UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

La integración y sus fundamentos

Elaborado por: Ing. Juan Adolfo Álvarez Martínez.

Noviembre, 2014

http://www.uaeh.edu.mx/virtual

CC BY ND NC

INTRODUCCION

El cálculo integral fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow.

Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

Conocimientos previos.

Es importante considerar antes de entrar en detalle al estudio del cálculo integral, abordar el concepto de la diferencial, la cual proviene de la derivada, la cual se estudió en la unidad anterior de este curso.

La diferencial

El concepto de diferencial es, sin duda, uno de los conceptos de mayor aplicación dentro de las construcciones infinitesimales en diversas áreas científicas.

Concepto establecido de esta forma desde el principio de la construcción del cálculo a la forma de Newton o de Leibniz.

Veremos a continuación como se construye esta definición.

En la unidad anterior de este curso se estudió la derivada de una función:

y = f(x) se representaba como

$$\frac{dy}{dx}$$

Asimismo se explicó que el símbolo de derivada no representa una fracción ordinaria, sin embargo para la solución de muchos problemas se puede considerar como el cociente de dos diferenciales que son: dy, dx.

Hay que recordar que la definición de derivada implica el límite del cociente de dos incrementos cuando Δx tiende a cero. Esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y la notación de derivada es la a*proximación* entre el incremento de x: Δx y la diferencial dx , así como Δy con dy. Es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

entonces, si la derivada de una función es:

$$\frac{dy}{dx}$$

la diferencial de una función es:

dy = f '(x) dx que se interpreta como:

"La diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente".

Es decir:

$$dy = \frac{dy}{dx}\, dx$$

De lo que se concluye que las fórmulas de diferenciación son las mismas que permiten obtener las derivadas, multiplicándolas por dx.

FORMULARIO DE DIFERENCIALES.

Dichas formulas son:

1 $d(c) = 0$

2 $d(x) = dx$

3 $d(u+v-w) = du + dv - dw$

4 $d(cx) = c\,dx$

5 $d(uv) = u\,dv + v\,du$

6 $d(v^{n}) = n\,v^{n-1}\,dv$

7 $d(x^{n}) = n\,x^{n-1}\,dx$

8 $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^{2}}$

9 $d(\ln v) = \frac{dv}{V}$

10 $d(a^{u}) = a^{u}\,\mathrm{Ln}\,a\,du$

11 $d(e^{u}) = e^{u}\,du$

12 d (sen u) = cos u du

13 d (cos u) = – sen u du

14 d (tan u) = sec ^{2} u du

Si realizas una comparación de las formulas estudiadas de derivadas, éstas tienen una gran similitud, por lo cual si has aprendido y memorizado las formulas, entonces no se te dificultara el aprender las fórmulas de las diferenciales.

Ejemplos resueltos.

Hallar las diferenciales de las siguientes funciones:

a) y = 3x

dy = 3dx

b) y= 3x ^{4}

dy = 12x ^{3} dx

c) y = e ^{2x}

dy= 2e ^{2x} dx

d) y= sen (x^{2})

dy= 2x cos x^{2} dx

e) y= cos 3x

$dy = (- 3 \text{ sen } 3x)\, dx$

f) $y = (2x - 1)^4$

$dy = 4(2x-1)^3 (2) = 8(2x-1)^3\, dx$

<u>Ejercicio de aplicación de la diferencial.</u>

Calcular $y = \sqrt{26}$ usando diferenciales.

<u>Solución</u>: usaremos la raíz cuadrada exacta de un número que sea muy próximo a 26 que es 25, cuya raíz es 5, por lo tanto podemos emplear una función que en general nos permita obtener la raíz de cualquier número, es decir:

$$y = \sqrt{x}$$

Derivando tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

y la diferencial es:

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\, dx$$

o sea:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

Considerando que $x_1 = 25$ y $x_2 = 26$ el incremento viene siendo: $\Delta x = x_2 - x_1 = 26 - 25 = 1$

Y este incremento lo consideramos como la diferencial dx, la raíz cuadrada de 26 será:

$$Y + dy = \sqrt{25} + dy$$

$$= dy = \frac{1}{2\sqrt{25}}(1) = \frac{1}{2(5)} = \frac{1}{10} = 0.1$$

lo que resulta en 5 + 0.1 = **5.1**

y si obtenemos el resultado con calculadora nos da 5.09 que comparando indica un resultado con bastante aproximación.

Ejemplo resuelto de cálculo de volúmenes por diferenciales:

Hallar el cambio aproximado del volumen V de un cubo de lado "x", al aumentar sus lados en 1/100, es decir en (0.01).

El volumen de un cubo es $V = x*x*x = x^3$

La diferencial de volumen es: $dV = 3x^2\,dx$

Cuando $dx = 0.01x$ el cambio de volumen es :

$dV = 3\,x^2(0.01x) =$ **$0.03\,x^3$**, lo cual significa 3 centésimas del valor del lado

Ejemplo resuelto:

Utilice diferenciales para aproximar el volumen de un cascaron en forma esférica cuyo radio interno mide 4 cms. y su espesor es 1/16 cms.

Consideremos el volumen de un cascaron como el incremento del volumen de una esfera, de manera que su radio es "r", "V" el volumen y ΔV el volumen del cascaron.

Entonces:

$V = \frac{4}{3} \prod r^3$ la dV es: $4\prod r^2 \, dr$

al sustituir “r” por 4 y “dV” por 1/16

Tenemos:

$d\,V = 4 \prod 4^2 (1/16) = 4\prod$ por lo tanto:

$\Delta V = 4\prod$ cms ^{3} es el volumen aproximado del cascaron esférico.

