendió los conceptos referentes a las ecuaciones parciales y su relación con la serie de Fourier. Se puede observar que, desde esta postura, el estudiante no posee conceptos no construye solo se ejercita.
- El autor supone que por lo que refleja en su exposición, los distintos conocimientos que

expone, son homogéneos, sin considerar las dificultades inherentes al conocimiento y los obstáculos epistemológicos implícitos en esos conceptos.

- El autor cree que desglosando el tema de las ecuaciones diferenciales parciales se da con seguridad el aprendizaje bastando con que el estudiante entienda su exposición para continuar con su aplicación, contextualizarlas y relacionarlas con la serie de Fourier.
- El autor no menciona el proceso de la transferencia de masa en sus aplicaciones, ni para darle significado a las ecuaciones parciales y la serie de Fourier.

9. Exploración de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa

El autor no considera el fenómeno de la transferencia de masa para su exposición en las aplicaciones. Por lo tanto no considera la contextualización de las series de Fourier como apoyo a su exposición del fenómeno de la transferencia de masa. No se perciben los conceptos matemáticos presentes en el proceso.

A.A SAMARSKY(1980) Ecuaciones de la Física Matemática. MIR.Moscu. [23]

1. Extensión de las ecuaciones diferenciales parciales en la exposición general del libro y la serie de Fourier.

El texto contiene 7 capítulos. En los primeros 4 capítulos con 447 páginas, es donde se tratan la mayoría de los aspectos de las ecuaciones diferenciales parciales y se abordan diferentes tipos para darle su solución. Se aborda el método de separación de variables donde se expone la serie de Fourier. No existe conexión con el proceso de transferencia de masa.

2. Estructura general del tema por capítulos.

Capítulo I. Clasificación de las Ecuaciones Diferenciales En Derivadas Parciales

II. Ecuaciones de Tipo Hiperbólico y su solución

III. Ecuaciones de Tipo Parabólico y su solución

IV. Ecuaciones de Tipo Elíptico y su s olución

3. Estadísticas

Sección	Páginas	Definiciones	Teoremas	Teoremas sin Demostrar	Conceptos	Ejercicios algorítmicos	Ejercicios de Comprensión	Problemas
1	29	3	0	0	0	4	0	0
2	172	25	1	0	0	10	8	36
3	95	16	0	0	0	10	10	46
4	138	32	0	4	0	10	5	32

Como puede verse en la tabla anterior el autor:

- Presenta, pocos teoremas. El contenido matemático es bueno, para la deducción de algún problema, el autor recurre al proceso de la transferencia de calor.
- La mayoría de los ejercicios se proponen y se resuelven en forma algorítmica, sin que se dé la comprensión de ellos, el autor, maneja siempre deducciones de otros para resolver problemas diferentes. Considera los problemas como parte de su exposición.

4. Método utilizado en la exposición

Con el análisis del texto : la exposición y definiciones, el autor las hace en forma breve para avanzar en la teoría y posteriormente supone y de deduce que se entiende ésta, busca el desarrollo de habilidades en el estudiante a través de ejercicios, sin llegar a la conceptualización de las series de Fourier en el contexto de la transferencia de masa.

5. El papel de los problemas

Se contemplan problemas desde el inicio del tema propuestos por el autor, quitándole conceptos e importancia en la exposición general y con esto en el apr endizaje de los estudiantes.

6. Presentación de la teoría

La teoría es presentada a través de definiciones y problemas, en forma progresiva.

7. Exploración de las nociones: infinito, series de Fourier, ecuaciones diferenciales parciales, convergencia, estado estacionario, propagación de ondas en el espacio, estado de variación del proceso y la falta de conexión de los anteriores conceptos en el proceso de transferencia de masa.

Se da por hecho que el estudiante tiene nociones sobre el infinito y ecuaciones diferenciales parciales, su solución, serie de Fourier, estado estacionario y estado de variación.

8. Exploración de las creencias del autor

- El autor cree que desglosando el tema de las ecuaciones diferenciales parciales y las series de Fourier se da con seguridad el aprendizaje bastando con que el estudiante entienda su exposición para continuar con su aplicación. No existe la contextualización.
- El autor no aborda el proceso de la transferencia de masa. No contextualiza a la matemática que nos estamos re firiendo, por lo tanto no tiene sentido hablar de significado.
- Con la formalización de la serie de Fourier en el proceso matemático, no se aborda el proceso de transferencia de masa.

9. Exploración de la contextualización de la serie de Fourier en el proc eso de transferencia de masa

El autor no considera el fenómeno de la transferencia de masa para su exposición en las aplicaciones. Por lo tanto no considera la contextualización de las series de Fourier como apoyo a su exposición del fenómeno de la transfe rencia de masa. No se perciben los conceptos matemáticos presentes en el proceso

Conclusiones

Con el análisis de la bibliografía, ya expuesto, podemos percibir en su gran mayoría, los libros que abordan a la serie de Fourier, no manejan conceptos en la significación de algún problema. En los libros de textos que se utilizan en la ingeniería no se aborda la serie y el análisis matemático está ausente, restándole importancia a éste. En ningún problema se le da significación al proceso de la transferencia de masa a través de la serie de Fourier. Los libros de texto de matemáticas que utilizamos los profesores de ciencias básicas, abordan a la serie de Fouri er, sin salirse del contexto matemático llamado fórmula. No se percibe a la serie de Fourier en el contex to de la ingeniería.

Los libros que analizamos sobre las ecuaciones diferenciales parciales no son usados como libros de texto en la ingeniería. En estos libros se encontró que el proceso de transferencia de calor fue básico para la deducción de problemas. La serie de Fourier se utiliza en los métodos de solución de ecuaciones diferenciales parciales propias de la transferencia de calor, pero no se le da significación al proceso; no se aborda el proceso de la transferencia de masa.

4.2 Etapas de la contextualización de la serie de Fourier en el proceso de Transferencia de Masa

En el campo de la ingeniería química, uno de sus procesos fundamentales que requiere de conceptos sobre las series de Fourier, es la transferencia de masa. La transferencia de masa, interviene en las operaciones de destilación, absorción, secado y extracción. Se verifica cuando el componente de una mezcla emigra en una misma fase o de una fase a otra a causa de la diferencia de concentración entre dos puntos. La transferencia a nivel molecular se define como la transferencia de moléculas individuales a través de un fluido por medio de movimientos individuales y desordenados de las moléculas.

En la figura siguiente se muestra el proceso de transferencia de masa, donde se ilustra la trayectoria desordenada que la molécula A puede seguir al transferirse del punto (1) al (2) a través de las moléculas de B. Si hay un número mayor de moléculas de A cerca de punto (1) con respecto al punto (2), entonces y puesto que las moléculas se transfiere n de manera desordenada en ambas direcciones habrá más moléculas de a transfiriéndose de (1) a (2) que de (2) a (1). La transferencia neta de A va de una región de alta concentración a una de baja concentración.

Las variables que intervienen en el proceso son de diversa índole y lo que se desea conocer son las diferentes concentraciones de la sustancia en estudio, a través del tiempo de transferencia, así como la concentración a la que se llega al equilibrio, es decir la concentración que se alcanza en el ú ltimo tiempo.

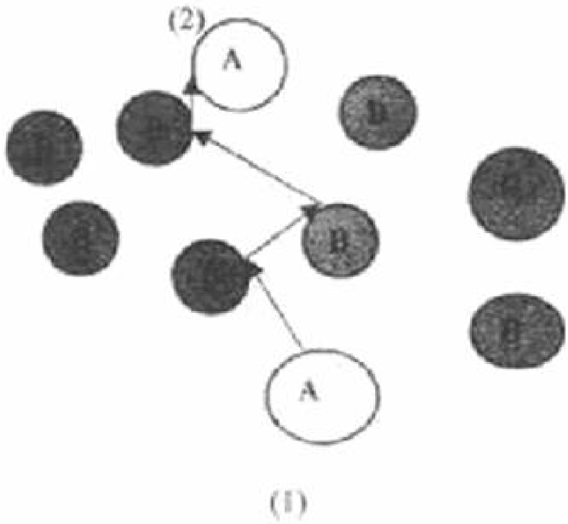


Diagrama esquemático del proceso de Transferencia de Masa

Como se puede apreciar, de acuerdo a la anterior representación, el proceso de transferencia de masa teóricamente se realiza en forma periódica e infinita, lo cual engloba una serie de conceptos y representaciones alrededor de la serie de Fourier en la contextualización del proceso físico para su explicación.

Para realizar el análisis de la serie de Fourier se establecen varias etapas del proceso en estudio con el propósito de esclar ecer, identificar e innovar los diferentes conceptos que se encuentran y que se pudieran encontrar presentes. A Continuación se presentan las seis etapas de la Matemática en Contexto propuestas por (Camarena, 1999).

4.2.1 Planteamiento del problema de la transferencia de masa

Basándonos, en el mismo experimento que hemos propuesto para realizar el análisis de las concepciones de los estudiantes sobre la transferencia de masa, se procedimos a realizar este análisis en el cual se puede describir lo que signi fica plantear y resolver un problema de transferencia de masa, toda vez que se precisan las variables esenciales asociadas al fenómeno y se descartan otras más.

El problema se comprende si se establece la relación de la dependencia funcional que guardan di chas variables, para esto, el experimento propuesto lo volvemos a plantear como un problema de la siguiente manera: se tiene un gel coloidal humedecido con alcohol que se va a secar, el material se empaca en una charola con espesor y longitud considerable, la cara superior se expone a una corriente de aire y el alcohol se transfiere a través del gel.

En el experimento se encuentran presentes tres proceso s de transferencia: transferencia de masa, de calor y de movimiento de moléculas hacia el exterior de la charola. A pesar de que están presentes tres fenómenos de transporte, para el presente trabajo de investigación, nuestro interés radica en el proceso de transferencia de masa, despreciando la temperatura en la transferencia de calor y el momento en la tran sferencia de movimiento.

La transferencia del alcohol nos permite tener diferentes concentraciones de gel, a través del tiempo en que dura el secado. Es necesario mencionar, que la operación de secado propia del experimento, implica la transferencia de un líquido procedente de un sólido húmedo a una fase gaseosa no saturada. En sólidos relativamente homogéneos, tales como el gel, la humedad se mueve probablemente hasta la superficie, principalmente en función de la difusividad molecular. La naturaleza del f enómeno garantiza la existencia de un valor máximo de la concentración de gel para cada punto, al que incesantemente se tenderá conforme al transcurso del tiempo.

Sí se toman las concentraciones de gel, ellas conformarán una sucesión infinita de ordenadas, que para un tiempo dado, son fácilmente determinables para la cantidad finita suministrada por el experimento y con ello, se pudiera encontrar la ecuación analítica que las expresa.

4.2.2 Determinación de las variables y constantes en el problema de la transferencia de masa

Las especificaciones en el experimento que componen las variables y constantes en el problema de transferencia de masa, se dan a continuación: la difusividad de masa de alcohol a través del gel para nuestro propósito la consideramos c omo constante, es decir el coeficiente de difusividad masa es constante. La concentración inicial en el gel es uniforme. Con el aire, el alcohol se transfiere a través del gel por transporte molecular. El esquema se presenta en la siguiente figura:

El proc eso de secado y su comportamiento experimental se da a continuación con la finalidad de contar con datos importantes en la consideración de la obtención de las ecuaciones diferenciales para diferentes casos.

EXPERIMENTO PROPUESTO

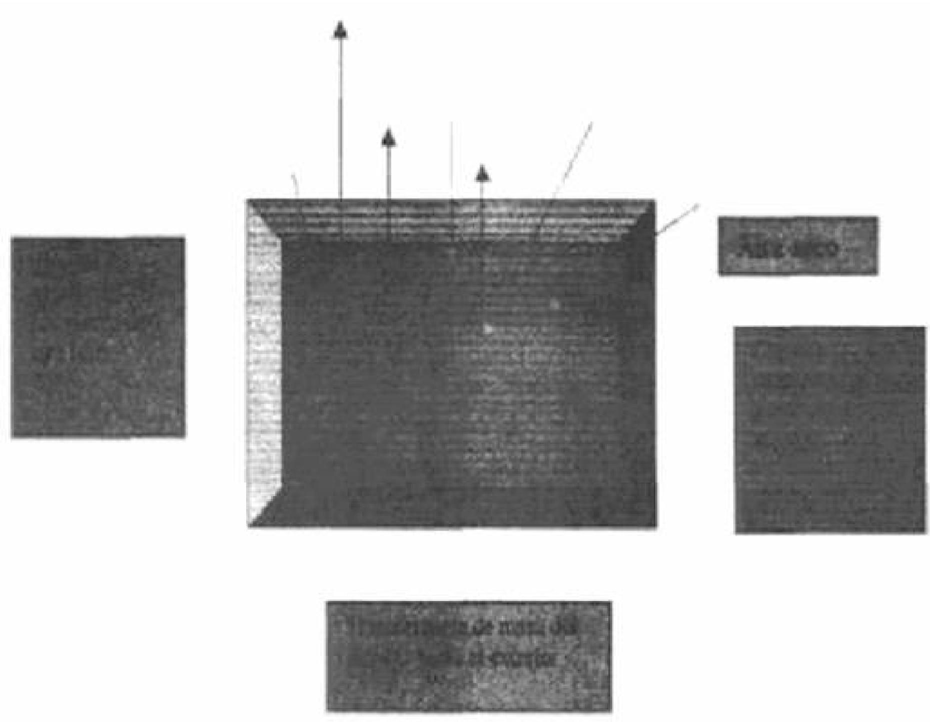


figura 3. Esquema del experimento propuesto

Proceso de secado en el experimento

En el experimento, al secar el gel humedecido de alcohol mediante el aire seco, consideramos un patrón general de comportamiento. La superficie total expuesta de gel en la charola está saturada de al cohol y la operación de secado se realiza como si se tratara de un estanque de alcohol sin que el gel ejerza una influencia directa sobre la velocidad de secado. El régimen de secado es en base, a la transferencia de masa de la superficie continuamente reemplazada por el alcohol procedente del interior del gel. La transferencia del alcohol se hace principalmente en función de la difusión a través del gel. La figura siguiente muestra la curva de secado, trazada sobre el contenido de humedad del alcohol en ge l (proporcional a la concentración del gel) contra el tiempo.

figura 4. Curva de secado

La gráfica nos muestra la obtención de datos experimentales para el proceso de secado del gel humedecido con alcohol a través del aire seco a través del tiempo.

En la figura siguiente se muestra la curva trazada sobre la base de velocidad de transferencia de masa contra el contenido de humedad de alcohol, y nos muestra la descripción eficaz del proceso de secado. El proceso de secado, representado por los puntos AB de las curvas de las dos figuras, es el período en el estado inestable, durante el cual la concentración del gel alcanza el valor correspondiente al estado estable.

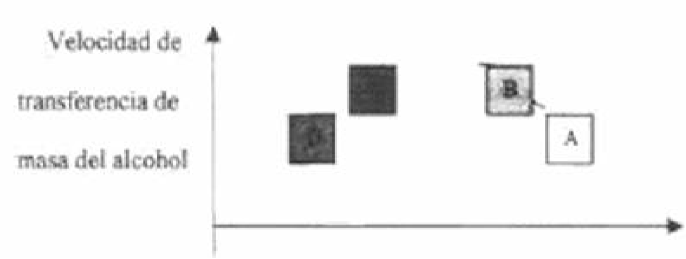


figura 5. Contenido de humedad en el gel

Durante el período de secado entre los puntos C y D de la figura 3, la superficie de líquido está cada vez más desprovista de líquido, esto es, en virtud de la proporción de la transferencia del alcohol, hacia la superficie, la cual es más lenta que la proporción de transferencia de masa desde la super ficie. Hasta el punto D, la porción de superficie de la charola se seca, continuando la difusión del alcohol hacia la corriente gaseosa. Toda la evaporación del alcohol tiene lugar procedente del interior del gel. A mediada que la humedad va disminuyendo en el gel, la trayectoria para la difusión de masa se hace cada vez más largo y eventualmente el potencial de concentración disminuye, hasta que el contenido de humedad está en equilibrio y ya no hay ningún secado posterior.

Al hablar de contenido de humeda d en equilibrio, estamos considerando que se ha obtenido la máxima concentración para el gel durante un tiempo determinado, sí asociamos la significación del proceso de secado a la solución de la ecuación diferencial parcial obtenida para la transferencia de alcohol a través del gel por medio de la serie de Fourier, se puede interpretar claramente, que a medida sumamos términos a la serie, estamos hallando el mejor acercamiento del perfil del comportamiento de la concentración del gel, el cual es proporcion al a la pérdida de humedad de alcohol.

Cuando se intenta llegar al equilibrio es decir la máxima pérdida de humedad, se alcanza la máxima concentración de gel.

