Modelos matemáticos básicos y su conocimiento

Cónicas

LSC. Cynthia C. Vital Martínez

Abstracto:

El objetivo del tema es interpretar el comportamiento lineal y parabólico en forma gráfica y numérica para aplicarlos en diversos fenómenos.

Los lugares geométricos como por ejemplo son: la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola son figuras que se originan al hacer ciertos cortes al cono.

Estos lugares geométricos tienen la misma ecuación general, para diferenciarlas solo hay que observar sus coeficientes y sus exponentes. Con la fórmula del discriminante podemos saber de qué cónica se trata.

Palabras clave :

cónica, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola.

PREPA TRES

Abstract:

The objective of the subject is to interpret the linear and parabolic behavior in graphical and numerical form in order to apply them to various phenomena.

The geometric places such as: the circumference, parabola, ellipse and hyperbola are figures that originate when making certain cuts to the cone.

These geometric places have the same general equation, to differentiate them we only have to observe their coefficients and exponents. With the formula of the discriminant we can know which conic it is.

Key words :

conic, circle, parabola, ellipse and hyperbola

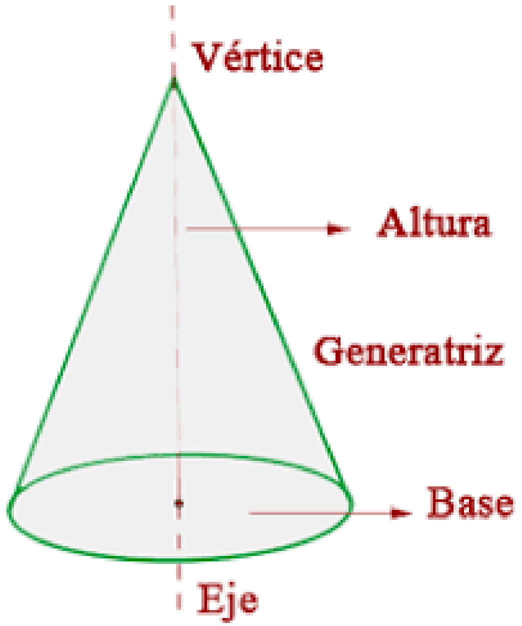
PREPA TRES

Cónica

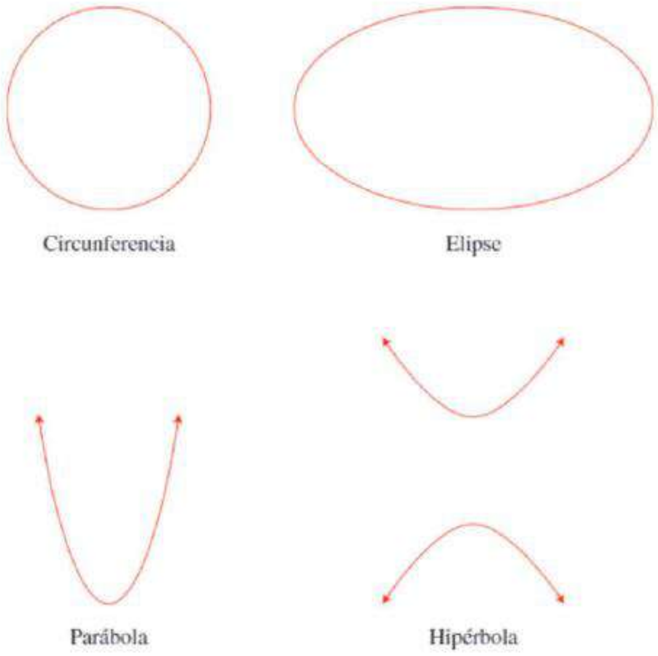
Se llama **cónica** (o sección cónica) a las curvas resultantes de la intersección del cono y un plano.

Este plano no debe pasar por el vértice (V).