Recordando que $\Delta V \approx dV$, es decir el aumento de volumen es aproximado a la diferencial del volumen:

LA INTEGRAL INDEFINIDA.

Una vez definidos los conceptos antecedentes del cálculo integral, se procederá a describir la operación denominada integración.

La palabra "integral" también puede hacer referencia a la noción de primitiva: una función F, cuya derivada es la función dada f.

Se procederá a continuación a explicar el procedimiento de la integral indefinida.
Como se ha indicado ya con anterioridad, el haber llegado a este nivel de conocimientos en matemáticas, implica de alguna manera que ya se conocen las operaciones inversas como la suma y resta, multiplicación con la división, la potencia y la radicación entre otras más.

En el área de cálculo, existen también estas operaciones inversas.

De hecho en el curso de cálculo diferencial, el propósito era que:

Dada una función f(x) , se obtenía una nueva función conocida como derivada:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

y si empleamos diferenciales como se ha visto en las páginas anteriores tenemos:

$dy = f'(x)\,dx$ denominada diferencial

En calculo integral, uno de los objetivos básicos es hallar la función primitiva f(x) cuando se conoce la derivada, es decir el problema inverso.

<u>Este proceso que nos permite obtener la primitiva se llama integración</u> y frecuente mente, estas funciones obtenidas se denominan anti derivadas.

La operación se indica escribiendo el signo integral:

$$\int$$

El cual representa una "s" deformada que representa la operación suma.

La obtención de la integral se obtiene entonces de la siguiente manera:

$$\int f'(x)\,dx = F(x)$$

Que se lee como: la integral de f ' (x) dx es igual a F (x).

La diferencial dx especifica que "x" es la variable de integración.

<u>Por ejemplo</u> si tenemos la función $F(x) = x^3$

Entonces su derivada es : $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ y la diferencial es: $dy = 3x^2\,dx$

Por lo que la integral es:

$$\int dy = \int 3x^{2}\, dx$$ cuyo resultado nos da la funcion primitiva que teniamos inicialmente :

$$y = x^{3}$$

De las explicaciones anteriores, vemos que la diferenciación y la integración son en efecto operaciones inversas.

Muchos matemáticos anteriores a los inventores del cálculo estuvieron cerca de reconocer que la diferenciación y la integración son operaciones inversas, pero fueron Newton y Leibnitz los que llegaron a esta conclusión.

Se verá más adelante que la integración no solo nos permite obtener funciones primitivas, sino que sus aplicaciones son bastante amplias.

Una de ellas que es fundamental nos permite calcular el área limitada por cualquier curva de la que se conozca la función.

En la siguiente sección se presentan algunos ejemplos de integrales con sus propiedades. La explicación se realizará conforme cada una de las formulas se vayan estudiando.

TABLA DE INTEGRALES

D*e cada regla de derivación se puede deducir una regla correspondiente de integración*. La integración directa es aplicable cuando identificamos la función primitiva de forma inmediata; esto es, cuando conocemos la regla de derivación que al aplicarla nos permite hallar el integrando a partir de la función primitiva.

A continuación se muestran propiedades y fórmulas de integración. Se hace la observación que el resultado de la integral contiene un término llamado constante de integración “c”, que en algunas referencias de libros puedes encontrar como “K”

P1. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx,\quad k$ es una constante.

Esta propiedad indica que podemos sacar un factor ***constante*** de la integral

P5. $\int dx = x + c$

La integral de la diferencial es igual a la función.

P2. Si f_1 y f_2 están definidas en el mismo intervalo, entonces:

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Significa que cada término se aplica una fórmula para obtener su integral.

P6. Si n es un número racional diferente de -1, entonces

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}.\ \text{También}\ \int kx^n dx = \frac{k}{n+1}x^{n+1},\ k\ \text{es una constante.}$$

La integral de una potencia se incrementa en una unidad; siempre que el exponente sea diferente de - 1.

P7. $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c.$

Cuando el exponente de la integral es -1 entonces el resultado es el logaritmo de la función.

P8. $\int e^x dx = e^x + c.$

P9. $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$

P10. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c.$

a es un número positivo, $a \neq 1.$

P11. $\int \sin x dx = -\cos x + c.$

P12. $\int \cos x dx = \sin x + c.$

P13. $\int \sec^2 x dx = \tan x + c.$

P14. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c.$

P15. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c.$

P16. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c.$

P17. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c.$

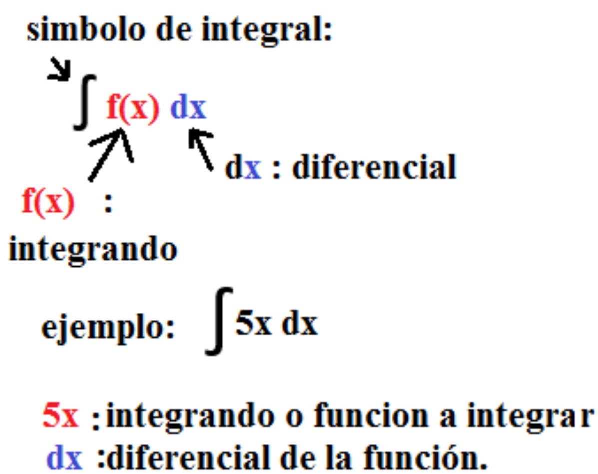
P18. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c.$

Es importante mencionar que estas fórmulas son solo algunos casos de integrales que se les denominan integrales inmediatas, Existen ejemplos o situaciones de problemas que implican el uso de otros métodos y fórmulas que se describirán en otra sección.