4.2.3 Determinación del modelo matemático del problema de la transferencia de masa

El problema más general para el proceso de transferencia de masa consiste en encontrar esta expresión analítica para todo tiempo, es decir una sola fórmula C(x, t) que describa a todas las curvas asociadas a cada tiempo.

Para determinar la ecuación que gobierna el com portamiento, consideramos que a través de una de las caras de la charola el flujo de masa es proporcional a tres cantidades:

1). A la superficie de la cara rectangular

2). Al lapso durante el cual se estudia el fenómeno, suponiendo que este permanece constante si el lapso es muy pequeño.

3). A la diferencial de concentraciones.

En tanto que la charola tiene dimensiones infinitesimales, la diferencia de concentraciones se convierte en una diferencial y así se establece la rigurosidad de las proposiciones. T odo esto da el flujo de masa por una cara de la charola pero, como consideramos un elemento muy pequeño el flujo de masa a través de la cara opuesta siempre tiene el mismo sentido, ya que sólo puede variar de una manera continua. Dicho de otro modo el flujo de masa a lo largo de su marcha a través de la charola lo volvemos a encontrar a la salida como flujo que sale. Sin embargo, habrá variado ligeramente, acrecentando su diferencial. En la expresión del flujo las cantidades geométricas siguen siendo las mi smas, por lo tanto sólo es preciso considerar la diferencial de la diferencial que corresponde a la tercera cantidad antes mencionada es decir, a la diferencial segunda de la concentración tomada como una función del punto geométrico en el que se le examin a. Si ahora se resta el flujo que sale del flujo que entra, se obtiene una expresión que ya no contiene sino la derivada segunda de la concentración. Del mismo modo será para las otras caras que limitan la charola.

Finalmente se concluye que la ganancia de concentración es la suma de las tres segundas derivadas de la concentración calculada a lo largo de tres ejes paralelos a las aristas de la charola.

A continuación se hace una reconstrucción de la deducción anterior:

Consideramos el flujo bidimensional de masa, donde se busca calcular el total de masa de acumulado dentro del elemento diferencial, cuando el alcohol es transferido.

Según la ley de transferencia de masa detectada empíricamente, la cantidad de masa que atraviesa a una pared del gel, es proporc ional al gradiente de la concentración del gel normal a la superficie proporcional al área de la superficie, proporcional al tiempo considerado. De este modo, si C(x, y, t) representa la concentración en el punto (x, y) en el instante de tiempo t, se tiene que la cantidad de masa en el tiempo dt es:

$$Ddy\partial C/\partial x \,\big|\, dt_{(x,y,t)}$$

Donde D es el coeficiente de transferencia de masa propio de la naturaleza de la sustancia que se trate, para este caso será para el alcohol.

Análogamente la cantidad de masa de alcohol q ue se transfiere a través del gel durante un tiempo dt es precisamente:

$$Ddy\partial C(x+dx, y, t)/ \partial x\ dt$$

Entonces, la cantidad de masa de alcohol acumulada por transferencia, durante el lapso de tiempo dt es:

$$+Ddydt\{\partial C(x+dx,y,t)/ \partial x+\partial C(x,y,t)/ \partial x\}$$

que es igual en su primer derivada a la cantidad:

$$+Ddydt\partial^2 C/\partial x^2\ dx$$

del mismo modo se tiene en dirección vertical, el total de masa acumulada de alcohol, en el elemento diferencial durante el tiempo dt es:

$$+Ddxdydt\{\partial^2 C/\partial x^2+\partial^2 C/\partial y^2\}$$

Con esta masa acumulada de alcohol, en el elemento diferencial durante el tiempo dt, la concentración en dC y, como tal aumento es proporcional a la cantidad de masa acumulada, se obtiene la expresión:

$$Ddxdydt\{\partial^2C/\partial x^2+\partial^2C/\partial y^2\}$$

Finalmente se obtiene:

$$\partial C/\partial t=D\{\partial^2C/\partial x^2+\partial^2C/\partial y^2\}$$

o bien en una dimensión:

$$\partial C/\partial t=D\{\partial^2C/\partial x^2\}$$

Debido a que el grosor se considera infinitesimal, no consideramos el proceso de transferencia de masa en tres dimensiones y despreciamos la variable z. De esta forma, concluimos: las ecuaciones que representen el proceso de tra nsferencia de masa, son ecuaciones diferenciales parciales que indican la variación de la concentración en función del tiempo y la posición. Para el estado estable será una ecuación que no dependa del tiempo, como se verá posteriormente en su obtención.

Las ecuaciones diferenciales que nos proponemos obtener, nos representan al estado estacionario (ecuación homogénea), al estado de variación con el tiempo (ecuación lineal). Para cada ecuación obtenida se obtiene su solución que posteriormente es interpretad a en el proceso de transferencia de masa.

I. Caso: Obtención del modelo de la ecuación diferencial parcial del estado estacionario para el proceso de transferencia de masa. Ecuación Homogénea

Para la determinación del estado estacionario, el problema de transferencia de masa consiste en determinar las concentraciones permanentes de la sustancia (gel humedecido con alcohol) dentro de la charola cuando se expone al aire durante un determinado tiempo.

Para el caso particular propuesto la ecuación general en dos dimensiones será:

$$\partial C/\partial t=D\{\partial^2C/\partial x^2+\partial^2C/\partial y^2\}$$

Como se trata de demostrar el estado estacionario, se deberá considerar $\partial C/\partial t=0$ y la ecuación homogénea por resolverse será:

$$\partial^2 C/\partial x^2+\partial^2 C/\partial y^2=0$$

La ecuación homogénea también puede escribirse en la forma: Cxx+ Cyy = 0, como ya se vio anteriormente

II. Caso: Problema de contorno en la transferencia de masa. Problema lineal de la transferencia de masa. Ecuación diferencial lineal de evolución

Tomando el mismo experimento para obtener la ecuación lineal diferenci al parcial de tipo parabólico, que representa la transferencia de masa, tenemos lo siguiente: El proceso de propagación de masa de alcohol en el espacio de la charola se caracteriza por la concentración C(x, y, z, t), que es función de x, y, z y t. Como la concentración no es constante, surgen flujos de masa dirigidos de los lugares de mayor concentración hasta los de menor concentración.

Consideremos cierto elemento d9 de superficie de la charola en el punto P(ξ,, η, υ) con normal n, la cantidad de masa d e alcohol que pasa por d6, en la unidad de tiempo, será:

$$W n d\theta = (W n) d\theta = -D(\partial C/\partial n)d\theta$$

Donde D, es el coeficiente de masa: $\partial C/\partial n$) la derivada en dirección de la normal n hacia d ?, igual a:

$\partial C/\partial tn = (\partial C/\partial x) \cos(n, x)+ (\partial C/\partial y)) \cos (n, x)+ (\partial C/\partial z)) \cos (n, z)=(\text{grad } C, n)$ que es la ley de Fourier y se puede expresar como:

$$W = -D \text{ grad } C$$

Donde W es el vector de densidad del flujo de masa

Como se esta considerando que la charola empacada con gel es un medio isótropo, D, es solamente una escalar. Bajo las co ndiciones anteriores, podemos deducir la transferencia de masa en el espacio.

Tomando cierto volumen V de la charola, delimitado por la superficie S, la

$$\iiint_{v} D[C(p,t_2)-C(P,t_1)]dV_p =$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{s} W_n d\theta + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{dt}(\iiint_{\mathrm{v}} F(P,t)dV_p)$$

ecuación del balance de masa para ese volumen durante el tiempo $\Delta t = t_1 - t_2$ tiene la forma: Donde $P = P(\xi,, \eta, \upsilon)$ es el punto de integración, $dV_p = d\xi, d\eta, d\upsilon$ es el elemento del volumen, W_n, la componente normal de la densidad de flujo de masa.

$$\iint_{\mathrm{s}} Wnd\theta = \iiint_{\mathrm{v}} \mathrm{divWdV}$$

$$\iiint_{v} D[C(P,t_2)-C(P,t_1)]dV_p =$$

La ecuación anterio r expresa la ley de conservación de masa en el volumen V durante el tiempo Δt. Para pasar de la ecuación integral del balance a la ecuación diferencial, suponemos que C(M, t) = C(x, y, z, t) tiene derivadas segundas con respecto a x, y, z, t y derivada pri mera con respecto a t y, que estas derivadas son continuas en la región considerada. Entonces, aplicando la fórmula de Ostrogradski se transforma la ecuación del balance a la forma:

$$D\frac{\partial \mathrm{C}^{\mathrm{t=t_3}}}{\partial t_{p=p_3}}\Delta t.V = -divW_{p=p_3}^{t=t_4}\Delta t.V + \mathrm{F}_{\mathrm{p=p_3}}^{\mathrm{t=t_5}}\Delta t.V$$

Aplicando el teorema del valor medio y el teorema del incremento finito para las integrales y para las funciones de varias variables se obtiene:

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{v} divWdV_p dt + \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{v} F(P,t)dV_p dt$$

Donde t_3, t_4, t_5; son puntos intermedios en el intervalo Δt, y P_1, P_2, P_3 puntos en el volumen V.

Si fijamos cierto punto M(x, y, z) dent ro de V y hacemos tender a V a este punto, y At, a cero. Después de simplificar entre Δt y V y de efectuar el paso al límite indicado se obtiene:

$$D(\partial C/\partial t)(x, y, z, t) = -\mathrm{div}W(x, y, z, t) + F(x, y, z, t)$$

Sustituyendo a W por la fórmula W = -D grad C, se ob tiene la ecuación diferencial de la transferencia de masa:

$$DC_t = \mathrm{div}(D\,\mathrm{grad}C)+F$$

O bien : $DC_t = \partial/\partial x(D\partial C/\partial x) + \partial/\partial y(D\partial C/\partial y) + \partial/\partial z(D\partial C/\partial z) + F$

Sí el medio es homogéneo, como ya se vio en el primer caso, la ecuación anterior se escribe:

$C_t = D(C_{xx} + C_{yy} + C_{zz}) + F/D$ bien: $C_t = D\Delta C + f$ con $(f = F/D)$

Donde D es el coeficiente de transferencia de masa para la sustancia transferida y A es el operador de Laplace:

$$\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$$

Ahora, si consideremos la charola de longitud *l* y suficientemente fina par a que en cualquier momento del tiempo se pueda tomar la concentración igual en todos los puntos de un corte transversal. Los extremos de la charola se mantienen a concentraciones constantes C_1 y C_2 de tal forma que a lo largo de la charola se establece la distribución lineal de concentración:

$$Q(x) = C_1 + (C_2 - C_1)x/\,/$$

En este caso del punto con más concentración al menos concentración pasará una cantidad de masa. La cantidad de masa que pasa por una sección de la charola de superficie S por la unidad de tiempo se expresará por la fórmula empírica:

$$Q = -D(C_2-C_1)S/ / = D(\partial C/\partial x)S$$

Con D, como coeficiente de transferencia de masa, que dependerá de la sustancia que se trate. La magnitud del flujo de masa se considera positivo, si la masa pasa en dirección del crecimiento de x.

El proceso de la distribución de masa del alcohol en la charola a través del aire seco, se describe mediante la función C(x, t), que representara la concentración en el corte x y en el momento de tiempo t. Para hallar la ecuación que debe sa tisfacer la función C(x, t), se determinan las leyes físicas que determinan los procesos relacionados con la transferencia de masa:

1. Sí la concentración del alcohol en el gel, no es homogénea entonces aparecen flujos de masa dirigidos desde los lugares d e mayor concentración hasta los lugares de menor concentración, la cantidad de masa que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo(t, t+dt) es:

$$dQ = DSdt$$

Esto, es la densidad del flujo de masa igual a la cantidad de masa de alcohol que pasa en l a unidad de tiempo a través del gel por una superficie de lcm2 lo anterior es una generalización de:

$$Q = -D(C_2-C_1)S/ / = D(\partial C/\partial x)S$$

donde también se le puede dar la forma integral:

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial C}{\partial x} D(x,t)\,dt$$

con Q, que es la cantidad de masa de alcohol que pa sa durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) por la sección x.

2. la cantidad de masa que es necesaria para elevar la concentración en ΔC es

$Q = D\Delta C = V\Delta C$

Si la variación de la concentración tiene una magnitud diferente en distintas partes de la Charola, entonces:

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} DS\nabla C(x)dx$$

1. Dentro de la charola empacada con gel y alcohol al contacto con el aire seco en el intervalo de (x, x+dx) durante un intervalo de tiempo (t, t+dt) se transfiere una cantidad de masa:

$dQ = S\,F(x, t)dxdt$ o, en forma integral:

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dxdt$$

donde Q es la cantidad de Masa de alcohol que se transfiere, en el intervalo de la charola (x_1, x_2) durante el tiempo (t_1, t_2).

La ecuación de transferencia de masa se obtiene al calcular el balance de masa en cierto segmento (x_1, x_2) durante cierto intervalo de tiempo (t_1, t_2). Aplicando los puntos 1 y 2.y usando todas las expresiones de integrales:

$$\int_{t_1}^{t_2} D\frac{\partial C}{\partial x}(x,t)_{x=x_2} - D\frac{\partial C}{\partial x}(x,t)_{x=x_1}]dt + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(x,t)dxdt = \int_{x_1}^{x_2} D[C(x,t_2) - C(x,t_1)]dx$$

Que, es precisamente la ecuación de transferencia de masa en forma integral.

Para obtener la ecuación de transferencia de masa, en forma diferencial, vamos a suponer que la función C(x, t) posee las derivadas continuas C_{xx} y C_t. Aplicando el teorema del valor medio, se obtiene la igualdad:

$$[D\frac{\partial C}{\partial x}(x,t)_{x=x_2} - D\frac{\partial C}{\partial x}(x,t)_{x=x_1}]_{t=t_{31}}\nabla t + F(x_4 t_4)\nabla x\nabla t$$

Lo cual en virtud del teorema del valor medio se puede transformar como sigue

$$\frac{\partial}{\partial x}[D\frac{\partial C}{\partial x}(x,t)]_{t=t3}^{x=x5}\Delta t\Delta x+F(x_4t_4)\Delta x\Delta t=[D\frac{\partial C}{\partial t}(x,t)]_{t=t5}^{x=x3}\Delta x\Delta t$$

Donde t_3, t_4, t_5, y x_3, x_4, x_5 son puntos intermedios de los intervalos (t_1, t_2) y (x_1, x_2), después de simplificar entre el producto $\Delta x\Delta t$ se halla

$$\frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial C}{\partial x})_{t=t3}^{x=x5}+F(x,t)_{t=t4}^{x=x4}=D\frac{\partial C}{\partial t})_{t=t5}^{x=x3}$$

Todos los anteriores razonamientos son aplicables a intervalos cualesquiera. Pasando el límite cuando x_1, x_2 → x y ti, t2 → t, se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial C}{\partial x})+f(x,t)=1/D\frac{\partial C}{\partial t}$$

que se será la ecuación general que represente la transferencia de masa cuyo movimiento es en una dimensión. También se expresa: $(l/D)C_{tt} = C_{XX} + f(x, t)$

Considerando ciertos casos particulares:

1. Si la charola empacada con el gel es homogénea, entonces D se puede considerar constante y la ecuación se puede escribir en la forma:

$C, = DC_{xx} + F(x, t)$

Con f(x, t) = F(x, t)/D y D, es una constante llamada coeficiente de difusividad de masa. Si F(x, t) = 0, la ecuación de transferencia de masa toma la forma sencilla:

$C_t = DC_{xx}$

2. En el caso de un intercambio de masa con el medio (aire seco). La cantidad de masa difundida del alcohol a través del aire seco, calculada en unidades de longitud y tiempo es:

$F_0 = h(C-\theta)$

donde 0(x, t) es la concentración en el medio h el coeficiente de intercambio de masa. De esta manera la densidad de la fuente(aire seco) en el punto x en el momento t es:

$F = F_1(x,t)-h(C, \theta)$

a F,(x, t) la consideramos como la densidad de otras fuentes para que se realice la transferencia de masa.

Si la charola empacada es homogénea, la ecuación de la transferencia de masa con intercambio de masa lateral tiene (a forma siguiente:

$C_{tt}= DC_{xx} - DC + f(X, t)$

Donde f(x,t) = D(x t) +F_1(x, t)/D es una función conocida.

3. El coeficiente D es función de la concentración de variación lenta y la suposición, que se hace sobre la constancia de estos coeficientes es posi ble siempre y cuando se tomen intervalos pequeños de variación de concentración. El estudio de los procesos de transferencia de masa en un gran intervalo de variación concentraciones nos lleva a la ecuación cuasilineal de la transferencia de masa que tomaría la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}(D(C,x)\frac{\partial C}{\partial x}) + F(x,t) = u(C,x)D(C,x)\frac{\partial C}{\partial t}$$

que es la ecuación, para un medio no homogéneo

4.2.4 Solución de las ecuaciones diferenciales que representan al proceso de la transferencia de masa. Método de separación de variables.