Existen cuatro tipos de cónicas, según el ángulo del plano, existe intersección con el cono y su base:



Lugar geométrico
Secciones de un cono



La base del cono es la región delimitada por su directriz.

La generatriz es la recta que genera a la superficie cónica cuando recorre la curva llamada directriz, manteniéndose fija el vértice.

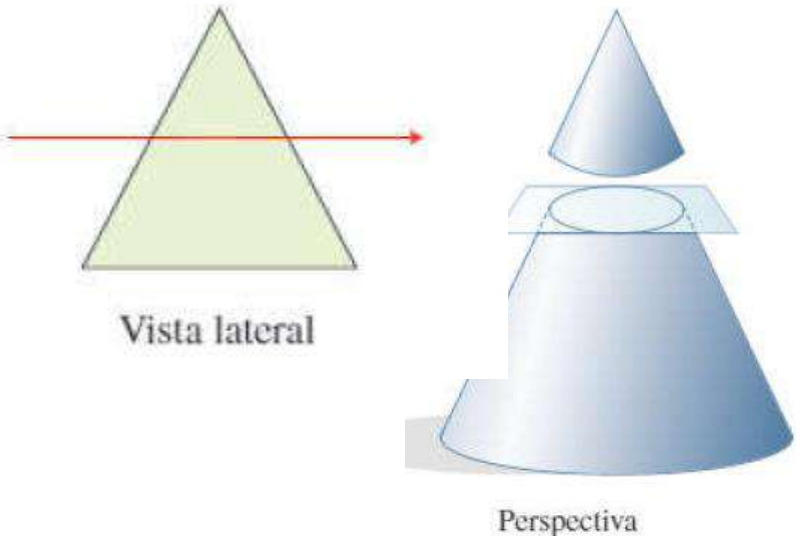
Si un plano secciona a un cono circular, la curva de intersección es una cónica por ejemplo :