EJERCICIOS RESUELTOS

Es importante considerar que el termino o términos que están dentro de la integral se conoce como integrando y representa la función que se va a integrar multiplicada con su diferencial.

Dicha descripción se muestra en la imagen siguiente:



Caso 1:

$$\int 2x^2dx = 2\int x^2\,dx = 2\frac{(x^3)}{3} = \frac{2x^3}{3} + c$$

Caso 2:

$$\int (3x+4)dx \quad = \int 3x\,dx + \int 4dx =$$

$$\frac{3x^2}{2} + 4x + c$$

Caso 3:

$$\int (x^3+2)^2\,dx = \int (x^6 + 4x^3 + 4)\,dx =$$

caso 4:

$$\int x^6\,dx + 4\int x^3\,dx + 4\int dx$$

$$= \frac{x^7}{7} + \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} + 4x + c$$

$$= \frac{x^7}{7} + x^4 + 4x + c$$

Caso 5:

$$\int (2x^2 - 5x + 3)\, dx =$$

$$\frac{2}{3}x^3 \frac{-5}{2}x^2 + 3x + c$$

En el siguiente ejemplo primero el radical se transforma a exponente y luego se aplica la fórmula donde al exponente se le incrementa una unidad:

$$\int \sqrt[3]{x}\ dx = \int x^{1/3}\, dx$$

$$= \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$$

Caso 6: donde cada término se integra con su respectiva fórmula:

$$\int \left(3x^3 - 5x^2 + 3x + 4\right)\ dx = 3\frac{x^4}{4} - 5\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x + C$$

La siguiente sección muestra una descripción más detallada en contexto teórico del concepto de integración.

A lo largo de tu formación académica has observado que en Matemáticas existen operaciones y funciones inversas, algunos ejemplos se especifican en la siguiente tabla:

Operación o función	Símbolo	Operación o función	Símbolo
Suma	+	Resta	-
Multiplicación	x	División	÷
Función exponencial	$y = a^x$	Función logarítmica	$y = \log_a x$

Respecto a la derivada y la antiderivación, éstas se manejarán como procesos inversos.

En relación con la derivada y antiderivada se tiene una función continua F(x) y por

técnicas ya conocidas se determina la derivada, o sea $\frac{dF(x)}{dx}$; por consiguiente, al derivar la función primitiva obtenemos otra función $f(x)$, mas si a ésta se le aplica el proceso inverso, la antiderivación guardaría una función primitiva u original, es decir, la que le dio origen.

En los conceptos estudiados en Cálculo Diferencial hay uno que plantea el siguiente problema: dada una función, encontrar su derivada, que en Cálculo Integral estudiaremos como el problema inverso: dada la derivada de una función, hallar la función original o primitiva. Supongamos que deseamos encontrar una función F(x) que tiene como derivada a:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 3x^2$$

Con base en la derivada se diría que:

$$F(x) = x^3 \text{ porque } \frac{dF(x)}{dx} = \frac{dx^3}{dx} = 3x^2$$

o podemos decir que:

$$F(x) = x^3 + 4 \text{ porque } \frac{dF(x)}{dx} = 3x^2$$

Sus gráficas serían:

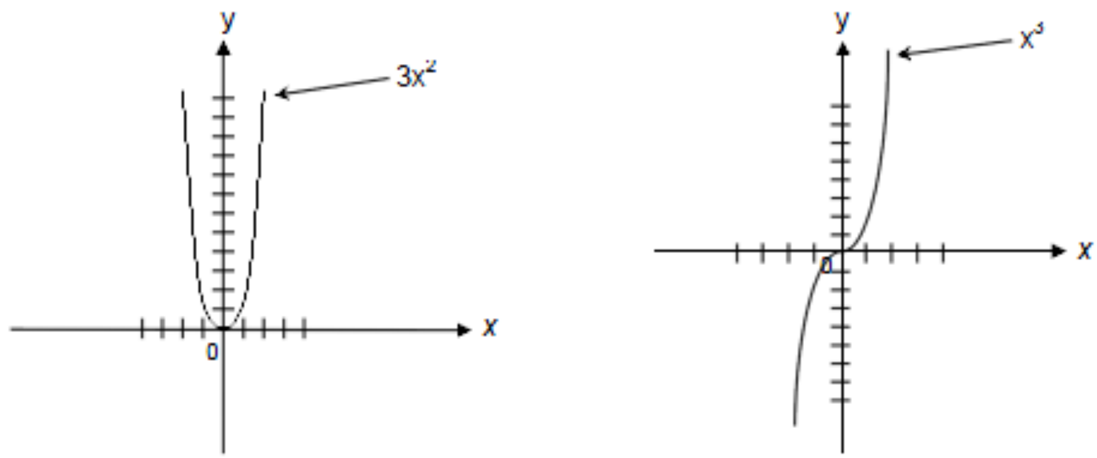
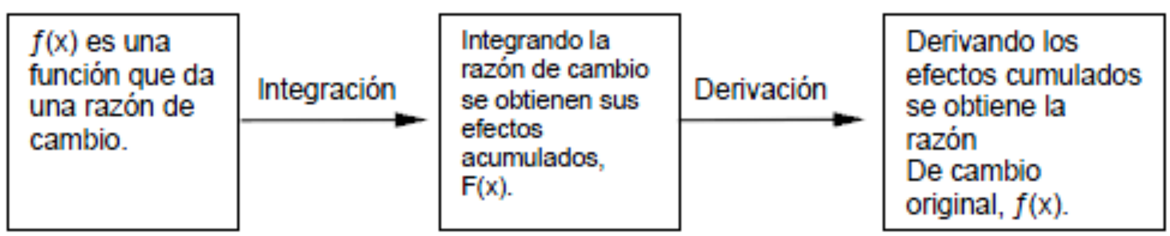


Figura 3.