Para obtener una solución única de la ecuación de transferencia de masa es necesario agregar a ésta condiciones iniciales y de frontera.

1. Caso: Solución de la ecuación homogénea que representa al proceso de transferencia de masa

Para dar solución a esta ecuación, debemos de considerar lo siguiente:

Sí una función $\varphi(x, y)$ satisface la ecuación, deberá cumplir con las siguientes condiciones:

2. Anularse cuando se sustituye $-\pi/2$ ò $+\pi/2$en lugar de y cualquiera que sea por otro lado valor de x:
3. Es igual a la unidad si se supone x = 0 y se le at ribuye a y un valor cualquiera comprendido entre $-\pi/2$ ò $+\pi/2$

La solución $\varphi(x, y)$, se encuentra por el método de separación de variables.

También, debemos considerar que esta función $\varphi(x, y)$ debe llegar a ser extremadamente pequeña cuando se da a x un val or muy grande. Para este caso, nosotros tendríamos que tomar en cuenta que la concentración C se puede expresar como el producto de una función de x por una función de y, es decir: C = F(x)F(y).

Si sustituimos en la ecuación, se tiene: $F''(x)/F(x) = \lambda^2$ y se reduce que: $f'(y)/f(y) = -\lambda^2$ donde λ es una constante cualquiera. De tal manera que una solución es:

$$\mathbf{F(x) = e^{-lx} \quad f(y) = \cos ly}$$

4. El valor para la constante X no puede ser negativo, por que se tiene que el valor $e^{-\lambda x}$ es infinito cuando x es infinitamente gr ande y entonces no concuerda con la situación física. Para la determinación del exponente λ, sabemos que la función se anula en $y = -\pi/2$ ó $y = \pi/2$ entonces:

$$\mathbf{C(x_1, -p/2) = e^{lp/2}\ \cos(-l\,p/2) = 0}$$

Además como $e^{\lambda\pi/2} \neq 0$, para cualquier valor de λ se tiene que: cos $(-\lambda\pi/2) = 0$, por tanto

$\lambda = 2n+1,\ n \in N$

Por consecuencia, las soluciones correspondientes a cada valor serán:

$e^{-x}\cos y,\ e^{-3x}\cos 3y,\ e^{-5x}\cos 5y, \ldots\ldots\ldots\ldots$

y cualquier combinación lineal de éstas también es solución de:

$C = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Finalmente si $\varphi(0,y) = 1$:

$1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \ldots\ldots\ldots\ldots$

Esto es para $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$

Para calcular los coeficientes a, b, c, d……., es necesario considerar lo siguiente: podemos decir, que la ruta que sigue la transferencia de masa, es la propagación en el sentido de las x y al mismo tiempo se descompone en dos partes, una se dirige hacia uno de los ejes, mientras que la otra parte continua alejándose del origen para descomponerse como la anterior y así sucesivamente hasta el infinito. La superficie que se considera es engendrada por la curva trigonométrica que responde a la base y se mueve perpendicularmente al eje de las x; siguiendo este eje, mientras que cada una de las ordenadas decrece al infinito, proporcionalmente a las potencias sucesivas de una mis ma fracción.

Se obtendrán, expresiones análogas si las concentraciones fijas de la base, fueran expresadas por él termino, bcos3y, o uno de los términos siguientes como ccos5y…..después de lo anterior se pude formar una idea exacta del movimiento de masa e n el caso general ya que se puede ver que el movimiento se descompone siempre en una multitud de movimientos elementales, en donde cada uno se comporta como si fuera uno solo.

Cálculo de los coeficientes de acuerdo a Fourier

Retomando la ecuación: $1 = a\cos y + b\cos 3y + c\cos 5y + \ldots\ldots$

Sabemos que es necesario que las constantes satisfagan las ecuaciones que se obtienen por diferenciación sucesiva, que a continuación se muestran:

$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + d \cos 7y + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a \operatorname{sen} y + 3b \operatorname{sen} 3y + 5c \operatorname{sen} 5y + 7d \operatorname{sen} 7y + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a \cos y + 3^2 b \cos 3y + 5^2 c \cos 5y + 7^2 d \cos 7y + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a \operatorname{sen} y + 3^3 b \operatorname{sen} 3y + 5^3 c \operatorname{sen} 5y + 7^3 d \operatorname{sen} 7y + \ldots\ldots\ldots$

La diferenciación sucesiva es infinita, pero además estas ecuaciones deben tener lugar cuando y=0; se tendrá entonces:

$1 = a + b + c + d + e + f + g + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + \ldots\ldots\ldots$

$0 = a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + \ldots\ldots\ldots$

El número de ecuaciones es infinito así como en de las indeterminadas a, b, c, d, e, f………y el problema consiste en eliminar las incógnitas, excepto una.

Empleando el método de eliminaciones sucesivas para el caso finito(m ecuaciones, m incógnitas), suponiendo que se emplean las primeras siete ecuaciones y extrapolando el caso infinito:

$1 = a + b + c + d + e + f + g$

$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g$

$0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g$

$0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g$

$0 = a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g$

$0 = a + 3^{10} b + 5^{10} c + 7^{10} d + 9^{10} e + 11^{10} f + 13^{10} g$

$0 = a + 3^{12} b + 5^{12} c + 7^{12} d + 9^{12} e + 11^{12} f + 13^{12} g$

Las seis ecuaciones que no contienen a y g son:

$13^2 = a\,(13^2-1^2) + b\,(13^2-3^2) + c\,(13^2-5^2) + d\,(13^2-7^2) + e\,(13^2-9^2) + f\,(13^2-11^2)$

$0 = a\,(13^2-1^2) + 3^2 b\,(13^2-3^2) + 5^2 c\,(13^2-5^2) + 7^2 d\,(13^2-7^2) + 9^2 e\,(13^2-9^2) + 11^2 f\,(13^2-11^2)$

$0 = a\ (13^2-1^2) + 3^4b\ (13^2-3^2) + 5^4c\ (13^2-5^2) + 7^4d\ (13^2-7^2) + 9^4e\ (13^2-9^2) + 11^4f\ (13^2-11^2)$

$0 = a\ (13^2-1^2) + 3^6b\ (13^2-3^2) + 5^6c\ (13^2-5^2) + 7^6d\ (13^2-7^2) + 9^6e\ (13^2-9^2) + 11^6f\ (13^2-11^2)$

$0 = a\ (13^2-1^2) + 3^8b\ (13^2-3^2) + 5^8c\ (13^2-5^2) + 7^8d\ (13^2-7^2) + 9^8e\ (13^2-9^2) + 11^8f\ (13^2-11^2)$

$0 = a\ (13^2-1^2) + 3^{10}b\ (13^2-3^2) + 5^{10}c\ (13^2-5^2) + 7^{10}d\ (13^2-7^2) + 9^{10}e\ (13^2-9^2) + 11^{10}f\ (13^2-11^2)$

continuando la eliminación, se obtendrá la ecuación final en a, que es:

$a\ (13^2-1^2)\ (11^2-1^2)\ (9^2-1^2)\ (7^2-1^2)\ (5^2-1^2)\ (3^2-1^2) = 13^2 11^2 9^2 7^2 5^2 3^2 1^2$

el valor correspondiente a u n número infinito de ecuaciones es:

$a = 3^2/(3^2-1^2)\ 5^2/(5^2-1^2)\ 7^2/(7^2-1^2)\ 11^2/(11^2-1^2)\ 9^2/(9^2-1^2)\ 13^2/(13^2-1^2) \ldots$

$a = 3.3/2.4\ 5.5/4.6\ 7.7/6.8\ 9.9/8.10\ 11.11/10.12\ 13.13/12.14\ldots$

por el teorema de Wallis, se concluye: $a = 4/\pi$

Para determinar las otras incó gnitas se recurre a un sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$(13^2-11^2)/13^2,\ (13^2-9^2)/13^2,\ (13^2-7^2)/13^2,\ (13^2-5^2)/13^2,\ (13^2-3^2)/13^2,\ (13^2-1^2)/13^2$

Será suficiente el multiplicar los valores de f, e, d, c, b, a encontrados en el primer caso, por factores conocidos. Por ejemplo si el valor de f encontrado en las seis ecuaciones es representado por F, aquella de la misma cantidad tomada en caso de una incógnita de más será: $F\ 13^2/(13^2-11^2)$, este mismo valor tomado en el caso de 8 incógnitas será:

$F\ 13^2/(13^2-11^2)\ 15^2/(15^2-11^2)$; en el caso de 9 incógnitas será: $F\ 13\ ^2/813^2-11^29\ 15^2/(15^2-11^2)\ 17^2/(17^2-11^2)$ y así sucesivamente. Entonces será suficiente conocer el valor de b, correspondiente al caso de dos incógnitas de la forma:

$5^2/(5^2-3^2)\ 7^2/(7^2-3^2)\ 9^2/(9^2-3^2)\ 11^2/(11^2-3^2)$ y en general así es para todas.

Los valores finales de las incógnitas a, b, c, d, e, f, ……están dados por las expresiones siguientes:

a = $3^2/(3^2-1^2)\ 5^2/(5^2-1^2)\ 7^2/(7^2-1^2)\ 11^2/(11^2-1^2)\ 9^2/(9^2-1^2)$ … … … .

b = $1^2/(1^2-3^2)\ 5^2/(5^2-3^2)\ 7^2/(7^2-3^2)\ 11^2/(11^2-3^2)\ 9^2/(9^2-3^2)$ … … … .

c = $1^2/(1^2-3^2)\ 3^2/(3^2-5^2)\ 7^2/(7^2-5^2)\ 11^2/(11^2-5^2)\ 9^2/(9^2-5^2)$ … … … .

d = $1^2/(1^2-7^2)\ 3^2/(3^2-7^2)\ 5^2/(5^2-7^2)\ 11^2/(11^2-7^2)\ 9^2/(9^2-7^2)$ … … … .

e = $1^2/(1^2-9^2)\ 3^2/(3^2-9^2)\ 5^2/(5^2-9^2)\ 7^2/(7^2-9^2)\ 11^2/(11^2-7^2)\ 9^2/(9^2-7^2)$ … … … .

f = $1^2/(1^2-11^2)\ 3^2/(3^2-11^2)\ 5^2/(5^2-11^2)\ 7^2/(7^2-11^2)\ 13^2/(13^2-11^2)\ 9^2/(9^2-11^2)\ 15^2/(15^2-11^2)$..

a = +3.3/2.4 5.5/4.6 7.7/6.6…

b = -1.1/2.4 5.5/2.8 7.7/4.10. 9.9/6.12…

c = +1.1/4.6 3.3/2.8 7.7/2.12 9.9/4.16 11.11/6.16…

d = -1.1/6.8 3.3/4.10 5.5/2.12 9.9/2.16 11.11/4.18 13.13/6.20…

la cantidad $\pi/2$ que es el cuarto de la circunferencia equivale, siguiendo el teorema de Wallis:

2.2/1.3 4.4/3.5 6.6/5.7 8.8/7.9 10.10/9.11 12.12/11.13 14.14/13.15…

para los valores a, b, c… los factores que deben escribirse en el numerador y denominador para completar la doble serie de los números pares e impares son:

para b =….3.3/6, para c 0 5.5/10, para d = 7.7/14 para e = 9.9/19 para f = 11.11/22 y se concluye que: a $=2(2/\pi)$, b = $-2(2/3\pi)$, c = $2(2/5\pi)$, d = $-2(2/7\pi)$, e = $2/2/9\pi)$, f = $-(2/11\pi)$

De esta forma se ha llegado a las eliminaciones y por consecuencia a la determinación de los coeficientes a, b, c, d de la ecuación:

$$\pi/4 = \cos y - 1/3\cos 3y + 1/5\cos 5y - 1/7\cos 7y + 1/9\cos 9y - 1/11\cos 11y + \ldots$$

esto es para los valores de "y" comprendidos, entre $[-\pi/2, \pi/2]$

Con el cálculo de los coeficientes, la solución general del problema particular planteado es:

$$C = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + \ldots\ldots\ldots.$$

Con la sustitución de los coeficientes se tiene:

$$\pi C/4 = e^{-x}\cos y - 1/3e^{-3x}\cos 3y + 1/5e^{-5x}\cos 5y -$$

este valor de C satisface la ecuación:

$$\partial^2 C/\partial x^2 + \partial^2 C/\partial y^2 = 0$$

Así todas las condiciones físicas de la cuestión están exactamente cumplidas y el segundo miembro de la ecuación, siendo reducido a una serie extremadamente convergente, es siempre fácil de determinar en número, la concentración de un punto cuyas coordenadas x e y son conocidas.

II. Caso: Solución de la ecuación lineal que representa al proceso de transferencia de masa

Para dar solución a la ecuación referida, consideremos lo siguiente:

La condición inicial consiste sólo en la determinación de los valores de la función C(x, t) en el momento inicial t_0. Mientras que las condiciones de frontera pueden ser diferentes según el régimen de concentraciones en las fronteras; se estudian tres tipos fundamentales de condiciones de frontera.

1. En la superficie de la charola x = 0 se da la concentración:

$$C(0, t) = \mu(t)$$

Donde $\mu(t)$ es una función dada en cierto segmento $t_0 \leq t < T$, siendo T el intervalo de tiempo durante el cual se estudia el proceso de transferencia de masa del alcohol a través del gel, por el tiempo que dura el secado.

2. En la superficie x = *l* se da el valor de la derivada:

$$\partial C/\partial x(l,t) = v(t)$$

A esta condición se llega si esta dada la magnitud del flujo de masa Q(/, t) que pasa por la sección del extremo de la charola:

$$Q(l, t) = D\partial C/\partial x(l, t)$$

De donde $\partial C/\partial x(l, t) = v(t)$ siendo v(t) una función conocida que se expresa mediante el flujo Q(*l*, t)

$$v(t) = - Q(l, t)/D$$

3. En la superficie x = / está dada una relación entre la derivada y la función:

$$\partial C/\partial x(l, t) = -\lambda[C(l, t)-\theta(t)]$$

esta condición de frontera corresponde a un intercambio de masa. Utilizando las dos expresiones de flujo de masa que sale por el corte x = /:

$$Q = h(C-\theta)$$

$Q = -D\partial C/\partial x$

De esta forma se obtien e el enunciado matemático de la tercera condición de frontera en la forma:

$\partial C/\partial x(l, t) = -\lambda[C(l, t)-\theta(t)]$

donde X = h/8 es el coeficiente de intercambio térmico y 0(t) cierta función dada. Para el extremo x = 0 de la charola (0,1) la tercera condición de frontera tiene la forma:

$\partial C/\partial x(0, t) = \lambda[C(0, t)-\theta(t)]$

las condiciones de frontera para x = 0 y x = *l* pueden ser de diferentes tipos, de manera que el número de problemas de transferencia de masa es grande.

El primer problema de contorno consiste en halla r la solución C = C(x, t) de la ecuación de transferencia de masa:

$C_t = DC_{xx}$ para $0<x<l$, $0 < t \leq T$

Que satisface las condiciones:

$C(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l$

$C(0,t) = \mu_1(t), \quad C(l, t) = \mu_2(t) \quad 0 \leq t \leq T$

Donde φ (x), μ_1 (t) y μ_2 (t) son funciones d adas.

Análogamente se plantean los otros problemas de contorno con distintas combinaciones de condiciones de contorno para x = 0 y x = *l*, de tal forma que el número de problemas de transferencia de masa es grande.

Problema de contorno homogéneo

Sí C(x, y) satisface una ecuación diferencial parcial lineal en x, y entonces, se considera que el método de separación de variables o método de Fourier, comienza con la hipótesis de que C(x, y) es de la forma X(x)Y(y). Lo anterior tiene el efecto de reemplazar a la ecuación diferencial parcial con dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La teoría del desarrollo de las funciones propias tiene aplicación en cualquiera de los aspectos del problema, sin olvidar que la ecuación diferencial parcial que proviene del probl ema de transferencia de masa debe tener los siguientes atributos:

1. Por lo menos una de las variables independientes del problema debe estar restringido a un intervalo finito y el dominio del problema debe ser una región apropiada para el sistema de coordena das en el que se expresa la ecuación diferencial parcial.
2. La ecuación diferencial parcial debe ser separable
3. En general las condiciones en la frontera se deben arreglar para por lo menos uno de los problemas separados sea del tipo Sturm -Liouville.