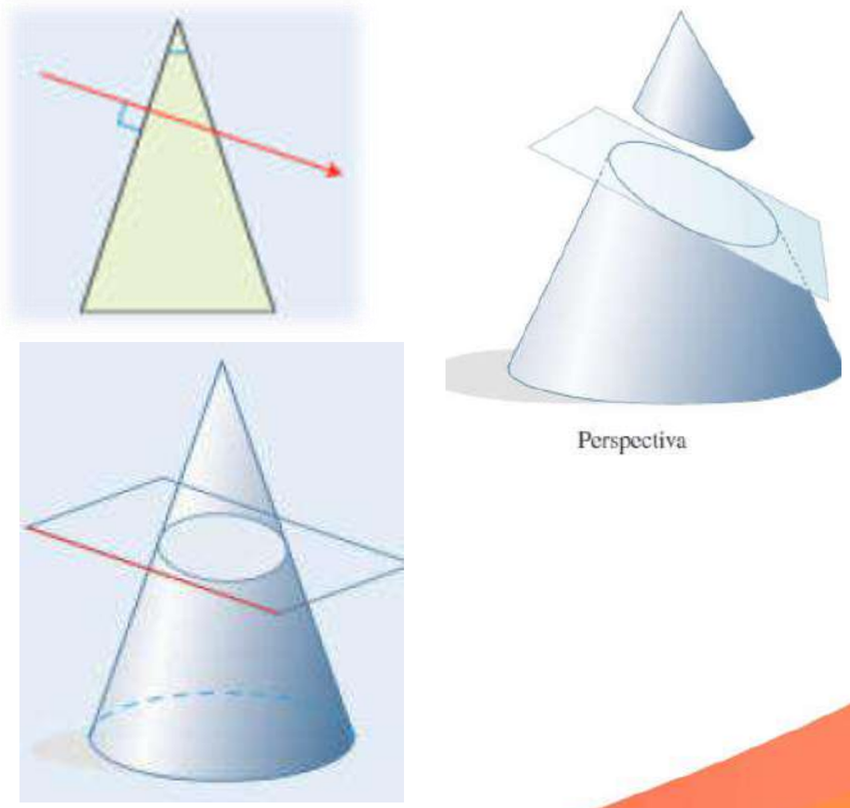
PREPA TRES

Lugar geométrico

El plano de corte es paralelo a la base : *circunferencia*

El plano de corte es paralelo a la base: *elipse*

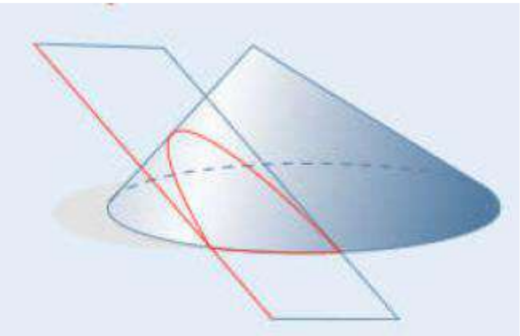


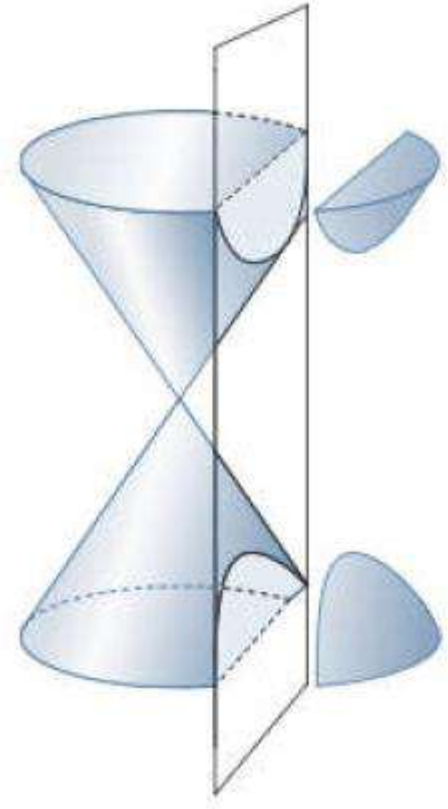


PREPA TRES

Lugar geométrico

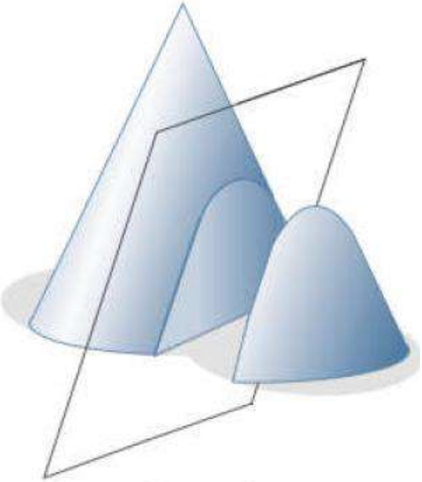
El plano de corte es oblicuo a la base: *hipérbola*





Perspectiva

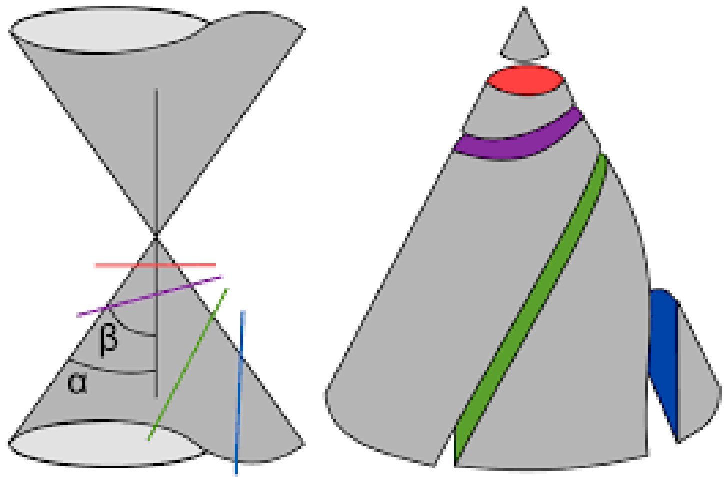
El plano de corte es oblicuo a la base: *parábola*