De acuerdo con lo anterior, si llamamos a la función F(x) antiderivada o primitiva de ,
decimos que x^3 es antiderivada o primitiva de $3x^2$.

La derivación y la antiderivación, que se consideran procesos inversos, podemos esquematizarlas como sigue:



De acuerdo con el esquema, F(x) es una antiderivada o primitiva de $f(x)$ en un lugar de la antiderivada o primitiva de $f(x)$. ¿Por qué?

Una antiderivada o primitiva de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $\frac{dF(x)}{dx} = 2x$

Incluso podemos decir que $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10$ son antiderivadas o primitivas

de $f(x) = 2x$, puesto que $\frac{dF_1(x)}{dx} = \frac{dF_2(X)}{DX} = f(x)$

Si F(x) es un antiderivada (primitiva) de una función $f(x)$, entonces G(x) = F(x) + C también lo es. Aquí C representa una constante (valor independiente de x) y G(x) es otra función cualquiera.

¿Por qué G(x) también es una antiderivada o primitiva? Si suponemos que G(x) es una antiderivada o primitiva entonces concluimos que:

$$\frac{dG(x)}{dx} = f(x)$$

Hemos dicho que G(x) = F(x) + C, mas si derivamos se tendrá:

$$\frac{dG(x)}{dx} = \frac{dF(x)+C}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + \frac{dC}{dx} = \frac{dF(x)}{dx} + 0 = f(x)$$

Por lo tanto, $\frac{dG(x)}{dx} = f(x)$. Por consiguiente, G(x) es una antiderivada o función primitiva de $f(x)$.

De esto concluimos que la antiderivada (o primitiva) de $f(x)$ debe tener la forma G(x) = F(x) + C, es decir, dos antiderivadas de la misma función pueden diferir cuando más en una constante.

En adelante se hará referencia a F(x) + C como la antiderivada de $f(x)$. Además, F(x) + C representa un conjunto de funciones del cual cada miembro tiene por derivada a $f(x)$, y C tendrá valores diferentes.

Concepto de integral indefinida

Si F(x) y G(x) son antiderivadas o primitivas de $f(x)$ que difieren cuando más en una constante, podemos decir que al derivar la función primitiva obtendremos la función original, esto es:

$$F'(x) = f(x),$$

O bien

$$\frac{dF'(x)}{dx} = f(x)$$

Lo anterior puede expresarse como:

$$dF'(x) = f(x)dx$$

o

$$dF'(x) = F'(x)dx.$$

La operación para encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior se llama *antiderivación o integración,* y se representa por $\int$, que es una sigma mayúscula estilizada.

Así, podemos representar la solución como

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

donde $\int f(x)dx$ se lee como la integral o antiderivada de $f(x)$ respecto a x.

Es decir, para indicar una antiderivada o primitiva o integral indefinida de una función general $f(x)$ es común encontrarla con la siguiente simbología:

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ ,\qquad \text{llamada integral indefinida de la función } f(x).$$

Pero, ¿por qué una función puede tener un número infinito de antiderivadas? Se darán dos respuestas: una analítica y otra geométrica.
La primera es simple, pues la hemos estado usando: por ejemplo, recuerda que habíamos mencionado a:

$$\frac{x^2}{2} - 7 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{2} - 11$$

Como algunas de las antiderivadas de la función $f(x) = x$. Esto se comprueba derivando ambas fórmulas, como ya se había indicado.

De éstos dos ejemplos se deduce que podemos añadir una constante arbitraria de integración porque la derivada de la constante es cero. Cualquiera que sea el valor de la constante, no tiene efecto al calcular la derivada.

La respuesta geométrica está en razón de la interpretación de la derivada como una pendiente. La figura 4 muestra tres diferentes curvas, cada una de las cuales tiene la misma derivada, mostrada en la figura 5. Así, la antiderivada de x representa una familia de funciones, todas de la forma $\frac{x^2}{2} + C$.

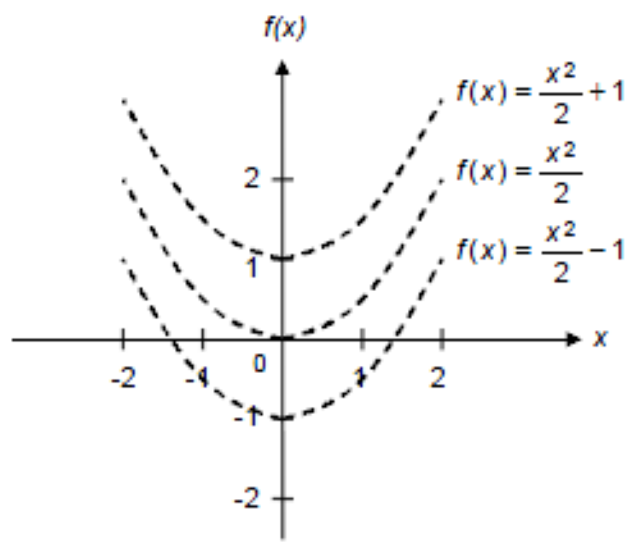


Figura 4.