Ilustrando lo anterior: si queremos hallar la solución de la ecuación Q =DC $_{XX}$, encuéntrese C(x, y) que satisfaga:

1) $C_t = DC_{xx}$ $\quad 0<x<l,\ t>0$ con D = coeficiente de difusividad de masa

2) $C(x, 0) = f(x) \quad 0<x<l$

3) $C(0, t) = C(l, t) = 0 \quad t>0$

Como ya se mencionó anteriormente, la ecuación 1) es lineal y homogénea, para encontrar C(x, t) consideramos, X(x)Y(y) es igual a X(x)T(t), entonces:

$C_t(x, t) = X(x)T'(t)$

$C_{xx}(x, t) = X''(x)T(t)$

Sustituyendo en la ecuación diferencial parcial, para 0<x<l y t>0:

$T'(t)/DT(t) = X''(x)/X(x)$

Ya que el miembro izquierdo de esta ecuación es sólo función de t y el miembro derecho depende sólo de x, la igualdad es válida para toda 0<x<l y cualquier t>0 sí y sólo sí existe una constante $-\lambda$, tal que:

$T'(t)/DT(t) = -\lambda = X''(x)/X(x)$

Para $0<x<l$, $t>0$. Esto es equivalente a las dos ecuaciones separadas:

$$T'(t) = -\lambda dT(t) \quad y \quad -X''(x) = \lambda X(x)$$

Donde λ es una constante que se toma con signo negativo, para comodidad de los razonamientos subsiguientes, sin hacer con esto ninguna suposición sobre su s igno. De la relación anterior, se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias para la determinación de las funciones X(x) y T(t):

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$T''(t) + D\lambda T(t) = 0$$

Además con las condiciones en la frontera: $C(0, t) = C(l, t) = 0$ $t>0$ que implican que $X(0) = X(I) = 0$, por tanto:

$$-X''(X) = \lambda X(x)$$

de aquí se deduce que la función X(x) a las condiciones complementarias:

$$X(0) = X(l) = 0$$

De este modo, con respecto a la determinación de la función X(x) se obtiene el problema más sencillo de los valores propios : hallar los valores de los parámetros X, para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

Así como también hallar, dichas soluciones. Tales valores del parámetro son los valores propios y las soluciones no trivial es que le corresponden, son las funciones propias del problema. Esto es un problema de Sturm -Liouville. Consideremos por separado los casos los casos en que el parámetro λ es negativo, igual a cero o positivo

1. Para $\lambda>0$, el problema no posee soluciones no triviales, y la solución general de la ecuación:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

con las condiciones de frontera dan:

$X(0) = N_1+N_2 = 0$

$X(l) = N_1 e^{\alpha} + N_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda})$

Es decir:

$N_1 = N_2$ y $N_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$

Pero en el caso considerado, a es real y positivo, d e forma que $(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \neq 0$, Entonces $N_1 = N_2 = 0$

2. Para $\lambda = 0$, tampoco existen soluciones no triviales, en este caso la solución general de

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$

tiene la forma: $X(x) = N_1 X + N_2 X$

Donde las condiciones de frontera se dan:

$X(0) = [N_1 X + N_2 x]_x=0 = N_2 = 0$

$X(l) = N_2 l = 0$

Es decir, Ni = 0 y N2 = 0

3. Para $\lambda>0$, la solución general de la ecuación puede escribirse en la forma:

$X(x) = m_1 \cos \sqrt{\lambda} x + m_2 \text{sen} \sqrt{\lambda} x$

Las condiciones de frontera se dan:

$X(0) = m_1 = 0$

$X(l) = m_2 \text{ sen } (\sqrt{\lambda} ll) = 0$

Si $X(x)$ no es idénticamente nulo, entonces $m_2 \neq 0$, entonces:

$\text{Sen } (\sqrt{\lambda} ll) = 0$, se tiene que:

$\sqrt{\lambda} = n\pi \, ll$

donde, n es un entero arbitrario. En consecuencia, las soluciones no triviales del problema:

$X'' + \lambda X = 0$

$X(0) = X(l) = 0$

Son posibles sólo para los valores:

$$\lambda = \lambda_n = (n\pi\, ll)^2$$

a estos valores propios les corresponden las funciones propias:

$$X_n(x) = m_n \operatorname{sen}(n\pi\, ll)x$$

Donde m,, es una constante arbitraria. De esta manera, para valores de X iguales a:

$$\lambda_n = (n\pi\, ll)^2$$

existen soluciones no triviales del problema dado

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi\, ll)x$$

Que se determinan salvo bajo un factor constante, que se ha elegido como la unidad. A éstos mismo valores λ_n les corresponden las soluciones de la ecuación:

$$T''(t) + D\lambda T(t) = 0$$

Que es:

$$T_n(t) = A_n \cos(n\pi\, ll)Dt + B_n \operatorname{Sen}(n\pi\, ll)Dt$$

O bien, a los valores de Xn le co rresponden las soluciones de $T''(t) + D\lambda T(t) = 0$:

$$T_n(t) = m_n e^{(-D\lambda}{}_n t)$$

donde m_n son los coeficientes determinados anteriormente como a, b, c, d,……y A_n y B_n están dentro del conjunto de coeficientes m_n.

De esta manera, concluimos que las funciones:

$$C_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \cos(n\pi\, ll)Dt + B_n \operatorname{sen}(n\pi\, ll)Dt = m_n e^{(-D\lambda t)} \operatorname{sen}(n\pi\, ll)$$

Son soluciones particulares de la ecuación 1) que satisfacen las condiciones de frontera y son, representables en forma del producto X(x)T(t) de dos funciones, una de las cuales depende de x y la otra de t. Estas soluciones pueden satisfacer las condiciones iniciales de nuestro problema inicial, sólo para casos particulares de las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Entonces consideramos que la resolución del problema, en el caso general, e s la suma de las soluciones particulares: $C(X, t) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (C_n(x, t) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (A_n\cos(n\pi ll)Dt + B_n sen(n\pi ll)Dt\ sen(n\pi ll))x$

También satisface a esta ecuación y a las condiciones de frontera dadas. Las condiciones iniciales permiten determinar A_n y B_n. Sí la ecuac ión anterior satisface a las condiciones iniciales:

$C(x, 0) = \varphi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1}(C_n(x, 0) = \Sigma^{\infty}_{n=1} A_n\ sen(n\pi ll)x$
$= \Sigma^{\infty}_{n=1} m_n e(D^{\lambda t}) sen(n\pi ll)$
$C_t(x, 0) = \psi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (\partial C_n l \partial t(x,0)) = \Sigma^{\infty}_{n=1} D(n\pi ll)B_n\ sen(n\pi ll)\ x$
$= \Sigma^{\infty}_{n=1} m_n sen(n\pi ll)$

De la teoría de las series de Fourier, se sabe que una función arbi traria continua a trozos y derivable a trozos como f(x) dada en el intervalo 0 <x < /, se desarrolla en la serie de Fourier:

$f(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} b_n\ sen(n\pi ll)\ x$

Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen a las condiciones de desarrollo en s erie de Fourier entonces:

$\varphi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} \varphi_n\ sen(n\pi ll)x = \Sigma^{\infty}_{n=1} m_n e^{-Dt(n\pi ll)2}\ sen(n\pi ll)x$
$\psi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} \psi_n\ sen(n\pi ll)x$

la comparación de estas series con las fórmulas:

$C(x, 0) = \varphi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (C_n(x, 0) = \Sigma^{\infty}_{n=1} A_n\ sen(n\pi ll)\ x = m_n e^{(-D\lambda t)} sen(n\pi ll)$
$C,(x, 0) = \psi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (\partial C_n l \partial t\ (x, 0)) = \Sigma^{\infty}_{n=1} D(n\pi ll)B_n\ sen(n\pi ll)x$

Muestra que para que se cumplan las condiciones iniciales hay que hacer que:

$A_n = \varphi_n \quad B_n = (ll\pi n)D)\ \varphi_n$

Con lo cual se determina totalmente la función:

$C(x, t) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (C_n(x, t) = \Sigma^{\infty}_{n=1} A_n \cos(n\pi l l)Dt + x = m_n e^{(-D\lambda t)} sen(n\pi l l)$

Que da la solución del problema investigado y mn como coeficientes de Fourier de la función φ (x) que al desarrollarse en serie de senos en el intervalo (0, *l*) queda:

$$m_n = j_n = \frac{2}{l}\int_0^l j(x) sen \frac{pn}{l} x dx$$

Como ya se mencionó anteriormente para obtener una solución única de la ecuación de transferencia de masa es necesario agregar a ésta condiciones iniciales y de frontera.

La condición inicial consiste sólo en la determinación de los valores de la función C(x, t) en el momento ini cial to. Mientras que las condiciones de frontera pueden ser diferentes según el régimen de concentraciones en las fronteras; se estudian tres tipos fundamentales de condiciones de frontera:

4. En la superficie de la charola x= 0 se da la concentración:

$C(0, t) = \mu(t)$

Donde $\mu(t)$ es una función dada en cierto segmento $t_0 \leq t \leq T$, siendo T el intervalo de tiempo durante el cual se estudia el proceso de transferencia de masa del alcohol a través del gel, por el tiempo que dura el secado.

5. En la superficie x = *l* se da el valor de la derivada:

$\partial C/\partial x (l, t) = v(t)$

A esta condición se llega si esta dada la magnitud del flujo de masa Q(/, t) que pasa por la sección del extremo de la charola:

$Q(l, t) = D\partial C/\partial x (l, t)$

De donde $\partial C/\partial x (l, t) = v(t)$ siendo v(t) una función conocida que se expresa mediante el flujo $Q(l, t)$:

$v(t) = -Q(l, t)/D$

6. En la superficie $x = l$ está dada una relación entre la derivada y la función:

$$\partial C/\partial x\,(l, t) = -\lambda[C(l,t) - \theta(t)]$$

esta condición de frontera corresponde a un intercambio de masa. Ut ilizando las dos expresiones de flujo de masa que sale por el corte $x = l$

$$Q = h(C-\theta)$$

$$Q = -D\partial C/\partial x$$

De esta forma se obtiene el enunciado matemático de la tercera condición de frontera en la forma:

$$\partial C/\partial x\,(l, t) = -\lambda[C(l,t) - \theta(t)]$$

donde $\lambda = h/\delta$ es el coeficien te de intercambio térmico y 9(t) cierta función dada. Para el extremo $x = 0$ de la charola $(0, l)$ la tercera condición de frontera tiene la forma:

$$\partial C/\partial x\,(0, t) = \lambda[C(0,t) - \theta(t)]$$

las condiciones de frontera para $x = 0$ y $x = l$ pueden ser de diferentes tipos, de manera que el número de problemas de transferencia de masa es grande.

El primer problema de contorno consiste en hallar la solución $C = C(x, t)$ de la ecuación de transferencia de masa:

$$C_t == DC_{xx} \text{ para } 0 < x < l,\ 0 < t \leq T$$

Que satisface las condiciones:

$$C(x, 0) = \varphi(x) \qquad 0 \leq x \leq l$$

$$C(0, t) = \mu_1(t), \qquad C(l,t) = \mu_2(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

Donde $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, y $\mu_2(t)$ son funciones dadas.

Análogamente se plantean los otros problemas de contorno con distintas combinaciones de condiciones de contorno para x = 0 y x = *l*, de tal forma que el número de problemas de transferencia de masa es grande.

Problema de contorno homogéneo

Sí C(x, y) satisface una ecuación diferencial parcial lineal en x, y entonces, se considera que el método de separación de variables o método de Fou rier, comienza con la hipótesis de que C(x, y) es de la forma X(x)Y(y). Lo anterior tiene el efecto de reemplazar a la ecuación diferencial parcial con dos ecuaciones diferenciales ordinarias. La teoría del desarrollo de las funciones propias tiene aplicac ión en cualquiera de los aspectos del problema, sin olvidar que la ecuación diferencial parcial que proviene del problema de transferencia de masa debe tener los siguientes atributos:

4) Por lo menos una de las variables independientes del problema debe e star restringido a un intervalo finito y el dominio del problema debe ser una región apropiada para el sistema de coordenadas en el que se expresa la ecuación diferencial parcial.

5) La ecuación diferencial parcial debe ser separable

6) En general las co ndiciones en la frontera se deben arreglar para por lo menos uno de los problemas separados sea del tipo Sturm -Liouville.

Ilustrando lo anterior: si queremos hallar la solución de la ecuación $C_t = DC_{XX}$, encuéntrese C(x, y) que satisfaga:

1) $C_t = DC_{xx}$ $0<x<l,\ t>0$ con D = coeficiente de difusividad de masa

2) $C(x, 0) = f(x)$ $0<x<l$

3) $C(0, t) = C(l, t) = 0$ $t>0$

Como ya se mencionó anteriormente, la ecuación 1) es lineal y homogénea, para encontrar C(x, t) consideramos, X(x)Y(y) es igual a X(x)T(t), entonc es:

$C_t(x, t) = X(x)T'(t)$

$C_{xx}fX, t) = X''(x)T(t)$

Sustituyendo en la ecuación diferencial parcial, para $0<x<l$ y $t>0$:

$T'(t)/DT(t) = X''(x)/X(x)$

Ya que el miembro izquierdo de esta ecuación es sólo función de t y el miembro derecho depende sólo de x, la iguald ad es válida para toda $0<x<l$ y cualquier $t>0$ sí y sólo sí existe una constante -A. tal que:

$T'(t)/DT(t) = -\lambda = X''(x)/X(x)$

Para $0<x<l$, $t>0$. Esto es equivalente a las dos ecuaciones separadas:

$T'(t) = -\lambda dT(t)$ y $-X''(x) = \lambda X(x)$

Donde λ. es una constant e que se toma con signo negativo, para comodidad de los razonamientos subsiguientes, sin hacer con esto ninguna suposición sobre su signo. De la relación anterior, se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias para la determinación de las funciones X(x) y T(t):

$X''(X) + \lambda X(X) = 0$

$T''(t) + D\lambda T(t) = 0$

Además con las condiciones en la frontera: $C(0, t) = C(l, t) = 0$ $t>0$ que implican que $X(0) = X(I) = 0$, por tanto:

$-X''(x) = \lambda .X(x)$

de aquí se deduce que la función X(x) a las condiciones complementarias:

$X(0) = X(l) = 0$

De este modo, con respecto a la determinación de la función X(x) se obtiene el problema más sencillo de los valores propios: hallar los valores de los parámetros λ, para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

Así como también hallar, dichas soluciones. Tales valores del parámetro son los valores propios y las soluciones no triviales que le corresponden, son las funciones propias del problema. Esto es un problema de Sturm -Liouville. Consideremos por separado los casos los casos en que el parámetro X es negativo, igual a cero o positivo

4. Para $\lambda>0$, el problema no posee soluciones no triviales, y la solución general de la ecuación:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

con las condiciones de frontera dan:

$$X(0) = N_1 + N_2 = 0$$

$$X(l) = N_1 e^{\alpha} + N_2 e^{-\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1\sqrt{-\lambda})$$

Es decir:

$$N_1 = -N_2 \text{ y } N_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$$

Pero en el caso considerado, α es real y positivo, de forma que $(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \neq 0$, Entonces $N_1 = N_2 = 0$

5. Para $\lambda = 0$, tampoco existen soluciones no triviales, en este caso la solución general de

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

tiene la forma: $X(x) = N_1 X + N_2 X$

Donde las condiciones de frontera se dan:

$$X(0) = [N_1 x + N_2 x]_{x=0} = N_2 = 0$$

$$X(l) = N_2 l = 0$$

Es decir, $N_1 = 0$ y $N_2 = 0$

6. Para $\lambda>0$, la solución general de la ecuación puede escribirse en la forma:

$$X(x) = m_1 \cos\sqrt{\lambda}x + m_2 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x$$

Las condiciones de frontera se dan:

$X(0) = m_1 = 0$

$X(Q = m_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} ll) = 0$

Si X(x) no es idénticamente nulo, entonces $m_2 \neq 0$, entonces:

$\operatorname{Sen}(\sqrt{\lambda} ll) = 0$, se tiene que:

$\sqrt{\lambda} = n\pi ll$

donde, n es un entero arbitrario. En consecuencia, las soluciones no triviales del problema:

$X'' + \lambda X = 0$

$X(0) = X(l) = 0$

Son posibles sólo para los valores:

$\lambda = \lambda_n = (n\pi ll)^2$

a estos valores propios les corresponden las funciones propias:

$X_n(x) = m_n \operatorname{sen}(n\pi ll)x$

Donde m_n es una constante arbitraria. De esta manera, para valores de λ iguales a:

$\lambda_n = (n\pi ll)^2$

existen soluciones no triviales del problema dado

$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi ll)x$

Que se determinan salvo bajo un factor constante, que se ha elegido como la unidad. A estos mismos valores λ_n les corresponden las soluciones de la ecuación:

$T''(t) + D\lambda_n T(t) = 0$

Que es.