Perspectiva

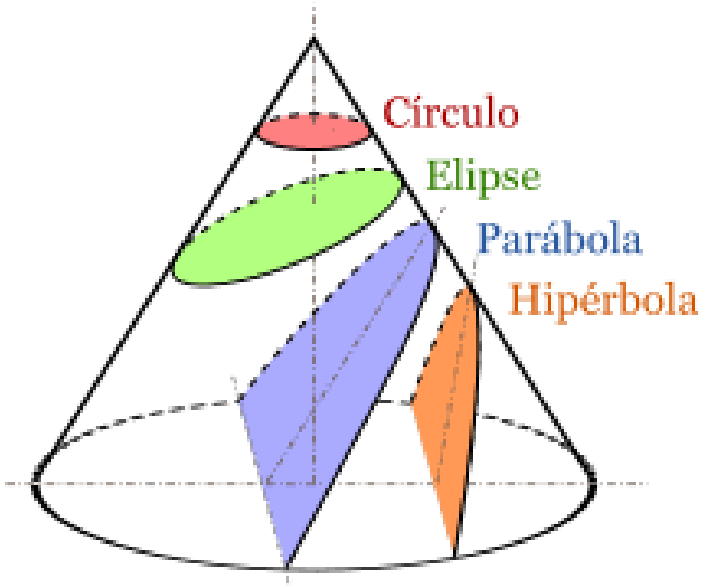
PREPA TRES

Secciones cónicas



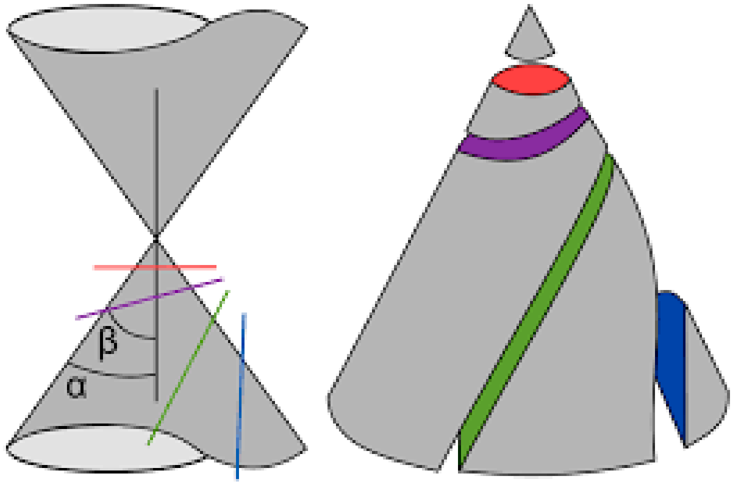
Circunferencia: es la intersección del cono con un plano paralelo a la base.

Elipse: intersección del cono con un plano oblicuo a la base y que no la corta en ningún momento