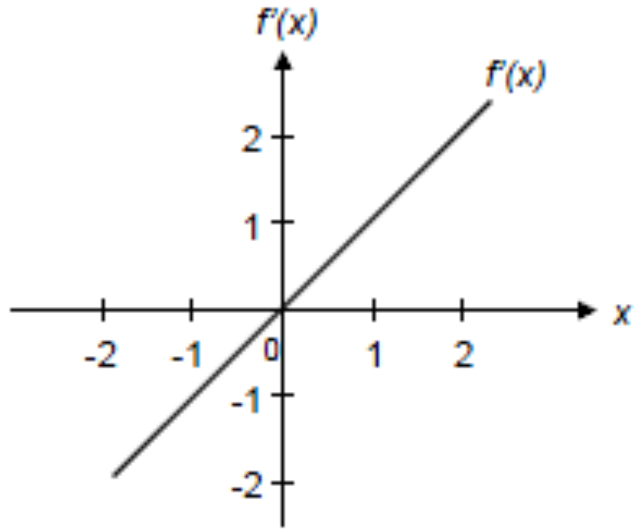


Figura 5.

Puede deducirse de lo que se ha explicado hasta el momento que al realizar el cálculo de una integral, el resultado que se obtiene es un conjunto infinito de funciones, las cuales todas tienen en común la misma derivada.

Representación de la constante de integración y significado.

Dadas las funciones siguientes de tipo lineal

Tenemos:

$$f(x) = x + 4$$

$$f(x) = x - 10$$

$$f(x) = x + 1,$$

que al derivarlas obtenías:

$$f'(x) = x$$

$$f'(x) = x$$

$$f'(x) = x$$

¿Qué pasaba con los valores 4, –10 y 1? Estos valores, que si bien valen cero en la función derivada, son de gran importancia en Cálculo Integral, si queremos obtener las funciones originales a partir de las funciones derivadas.

Para entender lo anterior, además del término *constante de integración*, pasaremos a las funciones planteadas en el Cuestionamiento guía, esto es:

$$f(x) = x^2 \qquad (1)$$

$$f(x) = x^2 + 2 \qquad (2)$$

$$f(x) = x^2 - 2 \qquad (3)$$

Analizando veremos que:

En la función (1) la constante no existe, por lo tanto, es cero.
En la función (2) la constante vale 2.
En la función (3) la constante vale – 2.

Para un mejor análisis recurramos al aspecto gráfico, esto es, hacer la gráfica de cada función (figura 6), Tabularemos la primera función y tú harás las restantes.

$$f(x) = y = x^2 \qquad y = x^2 \quad \text{o} \quad f(x) = x^2$$

Tabulación

x	$y = x^2$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Gráfica

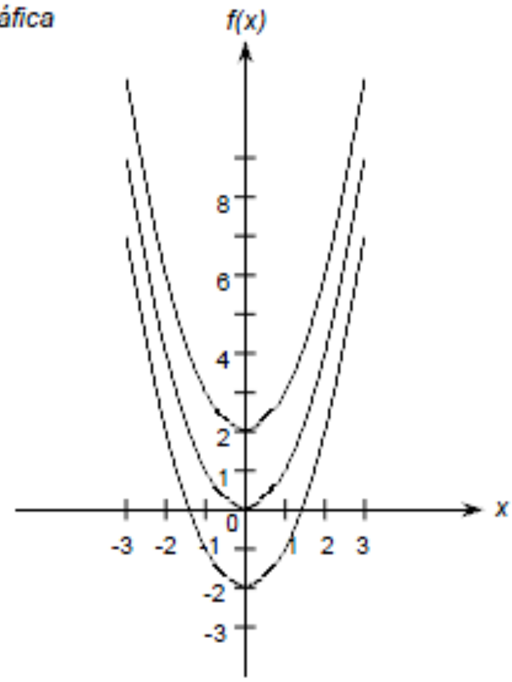


Figura 6.

Obsérvese la posición sobre los ejes x y y de cada una de las gráficas, ¿qué diferencias y similitudes hay? Para una mejor comprensión de lo que es Cálculo Diferencial e Integral hagamos lo siguiente:

Al derivar la función (1) tendremos $\frac{dx^2}{dx} = 2x$ (1')

Al derivar la función (2) tendremos $\frac{d(x^2+2)}{dx} = 2x$ (2')

Al derivar la función (3) tendremos $\frac{d(x^2-2)}{dx} = 2x$ (3')

Estas derivadas tienen la misma expresión matemática, aun cuando prevengan de diferente función; mas si recurrimos al proceso inverso, es decir, integramos la función derivada, entonces:

Se integra la función (1')

$$\int 2x dx = x^2 + C \text{, porque } \frac{dx^2}{dx} = 2x.$$

Se integra la función (2')

$$\int 2xdx = x^2 + C \text{, porque } \frac{dx^2}{dx} = 2x \text{.}$$

Se integra la función (3')

$$\int 2xdx = x^2 + C \text{, porque } \frac{dx^2}{dx} = 2x \text{.}$$

Como la integración es un proceso inverso de la derivación se infiere que al integrar las funciones (1'), (2') y (3') tendríamos las funciones (1), (2) y (3); sin embargo, en los resultados de la integración no se cumple, ¿por qué?, ¿Qué hace falta para obtener las funciones (1), (2) y (3)? Se debe agregar a la integral indefinida una constante, *C* que al calcularse podremos determinar las funciones (1), (2) y (3), respectivamente. Por lo tanto, lo correcto es escribir la integración de la siguiente forma:

$\int 2xdx = x^2 + C$,   donde c = 0

$\int 2xdx = x^2 + C$,   donde c = 2

$\int 2xdx = x^2 + C$,   donde c = −2

Se advierte que el valor de *C* es fácil inferirlo porque ya conocíamos las funciones (1), (2) y (3); sin embargo, no ocurre así en todos los casos, pues las más veces debemos indicar la constante, *C*, cuando efectuamos una integral indefinida. En otros casos se nos dan algunas condiciones iniciales de la función para determinar el valor de *C*.