$T_n(t) = A_n \cos(n\pi ll)Dt + B_n \operatorname{sen}(n\pi ll)Dt$

O bien, a los valores de λ_n le corresponden las soluciones de $T''(t) + D\lambda T(t) = 0$.

$Tn(t) = m_n e^{(-D\lambda_n t)}$

donde m_n son los coeficientes determinados anteriormente como a, b, c, d, y A_n y B_n están dentro del conjunto de coeficientes m_n.

De esta manera, concluimos que las funciones:

$$C_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n \cos(n\pi ll)Dt + B_n \operatorname{sen}(n\pi ll)Dt = m_n e^{(-D\lambda t)} \operatorname{sen}(n\pi ll)$$

Son soluciones particulares de la ecuación 1) que satisfacen las condiciones de frontera y son, representables en forma del producto X(x)T(t) de dos funciones, una de las cuales depende de x y la otra de t. Estas soluciones pueden satisfacer las condiciones iniciales de nuestro problema inicial, sólo para casos particulares de las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Entonces consideramos que la resolución del problema, en el caso general, es la suma de las soluciones particulares: $C(x, t) = \Sigma^{\infty}_{n=1}(C_n(X, t) = \Sigma^{\infty}_{n=1}(A_n \cos(n\pi ll)Dt + B_n \operatorname{sen}(n\pi ll)Dt) \operatorname{sen}(n\pi ll)x$

También satisface a esta ecuación y a las condiciones de frontera dadas. Las condiciones iniciales permiten determinar An y Bn. Sí la ecuación anterior satisface a las condiciones iniciales:

$$C(x, 0) = \varphi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1}(C_n(x, 0) = \Sigma^{\infty}_{n=1} A_n \operatorname{sen}(n\pi ll)x$$
$$= \Sigma^{\infty}_{n=1} m_n e^{(D\lambda t)} \operatorname{sen}(n\pi ll)$$
$$C_t(x, 0) = \psi(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} (\partial C_n/\partial t\ (x, 0)) = \Sigma^{\infty}_{n=1} D(n\pi ll)B_n \operatorname{sen}(n\pi ll)x$$
$$= \Sigma^{\infty}_{n=1} m_n \operatorname{sen}(n\pi ll)$$

De la teoría de las series de Fourier, se sabe que una función arbi traria continua a trozos y derivable a trozos como f(x) dada en el intervalo $0 < x < /$, se desarrolla en la serie de Fourier:

$$f(x) = \Sigma^{\infty}_{n=1} b_n \operatorname{sen}(n\pi ll)x$$

Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen a las condiciones de desarrollo en serie de Fourier entonces:

$$\left|\frac{\partial C_n}{\partial t}\right| = -C_n\left(\frac{p}{\ell}\right)^2 Dm^2 e^{-\left(\frac{pnx}{\ell}\right)^2 Dt} sen\frac{pnx}{\ell} < \left|C_n\right|\left(\frac{p}{\ell}\right)^2 Dm^2 e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)^2} Dt$$

$\varphi(x) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ \varphi_n\, sen(n\pi ll)x = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ m_n e^{-Dt(n\pi ll)2}\ \ sen(n\pi ll)x$

$\psi(x) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ \psi_n\, sen(n\pi ll)x$

la comparación de estas series con las fórmulas:

$C(x, 0) = \varphi(x) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ (C_n(x, 0) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ A_n\, sen(n\pi ll)x = m_n e^{-(-D\lambda t)}\ \ sen(n\pi ll)$

$C_t(x, 0) = \psi(x) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ (\partial C n l \partial t\ (x, 0)) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ D\, sen(n\pi ll) B_n\, sen(n\pi ll)$

Muestra que para que se cumplan las condiciones iniciales hay que hacer que:

$A_n = \varphi_n \quad B_n = (ll\pi n)D)\ \varphi_n$

Con lo cual se determina totalmente la función:

$C(x, t) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ (Cn(x, t) = \Sigma^{\infty}{}_{n=1}\ \ (A_n \cos(n\pi ll)Dt\ + B_n\, sen(n\pi ll)Dt)\, sen(n\pi ll)x$

Que da la solución del problema investigado y mn como coeficientes de Fourier de la función $\varphi(x)$ que al desarrollarse en serie de senos en el intervalo $(0,\ l)$ queda:

$$m_n = j_n = \frac{2}{l}\int_0^l j(x)\, sen\frac{pn}{l}x\,dx$$

Para demostrarlo, recordemos que la ecuación diferencial parcial para la transferencia de masa es lineal y con el principio de superposición, la serie formada por soluciones particulares, también será solución, sí está converge y se le puede derivar término a término dos veces con respecto a x y una vez con respecto a t. Es así como demostraremos que si $t > t° > 0$($t°$ es un número auxiliar cualquiera), las series de las derivadas:

$\Sigma_{n=1}{}^{\infty}\partial^2 C n l \partial x^2$ convergen, uniformemente y así:

para las condiciones complementarias que debe satisfacer φ(x) se supone que φ(x) es:

$$\frac{\partial^2 C_n}{\partial x^2} < 2R\left(\frac{p}{\ell}\right)^2 De^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)^2 dt^o}$$

y análogamente sí se investiga la convergencia de la serie mayorante: en virtud del criterio de D'Alambert, esta serie converge y de aquí se desprende la posibilidad de derivar:

$\sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{(Dl\,t})sen(npxll)$ término, a término cualquier número de veces, en la región t ≥ t° > 0. Aplicando el principio de sup erposición, se concluye que la función definida por ésta serie satisface a la ecuación de transferencia de masa para toda t>0. Con esto queda demostrado que para t>0 la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{(Dl\,t})sen(npxll)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Nn^q e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)^2 Dt^o}$$

$$\left|\frac{\partial C_n}{\partial t}\right| < 2r\left(\frac{p}{\ell}\right)^2 Dn^2 e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)^2 dt^o}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\ell}\int_0^1 j(x) sen\frac{pn}{\ell}xdx\right]e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)Dt} sen\frac{pn}{\ell}x$$

representa, una función deriv able el número necesario de veces y que satisface a la ecuación de transferencia de masa. Transformemos la solución obtenida, sustituyendo a m_n por sus valores: $\sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{(Dl\,t})sen(npxll)$

el cambio de lugar de la suma y la integración siempre es licito para t>0, en virtud de que la serie entre paréntesis converge uniformemente con respecto a ξ. Introduzcamos la siguiente notación:

$$\int_0^{\ell}\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)Dt} sen\frac{pn}{\ell}xsen\frac{pn}{\ell}x\, j(x)dx$$

Utilizando la función G(x, i;, t), se puede representar la función C(x, t) en la forma:

$$G(x,x,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)Dt}sen\frac{pn}{\ell}xsen\frac{pn}{\ell}x$$

$$C(x,t)=\int_0^{\ell}G(x,x,t)j\,(x)dx$$

La función anterior se llama función puntual instantánea. El núcleo G, lo podemos relacionar con $C(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}m_n e^{(Dlt}) sen(npxll)$

$$G(x,x_0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)sen(npxll) \qquad \text{con } x=x_0$$

Cada sumando de la cual debe satisfacer a la ecuación de transferencia de masa, de aquí se deduce que:

$$A_n(t)=B_n e^{(DlT}) sen(npxll)$$

De acuerdo a la condición inicial, se obtiene de inmediato:

$$B_n=(2ll)sen(pnll)x_0$$

De esta forma se obtiene, formalmente la expresión:

$$G(x,x_0,t)=C(x,t)=\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{pn}{\ell}\right)^2 Dt}sen\frac{pn}{\ell}xsen\frac{pn}{\ell}x_0$$

Recordando que $\ell=(npll)^2$ y $m_n=A_n$ y x_0 es la posición inicial

4.2.5 Determinación de la Solución requerida por el problema de la transferencia de masa

La solución del problema de transferencia de masa esta dada por la función ante rior, la cual se presenta como, el comportamiento de las concentraciones del gel por la pérdida de humedad de la sustancia alcohol, en función de la distancia x en la charola en el transcurso del tiempo t, dada en serie.

$$C(x,t) = (2ll)\begin{bmatrix} e^{-lDt} sen(pll)xsen(pll)x_0 + e^{-lDt} sen(2pll)xsen(2pll)x_0 + \\ e^{-lDt} sen(3pll)xsen(3pll)x_0 + e^{-lDt} sen(4pll)xsen(4pll)x_0 + \\ e^{-lDt} sen(5pll)xsen(5pll)x_0 + ... \end{bmatrix}$$

Tomando como periodo $T = 2p$ por tanto, $l = p$, para una posición inicial de $x_0 = p/2$. El dato experimental de la difusibidad de masa del alcohol es de 0.0096 pies^2/hora = (D), con 5 incrementos de tiempo en dos horas que dura el secado experimentalmente, los incr ementos los tomamos como: t =0.4, t = 0.8, t = 1.2, t = 1.6 y t = 2 horas.

Para t = 0 horas

$$C(p/2,0) = (2/p)[senx - sen3x + sen5x - sen7x + sen9x - sen11x + ...]$$

Para t = 0.4 horas

$$C(p/2,0.4) = (2/p)\begin{bmatrix} e^{-(0.0096)(0.4)} senx - e^{-(9)(0.4)(0.0096)} sen3x + e^{-(25)(0.4)(0.0096)} \\ sen5x - e^{-(49)(0.4)(0.0096)} sen7x + ... \end{bmatrix}$$

para t = 0.8 horas

$$C(p/2,0.8) = (2/p)\begin{bmatrix} e^{-(0.0096)(0.8)} senx - e^{-(9)(0.8)(0.0096)} sen3x + e^{-(25)(0.8)(0.0096)} \\ sen5x - e^{-(49)(0.8)(0.0096)} sen7x + ... \end{bmatrix}$$

para t = 1.2 horas

$$C(p/2,1.2)=(2/p)\begin{bmatrix} e^{-(0.0096)(1.2)}senx-e^{-(9)(1.2)(0.0096)}sen3x+e^{-(25)(1.2)(0.0096)} \\ sen5x-e^{-(49)(1.2)(0.0096)}sen7x+......... \end{bmatrix}$$

para t = 1.6 horas

$$C(p/2,1.6)=(2/p)\begin{bmatrix} e^{-(0.0096)(1.6)}senx-e^{-(9)(1.6)(0.0096)}sen3x+e^{-(25)(1.6)(0.0096)} \\ sen5x-e^{-(49)(1.6)(0.0096)}sen7x+......... \end{bmatrix}$$

para t = 2 horas

$$C(p/2,2)=(2/p)\begin{bmatrix} e^{-(0.0096)(2)}senx-e^{-(9)(2)(0.0096)}sen3x+e^{-(25)(2)(0.0096)} \\ sen5x-e^{-(49)(2)(0.0096)}sen7x+......... \end{bmatrix}$$

De manera semejante, si consideramos que el período $T=p$, entonces $l=p/2$ y $x_0=p/4$ obtenemos la serie siguiente:

Para t = 0 horas

$$C(p/4,0)=(4/p)[sen2x-sen6x+sen10x-sen14x+sen18x-sen22x+..........]$$

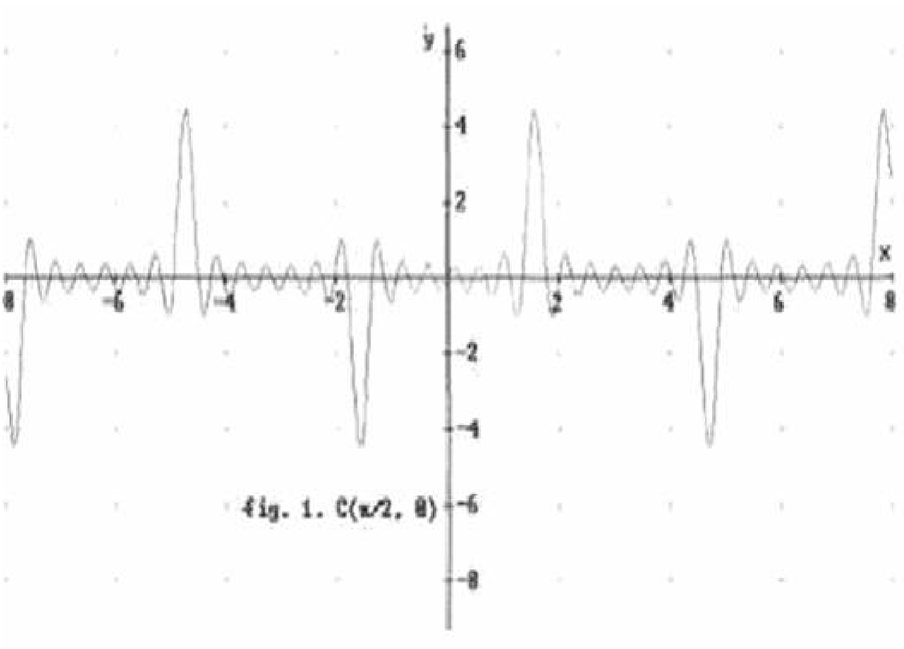
Para t = 0.4 horas

$$C(p/4,0.4)=(4/p)\begin{bmatrix} e^{-(4)(0.0096)(0.4)}sen2x-e^{-(36)(0.4)(0.0096)}sen6x+e^{-(100)(0.4)(0.0096)} \\ sen10x-e^{-(196)(0.4)(0.0096)}sen14x+......... \end{bmatrix}$$

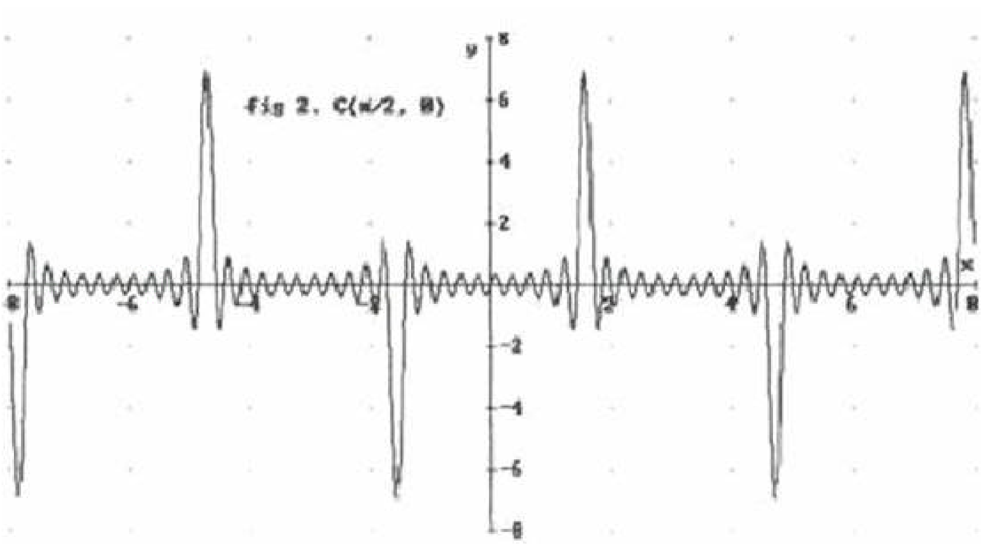
para t = 2 horas

$$C(p/4,2)=(4/p)\begin{bmatrix} e^{-(4)(0.0096)(2)}sen2x-e^{-(36)(2)(0.0096)}sen6x+e^{-(100)(2)(0.0096)} \\ sen10x-e^{-(196)(2)(0.0096)}sen14x+......... \end{bmatrix}$$

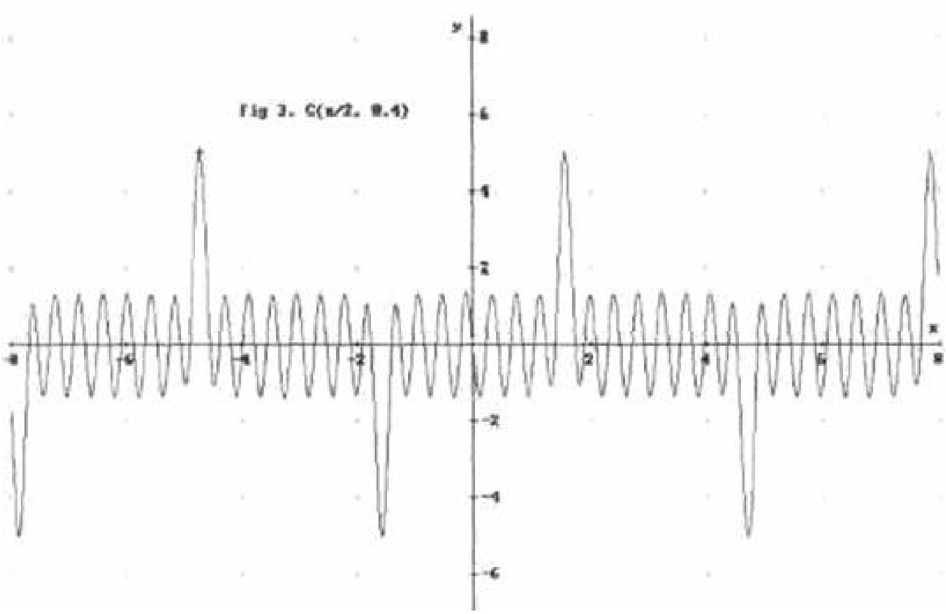
Las gráficas para $T=2p$ que nos muestran el comportamiento de la concentrac ión se dan a continuación.