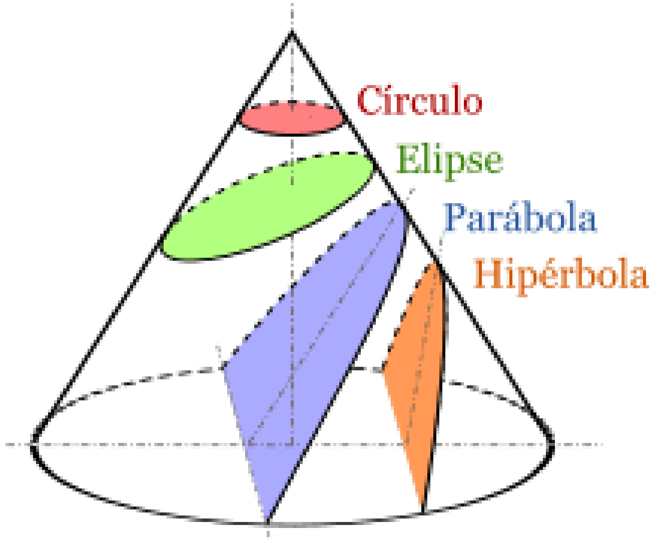
PREPA TRES

Secciones cónicas



Parábola: Es la intersección del cono con un plano paralelo a su generatriz y que corta a la base.

Hipérbola: Es la intersección de un cono recto y un plano cuyo ángulo es menor al de la generatriz del cono.



Lugar geométrico

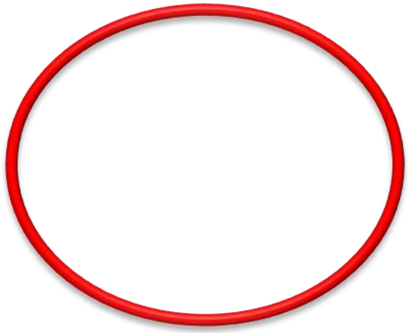
ECUACIÓN

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

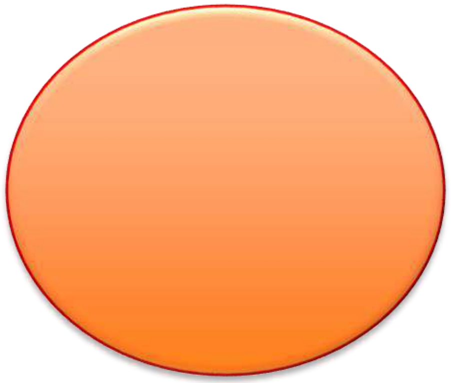
LUGAR GEOMÉTRICO	COEFICIENTE	DISCRIMINANTE
CIRCUNFERENCIA	A = B, y positivos	
PARABOLA	A = 0 ó B = 0	B^2-4AC=0
ELIPSE	A ≠ B y positivos	B^2-4AC<0 (negativo)
HIPERBOLA	A = B ó A ≠ B y de signo contrario	B^2-4AC>0 (positivo)

Circunferencia

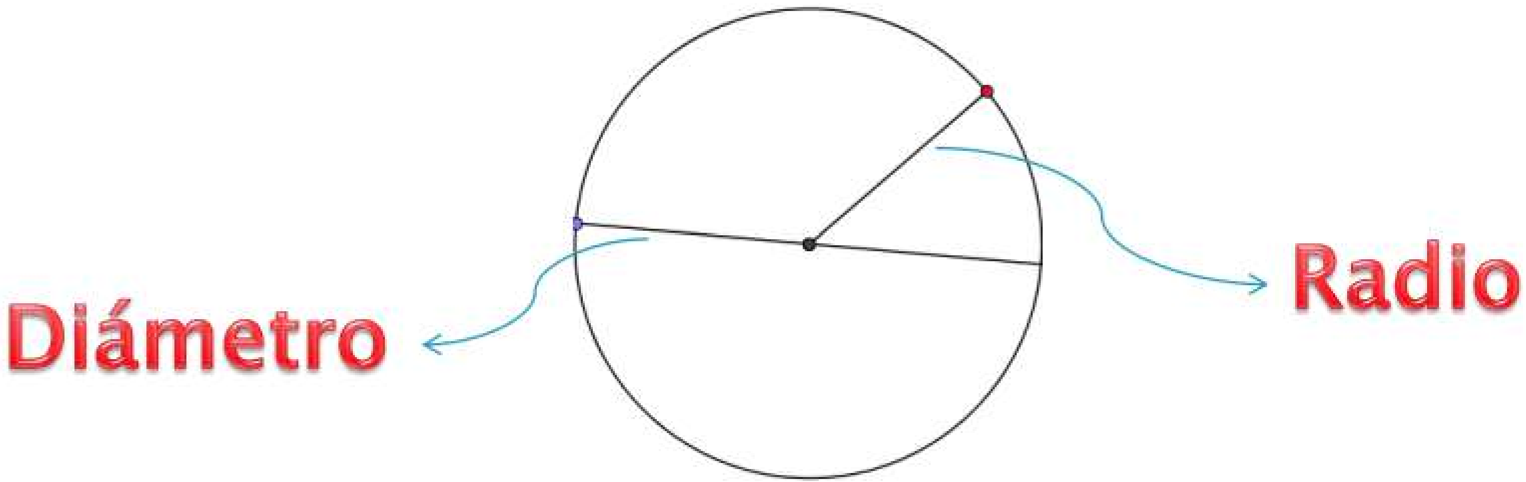
Circunferencia: conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto llamado centro