Antes de determinar el valor de la constante es importante ver en forma gráfica la relación entre la integración y diferenciación. Para esto vemos el siguiente ejemplo.

De la función (1), $f(x) = x^2$ sabemos que su gráfica es una parábola cuyo vértice es el origen y concavidad hacia arriba; al obtener la derivada resulta otra función que es de primer grado (una recta). Este proceso se estudió en Cálculo Diferencial (Figura 7), pero en Cálculo Integral se tiene el proceso inverso, porque a la función derivada hay que aplicarle el proceso de integración (Figura 7b).

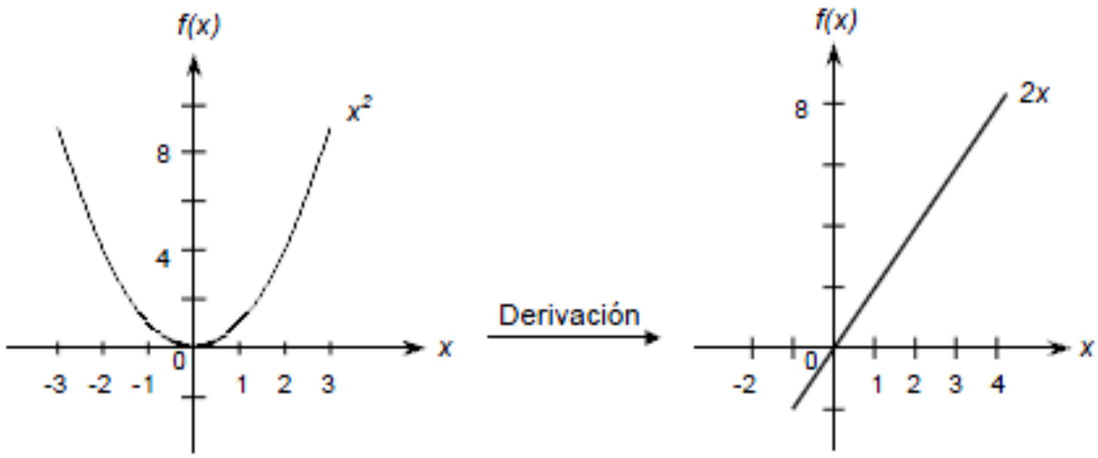
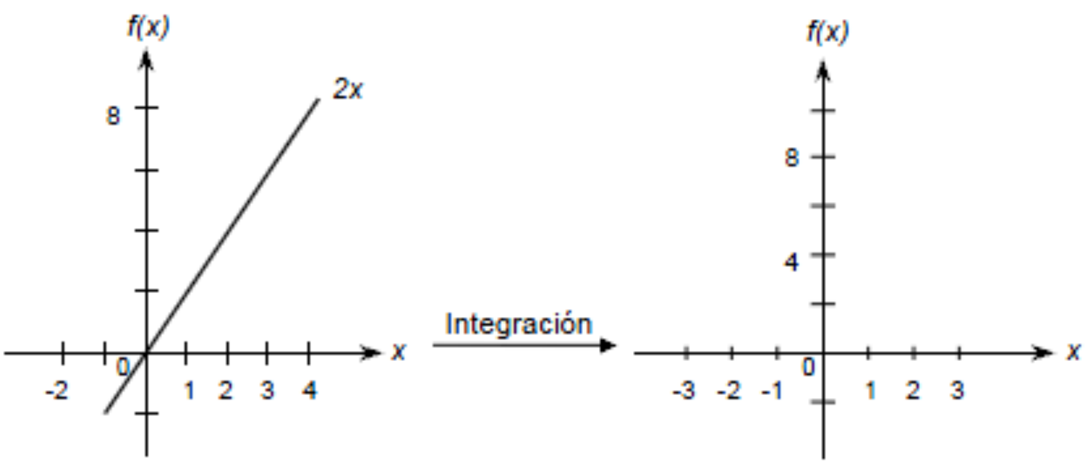


Figura 7a.



¿Puedes inferir qué gráfica obtendrás?

Figura 7b.

DETERMINACION DE LA CONSTANTE DE INTEGRACIÓN.

Se ha visto que evaluar una integral indefinida implica que hay una constante de integración C, la cual, al evaluarla, obtendremos la función original. Si retomamos las funciones $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 2$ y $f(x) = x^2 - 2$, de manera general podemos indicar que

$$y = f(x) = x^2 + C$$

representa una familia de parábolas y cada valor de C corresponde a una de ellas; por ejemplo:

$y = x^2 + 2$

$y = x^2 - 2$

$y = x^2 - 3$

$y = x^2 + C$ ó $y = x^2 - C$

$y = x^2 + 1/4$

$y = x^2 + 10$

$y = x^2 - 1/16$

Se observa que C toma diferentes valores, incluso cero, y toma la forma $y = x^2$. A continuación se indican ciertas condiciones iniciales para determinar el valor de la constante, C.

Si queremos que una de las parábolas descritas por la ecuación $y = x^2 + C$ pase por el punto $P(2,1)$, al sustituir tendremos:

$y = x^2 + C$ si $P(2,1)$ que es condición de la función
$1 = 2^2 + C$
$1 = 4 + C$
$C = 1 - 4$
$C = -3$.