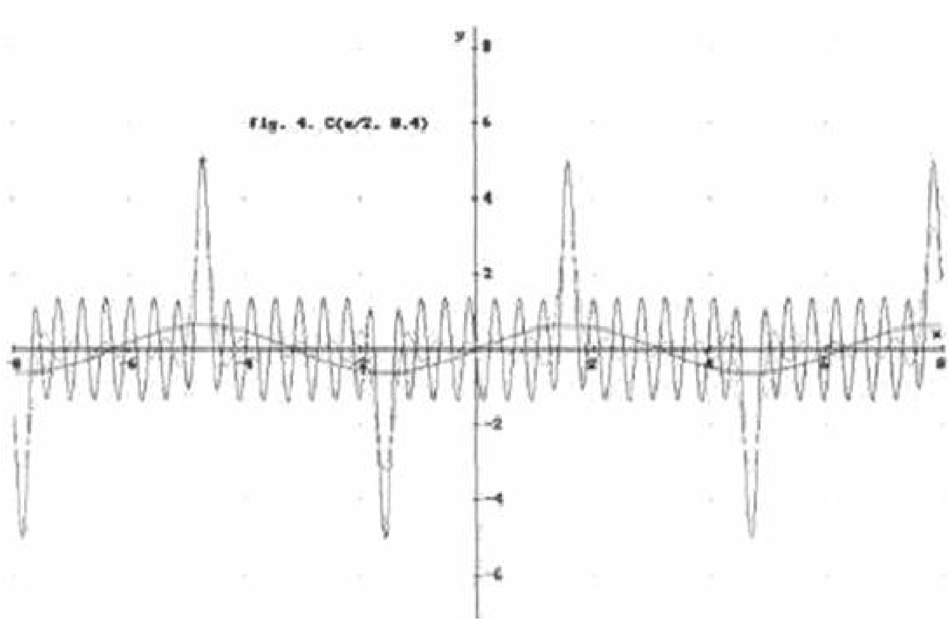
serie de Fourier hasta la quinta funcion senoidal, para $C(p/2,0)$



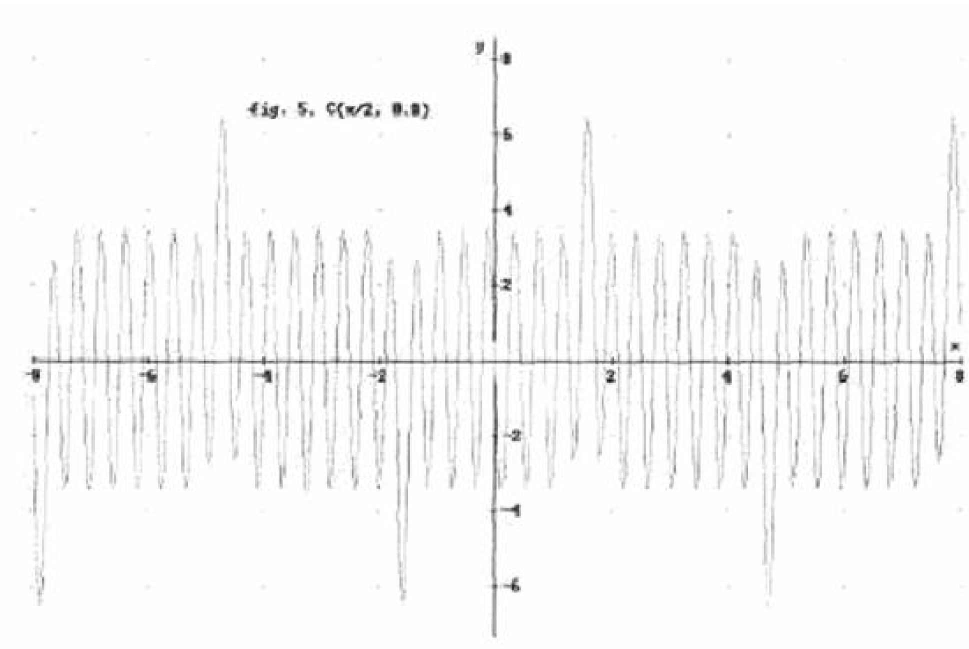
Serie de Fourier hasta la décima función senoidal, para $C(p/2,0)$



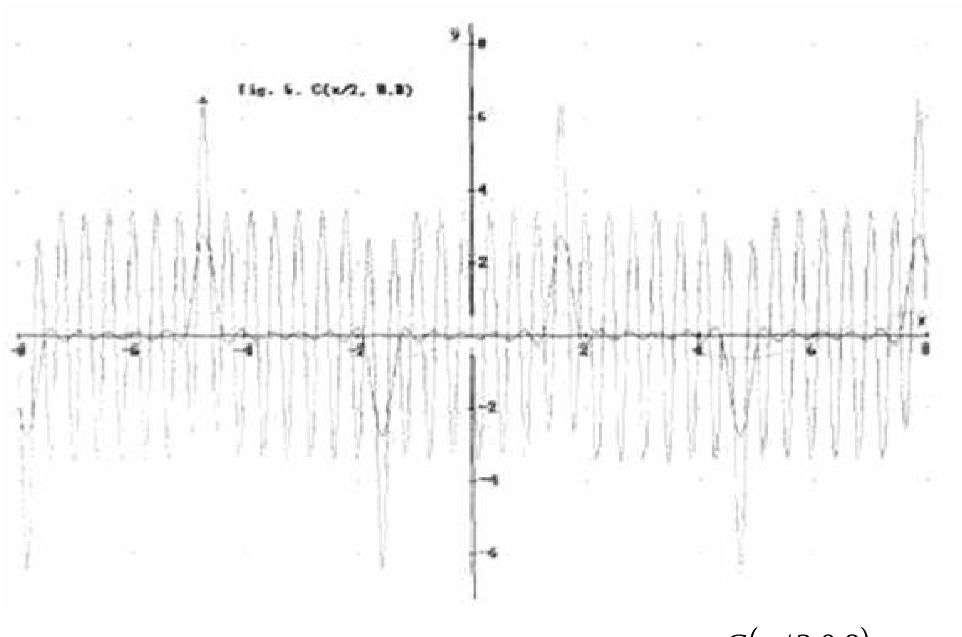
serie de Fourier hasta la décima función senoidal, para $C(p/2,0.4)$



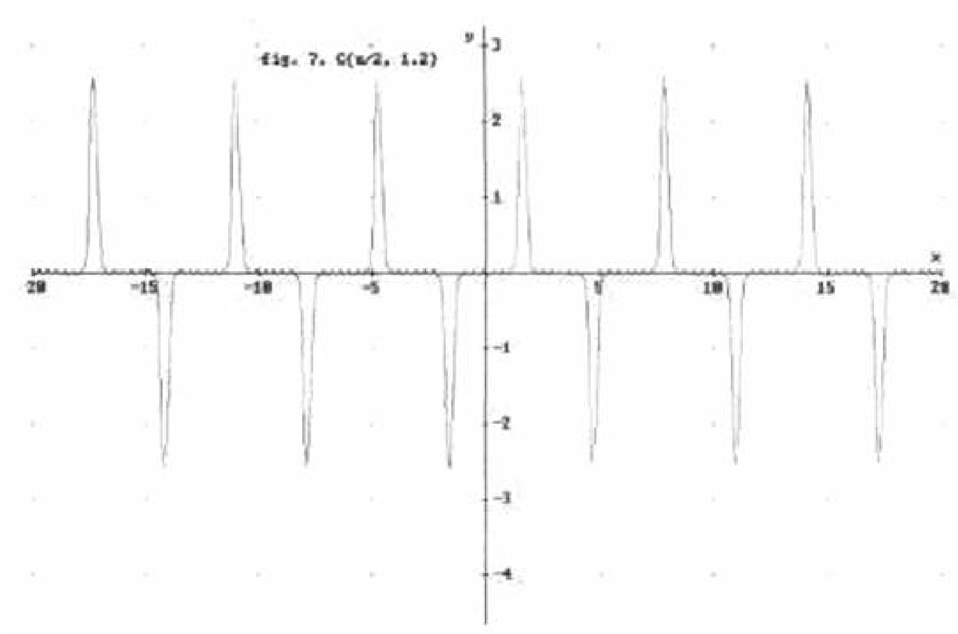
serie de Fourier con 1, 4, 6 y la décima función senoidal, para $C(p,0.4)$



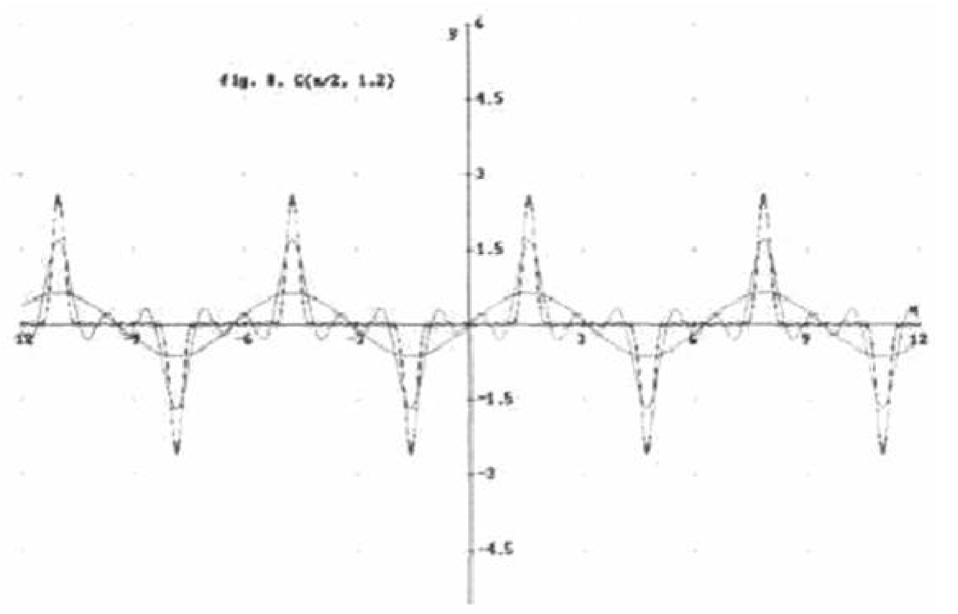
serie Fourier hasta la décima función senoidal para $C(p/2,0.8)$



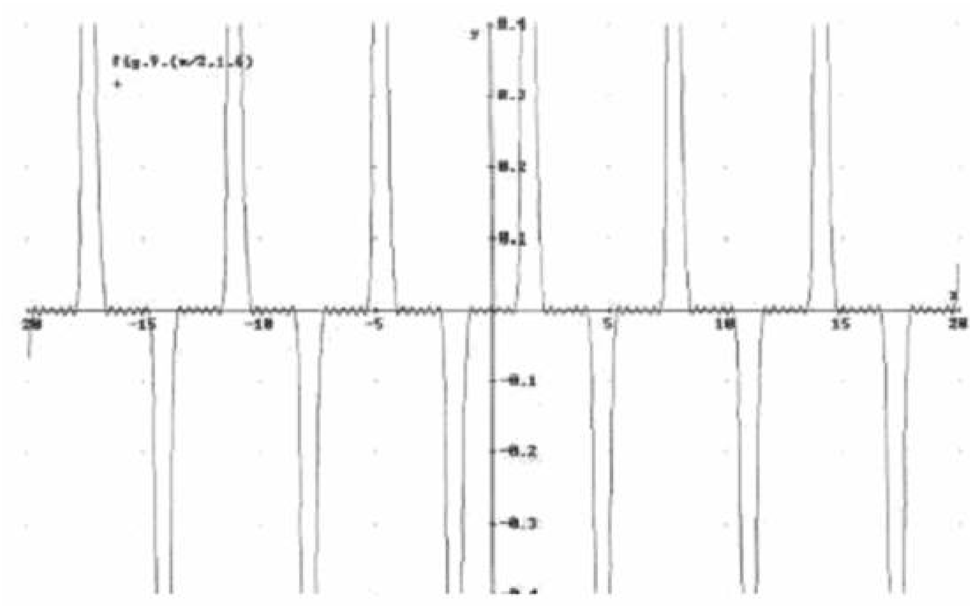
serie Fourier con 1, 4, 6 y la décima función senoidal para $C(p/2,0.8)$



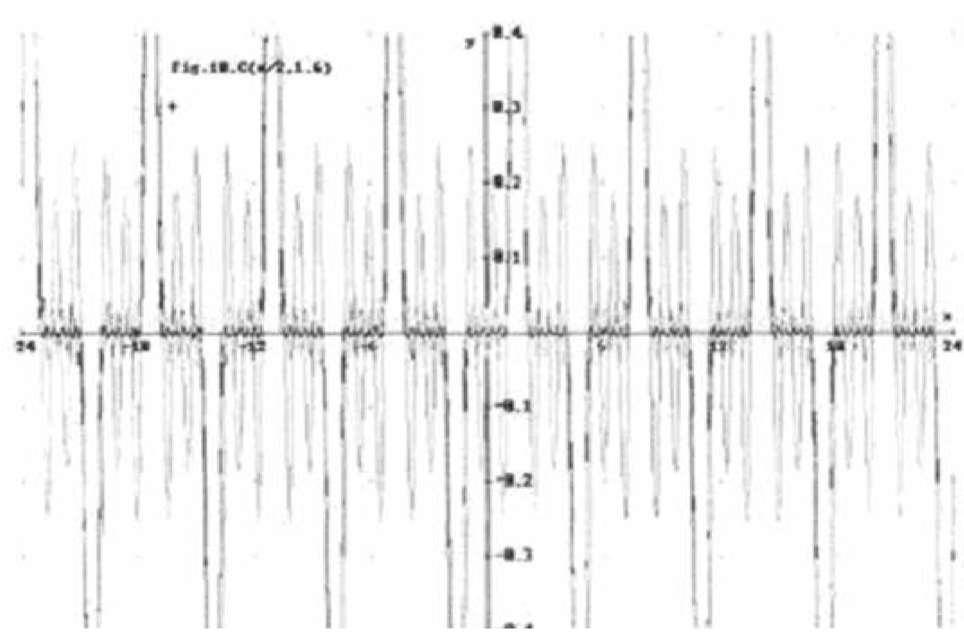
serie Fourier hasta la décima función senoidal para $C(p/2,1.2)$



serie Fourier para 1, 4, 6 y la décima función senoidal para $C(p/2,1.2)$

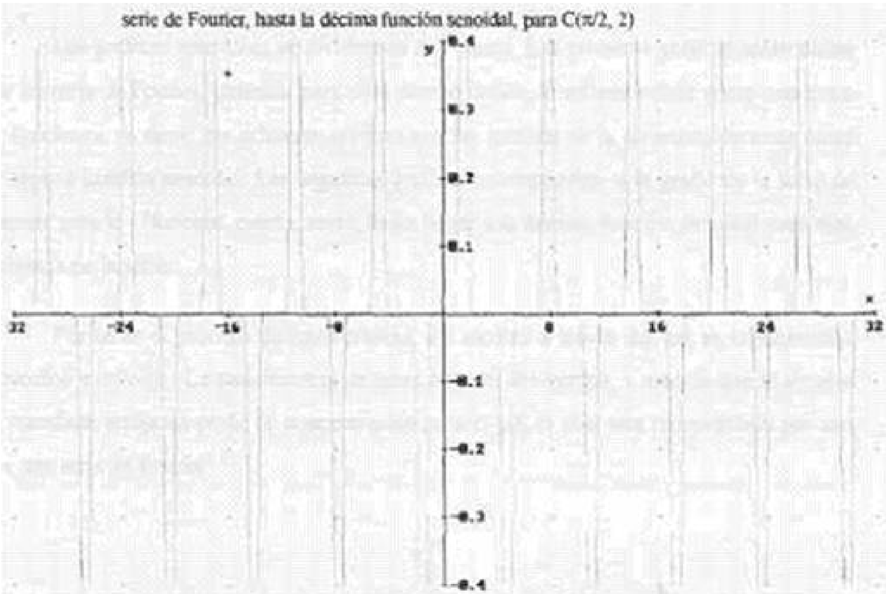


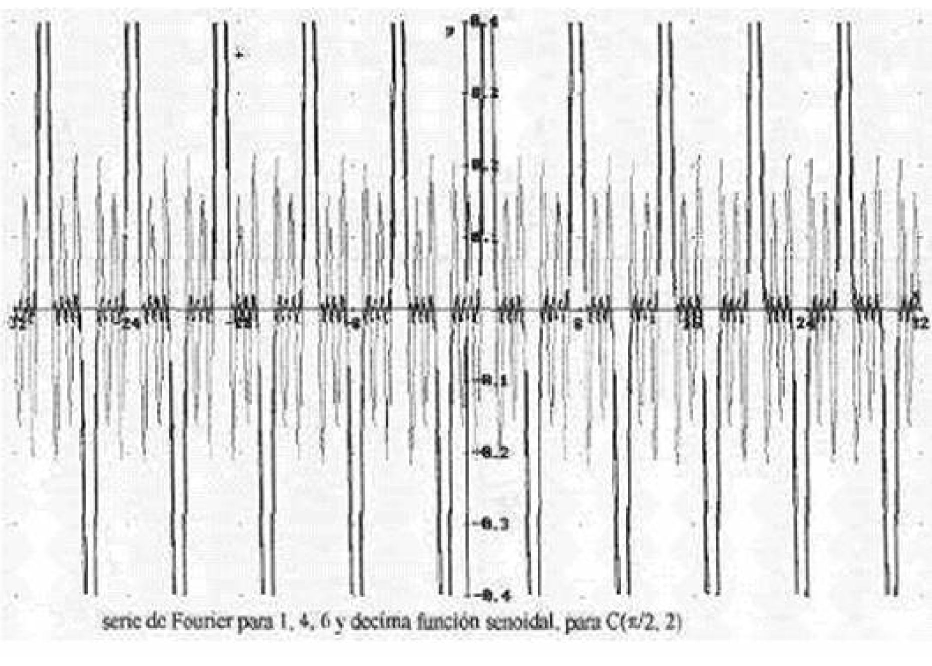
serie Fourier hasta con la décima función senoidal para $C(p/2,1.6)$