Entonces se estará hablando de la parábola $y = x^2 - 3$. Veamos otro ejemplo:

Si $y = x^2 + C$ y uno de sus puntos es $P(1,3)$ tendremos:

$y = x^2 + C$
$3 = 1^2 + C$
$3 = 1 + C$
$C = 2$,

Y la parábola será $y = x^2 - 2$

SISTEMA DE UNIVERSIDAD VIRTUAL

1.6 ALGUNOS CASOS BÁSICOS DE INTEGRALES INDEFINIDAS

De la siguiente serie de funciones obtener su antiderivada o primitiva para observar y deducir su comportamiento.

1. Antiderivada de $1 = x$
2. Antiderivada de $x = \frac{x^2}{2}$
3. Antiderivada de $x^2 = \frac{x^3}{3}$
4. Antiderivada de $x^3 = \frac{x^4}{4}$
5. Antiderivada de $x^4 = \frac{x^5}{5}$

¿Puedes dar el patrón de éstas fórmulas? Hay una fórmula para una antiderivada de cualquier función de la forma x^n, que siempre es una constante multiplicada por x^{n+1}. Entonces, cuando derivamos ésta función llegamos a otra función cuyo exponente es uno menos que el de la función original. Por lo tanto, si antiderivamos una función, llegamos a una nueva función cuyo exponente es más uno que la función original. Esto nos lleva a las siguientes fórmulas:

Función	Derivada
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
.	.
.	.
.	.
x^n	nx^{n-1}

Función	Antiderivada
1	$x + C$
x	$\frac{x^2}{2} + C$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$
x^3	$\frac{x^4}{4} + C$
x^4	$\frac{x^5}{5} + C$
x^5	$\frac{x^6}{6} + C$
.	.
.	.
.	.
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

RESUMEN DE PROCEDIMIENTOS.

Si lo anterior lo indicamos con una simbología más adecuada, de hecho lo que nos pide es:

1. $\int x^4 dx$
2. $\int dx$
3. $\int \cos x \, dx$
4. $\int x dx$
5. $\int x^3 dx$
6. $\int senx \, dx$

Para resolver las integrales recuerda que debemos encontrar una función F(x) tal que:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

A fin de resolver la integral 1 podemos hacer uso de la tabla de antiderivadas, por lo tanto:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5} + C$$

Con objeto de comprobar que es correcto hacemos:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^5}{5} + C\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^5}{5}\right] + \frac{d}{dx}[C] = \frac{5x^4}{5} + 0 = x^4.$$

Entonces:

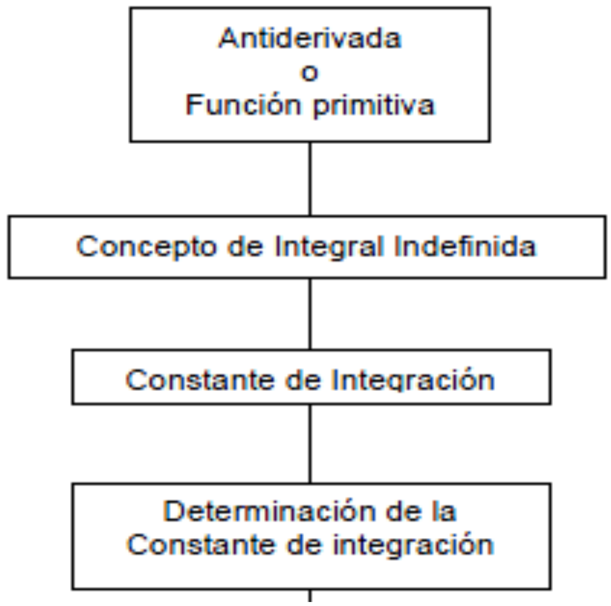
$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

La integral indefinida de la función 3 es:

$$\int \cos x \, dx = senx + C,$$

Porque

$$\frac{d}{dx}[senx + C] = \frac{d}{dx}[senx] + \frac{d}{dx}[C] = \cos x + 0 = \cos x$$



Fórmulas de integrales incompletas:

Algebraicas, exponenciales y trigonométricas

Es conveniente tener a la mano el formulario de integrales, así como también poner atención especial en los ejemplos mostrados ya que en la mayoría de ellos aparecen coeficientes que se han anexado para poder resolver el ejemplo y que son necesarios para completar la integral.

Comparados los ejemplos resueltos anteriores, estos nuevos ejercicios se conocen como ***integrales incompletas***, y las que se han descrito anteriormente se denominan integrales inmediatas ya que son completas y no es necesario anexar algún coeficiente.

Se enfatiza el hecho de que los términos que aparecen en los paréntesis de los ejercicios se denominan integrando, y es el que se debe verificar si está completo, y para ello se debe realizar la derivada y por supuesto obtener la diferencial, anexando los coeficientes que se requieran.

Hay que recordar que al ser integrales indefinidas, se anexa la constante de integración.

Formula:

$$\int (u^{n})\, du \quad = \quad \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

Para cada caso es importante el integrando "u", el exponente "n" y la diferencial "du"

Ejemplos.

1.-

$\int (6x - 2)^3\, dx$

En este caso el integrando u= 6x -2 y el exponente n= 3, luego la derivada es: du/dx = 6 por lo que la diferencial du=6dx, y observamos que la diferencial du, le falta el coeficiente 6, al agregárselo entonces la integral queda:

$\int (6x - 2)^3\ 6dx$, pero al agregar el coeficiente, se anexa en el exterior de la integral su inverso multiplicativo que es 1/6 resultando:

$1/6\int (6x - 2)^3\ 6dx$ y aplicando la formula entonces tenemos finalmente:

$1/6\ (6x-2)^4 /4\ = 1/24\ (6x-2)^4\ +c\ \ =$

$(6x-2)^4 / 24 + c$

2.-

$\int (2x+8)^{-5}\, dx$

En este caso el integrando u= 2x +8, n= - 5, luego la derivada: du/dx = 2 por lo que la diferencial du=2dx, y observamos que la diferencial du, le falta el coeficiente 2, al agregárselo entonces la integral queda:

$\int (2x+8)^{-5}\ 6dx$, pero al agregar el coeficiente, se anexa en el exterior de la integral su inverso multiplicativo para que la integral NO se altere, resultando el ejemplo a integrar:

$\frac{1}{2}\int (2x+8)^{-5}\ 2dx$ y aplicando la formula entonces tenemos finalmente:

$1/2\ (2x+8)^{-4}/-4 = -1/8\ (2x+8)^{-4} + c = -\ (2x+8)^{-4}/\ 8 + c$

Que podemos escribir con exponente positivo como:

$-1/8\ (2x+8)^{-4} + c$

En el siguiente ejemplo primero se ha de transformar la expresión a integrar a exponente:

$\int \sqrt[3]{5x-1}$ que es igual a: $\int (5x-1)^{1/3}\ dx$

Luego el integrando es: 5x -1, n = 1/3 y al derivar: du/dx=5, por lo que

du= 5 dx, de manera que hace falta el coeficiente 5, y al completar la integral quedaría:

$\int (5x-1)^{1/3}\ 5dx$, anexando asimismo el inverso multiplicativo, tenemos:

$1/5\int (5x-1)^{1/3}\ 5dx$

Finalmente al resolverla queda:

$1/5\ (3/4)\ (5x - 1)^{4/3} + C$ que al realizar las operaciones de multiplicación de fracciones se obtiene:

$3/20\ ((5x - 1)^{4/3} + c$

Formula de la exponencial:

$$\int (e^{u})\ du \quad = \quad e^{u} + c$$

Ejemplo: $\int (e^{x})\ dx \quad = \quad e^{x} + c$

En este caso u=x, luego Du/dx =1, y du=dx por lo que está completa y no es necesario anexar coeficientes.

Ejemplo: $\int (e^{2x})\ dx \quad = \quad 1/2 \int 2(e^{2x})\ dx \quad = ½\ e^{2x} + c$

En este caso u=2x, luego su derivada es Du/dx =2, y la diferencial du=2dx por lo que es necesario agregar un 2, el cual para no alterar la integral se anexa como coeficiente fuera de esta misma pero como su inverso multiplicativo (1/2)

Ejemplo:

$\int (e^{4x})\,dx \quad = \quad 1/4\int 2(e^{4x})\,dx \quad = 1/4\ e^{4x}\ +c$

En este caso u=4x, luego du/dx =4, y du=4dx por lo que fue necesario agregar un 4, el cual para no alterar la integral se anexa fuera de esta misma pero por su inverso multiplicativo (1/4)

Ejemplo

$\int (e^{-3x})\,dx \quad = \quad -1/3 \int -3(e^{-3x})\,dx \quad = -1/3\ e^{-3x}\ +c$

En este caso u= -3x, luego du/dx =-3, y du= - 3dx por lo que fue necesario agregar un -3, el cual para no alterar la integral se anexa fuera de esta misma pero por su inverso multiplicativo (-1/3)

Ejemplo.

$\int (e^{1/5x})\,dx \quad = \quad 5 \int 1/5(e^{1/5x})\,dx \quad = 5\ e^{1/5x}\ +c$

En este caso u=1/5x, luego Du/dx =1/5, y du= 1/5dx por lo que fue necesario agregar un 1/5, el cual para no alterar la integral se anexa fuera de esta misma pero por su inverso multiplicativo (5)

INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

A continuación se describen los procedimientos para cálculos de integrales trigonométricas.

Primera fórmula:

$\int$ Sen (u) dx = - cos (u)+c

Ejemplo:

$\int$ Sen (x) dx = - cos (x)+c

En este caso u=x, luego du/dx =1, y du= dx por lo que no es necesario agregar algún número, por lo que al ser completa solo se aplica la formula directamente

Ejemplo: $\int$ Sen (3x) dx

=$\int$ Sen (3x) (3dx) = 1/3$\int$ sen (3x) (3 dx) =

- 1/3 Cos 3x +C

En este caso u=3x, luego du/dx =3, y du= 3dx por lo que es necesario agregar un 3, el cual para no alterar la integral se anexa fuera de esta misma pero por su inverso multiplicativo (1/3)

Ejemplo $\int$ Sen (2x) dx

$= \int$ Sen (2x) (2dx)

$= 1/2 \int$ sen (2x) (2 dx) =

- 1/2 Cos 2x +C

En este caso u=2x, luego du/dx =2, y du= 2dx por lo que es necesario agregar un 2, el cual para no alterar la integral se anexa fuera de esta misma pero por su inverso multiplicativo (1/2)

Ejemplo.

$\int$ Sen (1/4x) dx

$= \int$ Sen (1/4x) (1/4dx)

$= 4 \int$ sen (1/4x) (1/4 dx) =

- 4 Cos 1/4x +C

En este caso u=1/4x, luego du/dx =1/4, y du= 1/4dx por lo que ha sido necesario agregar un 1/4, el cual para no alterar la integral se ha anexado fuera de esta misma pero por su inverso multiplicativo (4)

REFERENCIAS.

Ayres F. (2010). Calculo diferencial e integral. Ed. Mc Graw Hill. México D.F.

Lectura

Colaborador: Ing. Juan Adolfo Álvarez Martínez
Nombre de la Asignatura: Cálculo Diferencial e integral
Programa educativo: Bachillerato Virtual