serie Fourier con 1, 4, 6 y décima función senoidal para $C(p/2,1.6)$

serie Fourier hasta la décima función senoidal para $C(p/2,2)$

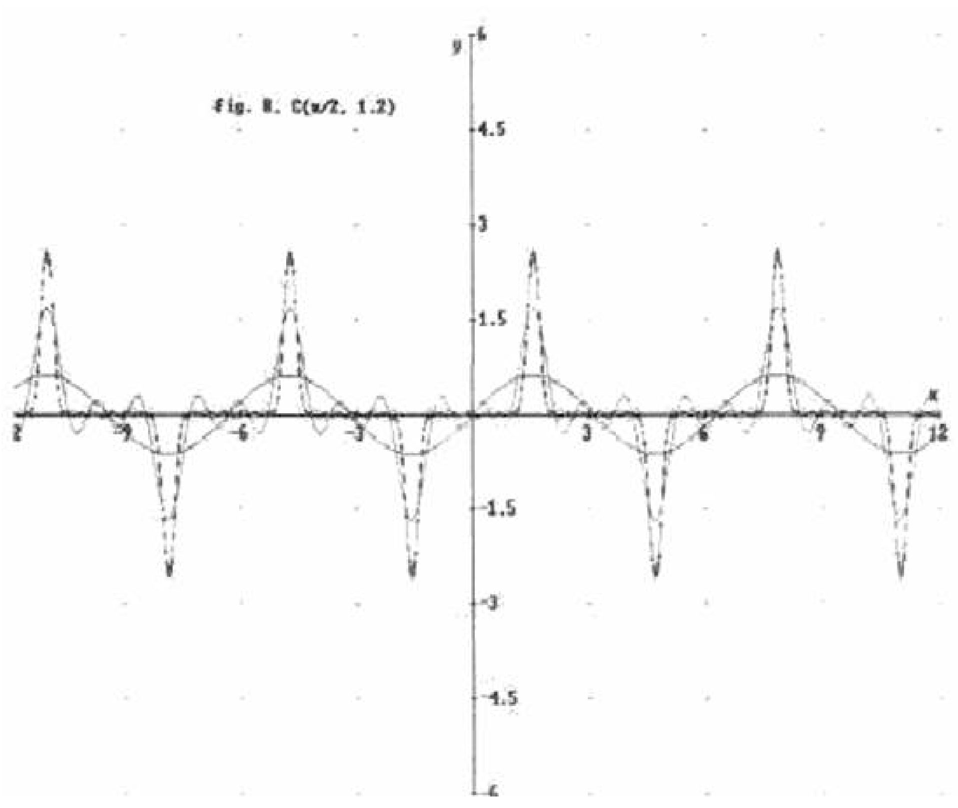




serie Fourier para 1, 4, 6 y la décima función senoidal para $C(p/2,2)$

Las gráfi cas anteriores se dividen en dos clases. Las primeras gráficas están dadas por las serie de Fourier, obtenida para cada tiempo donde, la serie esta dada como una suma de funciones, es decir, las primeras gráficas son las gráficas de la serie considerando h asta la décima función senoidal. Las segundas gráficas corresponden a la gráfica de la serie de Fourier para la 1 "función, cuarta, sexta, hasta llegar a la décima función senoidal para diez términos de la serie.

Por tanto el proceso de transferencia, del alcohol a través del gel es teóricamente periódico e infinito. La transferencia de masa a través del tiempo, a medida que el alcohol se transfiere arroja un perfil de concentración para el gel, el cual esta representado por una por una serie de Fourier.



4.2.6 Interpretación de la solución de la ecuación diferencial parcial en términos de la transferencia de masa

Las primeras gráficas que se han dado anteriormente están dadas por las serie de Fourier que se obtiene para cada tiempo donde, la serie esta dada como una suma de funciones, es decir. Las primeras gráficas nones, son las gráficas de la serie, considerando hasta la décima función senoidal. Las gráficas con en el número de figura par son las gráficas de la serie de Fourier para la 1 "función, cua rta, sexta, hasta llegar a la décima función senoidal para diez términos de la serie.

Por tanto el proceso de transferencia, del alcohol a través del gel es teóricamente periódico e infinito. La transferencia de masa a través del tiempo, a medida que el a lcohol se transfiere arroja un perfil de concentración para el gel, el cual esta representado por una por una serie de Fourier.

Para interpretar la solución, partimos de lo siguiente: Sí la ecuación:

$$C_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = A_n con(npll)Dt + B_n sen(npll)Dt = m_n e^{(-Dlt}) sen(npxll)$$

Puede representarse en la forma:

$$m_n \cos \frac{pn}{\ell} D(t + u_n) sen \frac{pn}{\ell} x$$

Se puede analizar que en el proceso de la transferencia de masa del alcohol a través del gel,

$$C_n(x_0,t) = m_n \cos \frac{pn}{\ell} D(t + u_n) sen \frac{pn}{\ell} x_0$$

en cada punto de la charola se efectúan oscilaciones armónicas:

$$m_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \frac{pn}{\ell} D u_n = -arctg \frac{B_n}{A_n}$$

Con amplitud:

$$a_n sen(pnll) x_0$$

al movimiento de éste tipo se le conoce como onda estacionaria. Los puntos x = z(l/n)(z=1, 2, 3,…………n -1), en los cuales $sen(pnll)x = 0$, quedan inmóviles durante todo el proceso de transferencia del alcohol a través del gel, se lla man nodos de la onda estacionaria C(x, t). Los puntos x = (2z+l/2n) *l*(z = 0, 1, ..n -1) en los cuales $sen(pnll)x \pm 0$ oscilan con la amplitud máxima mn se llaman vientres de la onda estacionaria. El perfil de una onda estacionaria es en todo momento u na sinusoide:

$$C_n(x,t)n_n(t)sen(pnxll)$$

Donde: $n_n(t)m_n \cos w_n(t + u_n)$

Con $w_n = (pnDll)$

En el momento de tiempo t, en el cual $\cos w_n(t + u_n) = \pm 1$ las desviaciones alcanzan sus valores máximos y la velocidad del movimiento es nula. En los m omentos de tiempo t, en los cuales $\cos w_n(t + u_n) = 0$ la desviación es cero y la velocidad del movimiento es máxima. Las frecuencias de las oscilaciones de todos los puntos de la charola coinciden y son iguales a: $(w_n(pnDll))$ Las frecuenci as de ω_n se llaman frecuencias propias. Para las oscilaciones transversales:

$$w_n = (pnll)\sqrt{T / p}$$

la energía de la onda estacionaria n -ésima (n-ésima armónica) para el caso de las oscilaciones transversales es:

$$E_n = \left(pm_n^2 w_n^2\right)1/4 = w_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)/4$$

Representación de las oscilaciones en forma de superposición de ondas estacionarias.

En el punto anterior se ha estudiado a las oscilaciones libres y se ha demostrado la existencia de soluciones particulares en forma de ondas estacionarias. En este punto se dará una fundam entación de la representación de una solución arbitraria como superposición de ondas estacionarias. Como primer punto se estudia la generalización del principio de superposición de bien conocido para las sumas finitas, al caso de las series infinitas. A continuación se menciona el principio de superposición

El principio de superposición

Sea L[C] un operador diferencial lineal, de tal forma que L[C] es igual a la suma de ciertas derivadas de la función(ordinarias o parciales) con coeficientes que son funcio nes de las variables independientes.

Sí las funciones C_i(i = 1, 2, 3, ...n) son soluciones particulares de la ecuación diferencial homogénea(ordinaria o en derivadas parciales) L[C] = 0 entonces la serie:

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} m_k C_k$$

es también solución de est a ecuación, sí el cálculo de las derivadas de C que figuran en la ecuación L[C] = 0 se puede efectuar mediante la derivación término a término de la serie. En efecto, si las derivadas de C que figuran en la ecuación L[C] = 0 pueden ser calculadas derivando la serie término a término, entonces se tiene de acuerdo a la linealidad de la ecuación:

$$L[m_1C_1 + m_2C_2 + m_3C_3 + \text{.........} m_nC_n] = m_1L[C_1] + \text{.........} m_nL[Cn]$$

De modo que:

$$L[C_j] = 0(j = 1, \text{.........}, M) \Rightarrow L[m_1C_1 + \text{.........} m_nC_n] = 0$$

Lo anterior es para combinaciones lineales infinitas tales que:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(m_k C_k) \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty}(m_k)(LC_k)$$

donde ambas series convergen y se tiene que:

$$L\left[\sum_{k=1}^{\infty}(m_k C_k)\right] = \sum_{k=1}^{\infty}(m_k L)C_k$$

El principio de superposición es:

$$L[C_k] = 0 \quad (todok) \quad \Rightarrow L\left[\sum_{k=1}^{\infty}(m_k C_k)\right] = 0$$

Puesto que las series convergentes pueden sumarse término a término, queda demostrado que la función C satisface a l a ecuación. Dado el principio de Superposición, volvamos al problema, donde debemos demostrar la continuidad de la función:

$$C(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(npll)Dt + B_n sen(npll)Dt \quad sen(npll)\right)x$$

De aquí se sigue que C(x, t) tiende en forma continua hacia sus valores iniciales y de frontera, para demostrarlo, es suficiente conque se demuestre la convergencia uniforme de la serie de C(x, t), ya que el término general de la seriees una función continua y una

$$j_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} j(x) \quad sen \quad \frac{pn}{\ell} xdx$$

$$y_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} y(x) \quad sen \quad \frac{pn}{\ell} xdx$$

serie de funciones continuas que converge uniformem ente, es lo que determina una función continua.

Y el problema se reduce a la demostración de la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |j_n| \qquad con \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |y_n| \qquad con \quad (k = 1, 0, 1)$$

Con este fin se aplica las propiedades de las Series de Fourier:

Sí una función F(x) periódica con período 2*l* posee k derivadas continuas y la derivada (k+l)-ésima es continua a trozos, la serienumérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|a_n| + |b_n|\right)$$

donde a_n, b_n pertenecen a los coeficientes mn de Fourier, converge. Sí se trata del desarrollo en seriede $sen(pnxll)$ de la función f(x) dada sólo en el intervalo (0, *l*), es necesario que las condiciones anteriores se cumplan para la función F(x) que se obtiene al continuar en forma impar f(x). En particular para la continuidad de la función F(x) es neces ario que f(0) = 0 , análogamente en el punto x = *l* debe ser f(*l*) = 0 puesto que la función continuada debe ser continua y periódica con período 2*l*. La continuación de la derivada primera para x = 0, x = *l*, se obtiene automáticamente al efectuar la continua ción impar. En general podemos decir que para la continuidad de las derivadas pares de la función continuada se debe cumplir que:

$$\mathrm{f}^{\mathrm{k}}(0)=\mathrm{f}^{\mathrm{k}}(l)=0 \qquad (k=0,\,2,\,4,......2_n)$$

entonces para la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |j_n| \qquad con \quad (k=0,1,2)$$

es suficiente exigir que la desviación inicial φ(x), satisfaga las siguientes condiciones:

1° Las derivadas de la función (p(x),son continuas hasta de segundo orden, incluso la tercera derivada es continua a trozos y además:

$$j(0)=j(l)=0; \qquad j''(0)=j''(l)=0$$

para la convergencia de las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |y_n| \qquad con \quad (k=1,\,0,1)$$

2° La función V|/(x) posee derivada continua, derivada segunda continua a trozos y además:

$$y(0)=y(l)=0$$

De esta forma se ha demostrado que cualquier oscilación C(x, t), siempre que φ(x) y ψ(x) satisfagan a las condiciones 1° y 2°, se representa en forma de superposición de ondas estacionarias.

Propagación de ondas en el proceso de transferencia de masa

El problema de la propagación de ondas genera el problema siguiente: hallar la solución acotada de la ecuación que representa el proceso de transferencia de masa:

$\partial C/\partial t \quad = D\partial^2 C/\partial x^2 \qquad (0 \le x < \infty, -\infty < t)$ que satisfaga la condición:

$$C(0,t)=A\cos wt$$

Cuya solución tiene la forma:

$$C(x,t) = Ae^{\sqrt{\frac{w}{2D}x}} \cos\left(\sqrt{\frac{w}{2D}x - Dt} \right)$$

En base, a esta solución, se puede dar la siguiente característica del proceso de l a propagación de una onda en el proceso de transferencia de masa: Sí la concentración de la superficie cambia periódicamente durante un tiempo largo, en la charola también se establecen oscilaciones de flujo de masa con el mismo período y además:

1. La amplitud de las oscilaciones disminuye exponencialmente con la profundidad:

   $$A(x) = Ae^{\sqrt{\frac{w}{2D}x}}$$

   es decir si las profundidades crecen en progresión aritmética, las amplitudes disminuyen en progresión geométrica (primera Ley de Fourier)

2. Las oscilaciones de flujo de masa de alcohol en el gel tienen lugar con un desvió de fase. El tiempo o de retardo de los máximos (mínimos) de concentración en el gel respecto a los momentos correspondientes en la superficie es proporcional a la profundidad (segunda Ley de Fourier):

   $$s = \sqrt{\frac{1}{2Dw}x}$$

3. La profundidad de penetración de flujo de masa de alcohol a través del gel depende de las oscilaciones del flujo de masa en la superficie de la charola. El cambio relativo de la amplitud del flujo de masa es:

   $$\frac{A(x)}{A} = e^{\sqrt{\frac{w}{2D}x}}$$

Esta fórmula muestra que cuanto menor es el período, menor es la profundidad de penetración de masa de alcohol en el gel. En la operación del secado en el experimento propuesto, el alcohol se transfiere a través del gel y es suma impo rtancia, tener la máxima profundidad de penetración del alcohol a través del gel hacia la superficie de la charola para su posterior evaporación. Para oscilaciones de masa con períodos T_1 y T_2, las profundidades x_1 y x_2 en las cuales tiene lugar un cambio relativo igual de concentración, están ligadas por la relación(tercera Ley de Fourier):

Si suponemos, que en el centro de la charola se mantiene una concentración periódica μ(t) para el gel y representamos esta función en forma de la serie de Fourier:

$$m(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2pn}{T}t+b_n sen\frac{2pn}{T}t=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left[\frac{2np}{T}\left(t-s_n^{0}\right)\right]\right)$$

$$s_n^{2}=\frac{T}{2np}\left(p+arctg\frac{b_n}{a_n}\right) \qquad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$$

Donde T es el período. Tomando las ondas de masa del alcohol, correspondientes a cada

$$x_2=\sqrt{\frac{T_2}{T_1}x_1}$$

sumando se obtiene, que la concentración C(x, t) para toda x, será una funci ón periódica del tiempo y su armónico n -ésimo es:

$$C_n(x,t)=a_n(x)\cos\frac{2np}{T}t+b_n(x)sen\frac{2np}{T}t$$

$$=A_n e^{-\sqrt{\frac{np}{TD}x}}\cos\left[\sqrt{\frac{np}{TD}}x-\frac{2np}{T}t+s_n^{0}\right]$$

Lo anterior muestra la concentración en ciertos dos puntos x_1 y x_2 del gel, durante un período completo. Mediante el análisis armónico, también podemos, obten er otro dato más, determinar el coeficiente de difusividad de masa (D) del alcohol a través del gel.

4.2.7 Significación de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa

El seguimiento matemático alrededor de las etapas de la contextualiz ación de la serie de Fourier nos ha permitido, modelar la ecuación diferencial que representa al proceso de transferencia de masa en base, a nuestro experimento propuesto, y de esta manera, por medio de su solución significar los diferentes conceptos a tra vés del comportamiento de secado del gel en diferentes tiempos y posiciones. Tanto, en la ecuación diferencial parcial homogénea obtenida, como en la no homogénea, existen conceptos con una estrecha relación con respecto a los conceptos relativos a la Seri e Fourier, que propiamente son éstos conceptos, lo que le da significación al proceso teóricamente infinito como lo es el fenómeno de la transferencia de masa.

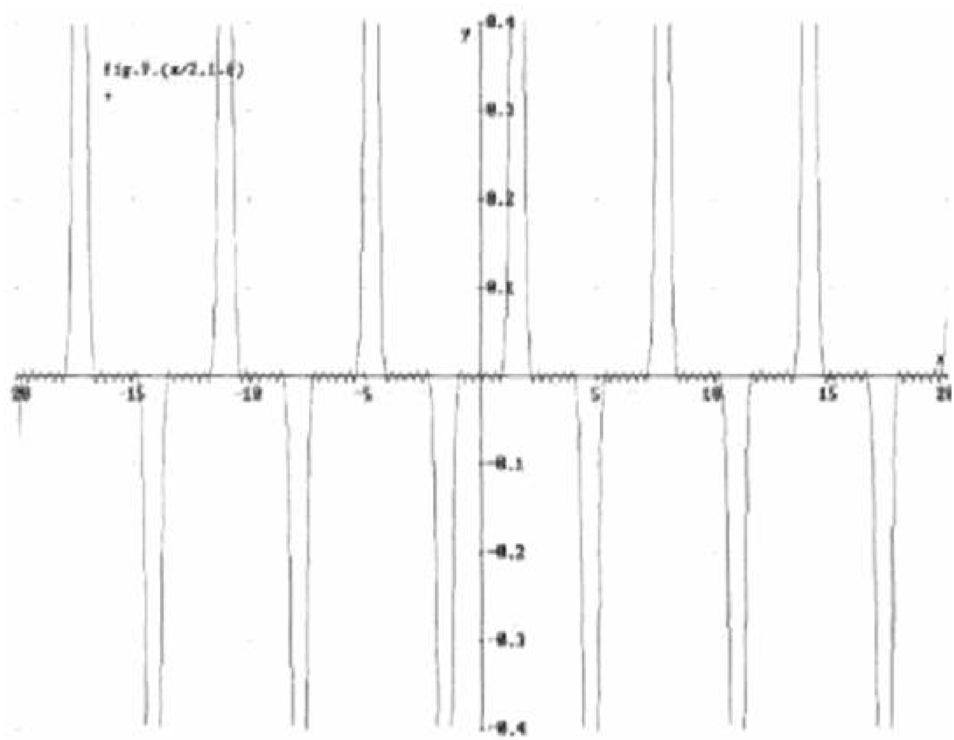
Durante la transferencia del alcohol a través del gel, se tendrá una concentración diferente a través del tiempo de secado, obteniéndose perfiles de concentración del gel, los cuales indicarán el comportamiento de las moléculas que se encuentran sometidas al secado, este comportamiento es obtenido por medio de la serie de Fourier:

$$\frac{C' - C_{E'}}{C_c - C_{E''}}$$

Donde C es la concentración del gel equivalente al contenido de humedad del alcohol en el tiempo 0 equivalente a libras de alcohol / libras de gel seco

$C_{E'}$ es la concentración del gel en equilibrio equivalente al contenido de alc ohol en el gel en equilibrio equivalente a libras de alcohol/libras de gel seco.

C_c es la concentración del gel en el período durante el cual el fenómeno del secado se controla por la difusión equivalente libras de alcohol/libras de ge l seco. Si regresamos a las gráficas de la serie de Fourier que representa al experimento propuesto de secado, significamos el proceso de la siguiente manera:



$$\frac{C' - C_{E'}}{C_c - C_{E''}} = C(p/4, \quad 0) = (4/p)\begin{bmatrix} sen2x - sen6x + \quad sen10x - sen14x + \\ sen18x - sen22x..... \end{bmatrix}$$

Para t = 0.4 horas

$$\frac{C' - C_{E'}}{C_c - C_{E''}} = C(p/4, \quad 0.4) = (4/p)\begin{bmatrix} e^{-(4)(0.0096)(0.4)} sen\,2x - e^{-(36)(0.4)(0.0096)} sen\,6x + \\ e^{-(100)(0.4)(0.0096)} sen10\,x - e^{-(196)(0.4)(0.0096)} sen14\,x + ... \end{bmatrix}$$

para t = 2 horas

$$\frac{C' - C_{E'}}{C_c - C_{E''}} = C(p/4, \quad 2) = (4/p)\begin{bmatrix} e^{-(4)(0.0096)(2)} sen\,2x - e^{-(36)(2)(0.0096)} sen6\,x + \\ e^{-(100)(2)(0.0096)} sen10\,x - e^{-(196)(2)(0.0096)} sen14\,x + ... + ... \end{bmatrix}$$

El comportamiento de la concentración del gel o perfil de concentración a través del tiempo en el proceso de transferencia del alcohol a través del gel hada el exterior en la operación del secado, esta dado a través de una serie de Fourie r cuya significación es el movimiento de las moléculas transferidas mediante oscilaciones armónicas originando sinusoides en la propagación continua de ondas producidas por el flujo de masa de alcohol transferido.

A nivel molecular, una molécula de alcoho l es transferida a través del gel por la acción del aire seco hasta su evaporación en el exterior de la charola. A medida que transcurre el tiempo de secado (el tiempo de secado es teóricamente infinito), el movimiento de las moléculas de alcohol es cada v ez más lento, esto es, debido a la poca cantidad que se encuentran presentes en el gel, moviéndose en un espacio muy reducido por el estado de sequedad del gel en la charola.

En el proceso de transferencia de moléculas de alcohol a través del gel hacia el exterior de la charola, la concentración del gel es equivalente a su pérdida de humedad de alcohol hasta llegar al equilibrio y así, alcanzar la máxima concentración. De esta forma, se considera que el gel se encuentra seco y la transferencia de masa de a lcohol es nula, finalizando el proceso de secado.

CONCLUSIONES

La problemática de la enseñanza aprendizaje de la serie de Fourier, tiene como antecedente, investigaciones que han aportado numerosos conocimientos con respecto a las concepciones de los estudiantes, así como los obstáculos y dificultades que intervienen en su aprendizaje, no obstante, la forma tradicional de la enseñanza de la matemática, que se centra en la solución de ejercicios mediante algoritmos, ha dado como resultado el ejercicio de la matemática de la serie de Fourier puramente mecánica. El problema de la enseñanza de las series de Fourier, no termina de esta forma. En las escuelas de ingeniería donde la matemática es una herramienta de apoyo al área del conocimiento que lo sustenta, la matemática es desvinculada con los conceptos implícitos en las diferentes especialidades, es en estas escuelas, donde los estudiantes futuros ingenieros y los profesores de nivel superior, no conceptualizan a la serie de Fourier en vinculación entre la ingeniería y la matemática.

La necesidad de entrelazar las dos áreas del conocimiento, como consecuencia de la descontextualización de la serie de Fourier en la ingeniería química propiamente en lo que se refiere al fenómeno de la transferencia de masa, ha constituido el objetivo de esta investigación. El proceso de la transferencia de masa es un de los problemas de ingeniería química que requiere del conocimiento de diferentes conceptos matemáticos. Uno de esos conceptos, son los conceptos referentes a las series de Fourier, esto es, debido, a que las series de Fourier, están estrechamente ligadas con el estudio de procesos físicos que teóricamente son infinitos.

El marco de referencia es la Matemática en Contexto como propuesta didáctica que sugiere (Camarena, 1999). La Contextualización de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa, parte de la hipótesis de que la Matemática en Contexto es la forma ideal de presentar los temas de matemática en escuelas de ingeniería y esto favorece el proceso de enseñanza aprendizaje.

Como es sabido, de la Matemática en Contexto, el planteamiento de problemas de este fenómeno es a través de un problema real dado. Nuestro problema de transferencia de masa se plantea por medio de un experimento, que nos llevaría a los conceptos que engloban al modelo, como son los conceptos que engloban a la ecuación diferencial, los conceptos pertinentes para darle solución a la ecuación que lo representa, los conceptos para darle interpretación y por medio de todos éstos co nceptos, se dota de significado a las series de Fourier.

Para realizar la contextualización, se analizaron algunos libros de texto de matemática y de operaciones unitarias en la ingeniería química, este análisis arrojó resultados de gran provecho para esta blecer la Matemática en Contexto de la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa.

El llevar a cabo un estudio preliminar, donde se realizaron dos estudios de caso, con la entrevista de 4 profesores y 2 estudiantes respectivamente, fue con el propósito de analizar la forma en que el profesor de matemáticas y el profesor de operaciones unitarias conceptualiza al proceso de transferencia de masa y su vinculación con la matemática, analizar y conocer de qué forma el estudiante conceptualiza a l a serie de Fourier en el proceso en estudio, así como analizar de que manera es abordada la serie de Fourier en los programas de estudio de matemática e ingeniería química en el contexto del proceso de transferencia de masa. Los resultados obtenidos a trav és del estudio de caso que se realizó a los estudiantes, nos ayuda a determinar elementos que servirán para el estudio de los Campos Conceptuales que serán útiles para una próxima investigación de la cual partiremos de una conceptualización del estudiante antes de la contextualización de la serie de Fourier y posteriormente a través de la teoría de Campos Conceptuales, estudiar y analizar la conceptualización del estudiante referente a la serie de Fourier en el proceso de la transferencia de masa.

La metodología en la contextualización es guiada a través de cada una de las etapas de la Matemática en Contexto, con el planteamiento del problema de transferencia de masa, en el cual se determina:

Las variables y constantes presentes en el problema.

El Modelo mat emático del problema de Transferencia de Masa

La solución matemática del problema de Transferencia de Masa

La solución requerida por la Transferencia de Masa

Interpretación de la solución en términos de la Transferencia de Masa

Las etapas anteriores en la metodología contribuyen a lograr la significación a la serie de Fourier en la transferencia de masa.

En consecuencia, con el análisis y vinculación de diferentes conceptos sobre la serie de Fourier para la contextualización de la misma en el problema, se define nuestro objetivo posterior: la enseñanza de la serie de Fourier en contexto, fa cual le proporcionaría al estudiante conceptualizar y significar el proceso de transferencia de masa, y de esta manera, comprender el proceso teóricamente infinito bajo la perspectiva de las matemáticas. A nosotros como educadores de la matemática, concebir, la serie de Fourier en el contexto de la química, definir los diferentes conceptos necesarios y pertinentes para la enseñanza y aprendizaje de la serie de Fourier en el proceso de transferencia de masa. Para el logro de este objetivo, se propuso, la enseñanza de este conocimiento matemático bajo la perspectiva de la Matemática en Contexto, con el objeto de vincular la matemática referente a las series de Fourier en el contexto del proceso de la transferencia de masa, cuyo objetivo es integrar en los estudiantes el conocimiento matemático con el de la ingeniería química.

Al contextualizar la serie de Fourier el objetivo, es una tarea que será un proyecto posterior, en el cual el objetivo será estudiar investigar y analizar la integración de este conocimiento al estudiante, de tal forma que nunca sea separado del sujeto. En el proceso del conocimiento de la contextualización de la serie de Fourier, el sujeto asigna al obje to una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente al objeto. Para tal investigación hemos de trabajar bajo el marco teórico de los Campos Conceptuales de Vergnaud, cuyo objetivo radicará en analizar las diferentes concepciones que el estudiante tenga de la serie de Fourier y conocer la red de conceptos y el campo conceptual que el estudiante ha de formar con respecto al conocimiento matemático en estudio.

Con el apoyo de la matemática en contexto, se tiene la hipótesis de que el est udiante estructure y asimile a la luz de sus propios esquemas el conocimiento de la Serie de Fourier, con la finalidad de darle significación en el proceso de transferencia de masa, que siguiendo la enseñanza Piagetana, toda actividad cognoscitiva y motriz desde la percepción y el hábito al pensamiento conceptual y reflexivo consiste en vincular significaciones, y toda significación supone una relación entre un significante y una realidad significada y de esta manera lograr el aprendizaje significativo.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Albert A. (1996). La convergencia de Series en el Nivel Superior. Una Aproximación Sistemática. Tesis Doctoral. CINVESTAV-IPN, México. 1996

[2] Artigue. M Difficultés cognitives et didactiques dans la constructiode realtions entre cdre algebrique et cadre graphique. En G. Booker, P. Cobb, T. Mendicutti (Eds), procedings of PME, México, 14: 11-18. 1990.

[3] Bacherald G. Laformation de Vespirit scientific, Pris, Librairie J. Vrin. Traducción en español editada por Siglo XIX, México. 1938.

[4] Boyce, W. Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera. Limusa-Wiley México. 1967.

[5] Brousseau. Obstacles épistémologiques en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2): 33-112.1983

[6] G. P. Camarena, Diseño de un Curso de Ecuaciones Diferenciales en el Contexto de los Circuitos Eléctricos. Tesis de Maestría en Ciencias en la especialidad en Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México. 1987.

[7] G. P. Camarena. El contexto de las Ecuaciones Diferenciales Lin eales. 6º Coloquio Académico. ESIME-IPN, México. 1995.

[8] G. P. Camarena, La Matemática en Contexto. Novena reunión Centroamericana del Caribe Sobre formación de profesores e Investigación en Matemática educativa, Instituto Politécnico Nacional, México. 1995.

[9] G. P Camarena. Hacia la Integración del Conocimiento: Matemáticas e Ingeniería. 2° Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y de Sistemas. ESIME -Zacatengo-IPN, México. 1999.

[10] G. P. Camarena, Curso de Análisis de Fourier en el co ntexto del análisis de señales eléctricas. Editorial. ESIME-IPN, México. 1993.

[11] Paul Duchateau. Ecuaciones Diferenciales Parciales. McGRAW -HILL/ INTERAMERICANA DE MÉXICO, S.A de C.V. México. 1988.

[12] Farfán R. Construcción de la noción de Convergen cia en ámbitos fenomenológicos vinculados la Ingeniería. Estudio de Caso. Tesis Doctoral. CINVESTAV -IPN, México. 1994.

[13] Farfán, R. y Albert, A. Seminario de Investigación con estudiantes de maestría. CINVESTAV-IPN, México. 1995.

[14] Farfán, R. Ingen iería Didáctica. Pedagogía, tercera época Vol. 10, num. 5, Revista de la Universidad Pedagógica Nacional, pp. 14-23, México. 1995

[15] Fourier J. Théorie analytique de la Chaleur.. Chez Firmin Didot, Reeimpresiones editions Jacques Gabay, A. París. 1822.

[16] Foust. A. Principios de Operaciones Unitarias. Solución de las ecuaciones para el estado inestable: Compañía Editorial Continental, S.A de C.V., México. 1982

[17] Geankoplis. Christie J. Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias. : Compañía Editorial Continental, S.A de C.V. México. 1989.

[18] Murray. S. Transformada de Lapla ce. Me Graw Hill. México. 1982.

[19] Piaget J. Structuralism. New York, harpet & Row. 1970

[20] Piaget J. Teoría del pensamiento como Estructuras Cognitivas. New York. 1973.

[21] Piaget J. Biología Y Conocimiento (ensayo Sobre Las Relaciones Entre Las Regulaciones Orgánicas Y Los Procesos Cognoscitivos. 1975.

[22] SAMARSKY A.N. TIJONOV. A.A Ecuaciones de la Física Matemática. . Editorial MIR MOSCÚ, Moscú. 1988.

[23] Sierpinska. Obstacles épistémologiques relatifs a la notión de límite. Recherches en didactiques des mathématiques, Vol. 6 (1), pp 5-68. 1985.

[24] Vergnaud. G. Quelquel orientations theoriques et methodologiques des recherches trancaises en didactique des mathématiques. Conferencia plenaria o proceeding PME 5. París. 1981.

[25] Vergnaud. G. El Papel del Enseñante a la Luz de los Conceptos de esquema y del Campo Conceptual"(Le role de I'enseignant á la lumiére des concepts de schéme et d *e champ conceptué!)*. París. 1994.