Circulo: conjunto de puntos interiores a la circunferencia



Circunferencia



Radio: segmento de un punto cualquiera de la circunferencia al centro

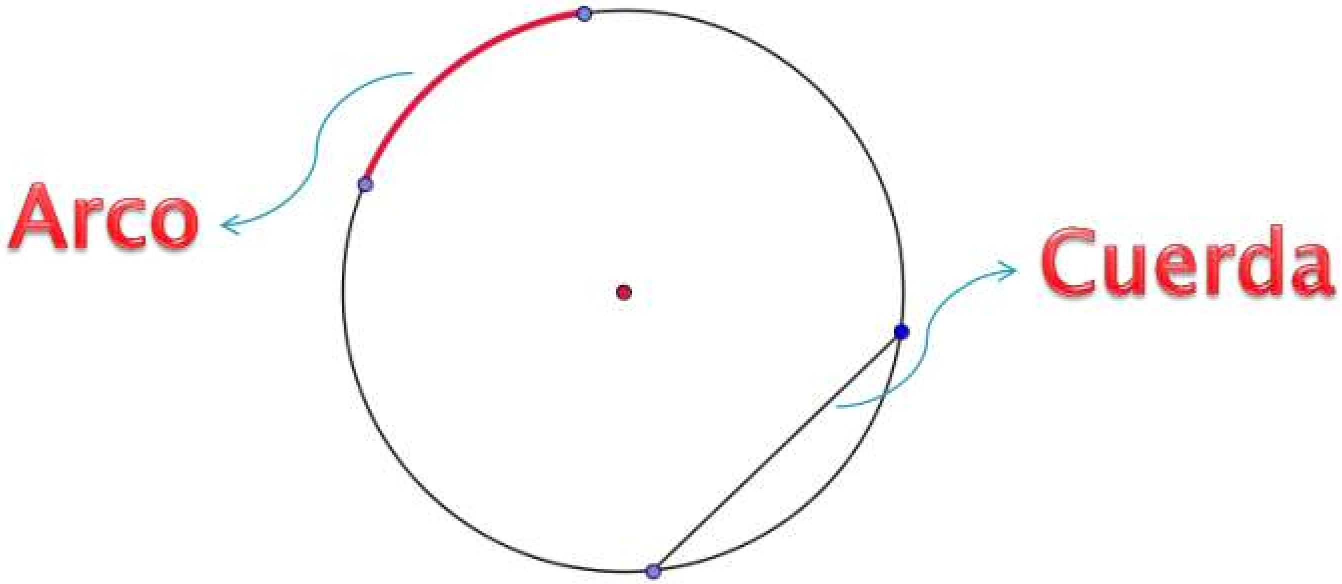
Diámetro: segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro

PREPA TRES

Circunferencia

Cuerda: segmento determinado por dos puntos de la circunferencia

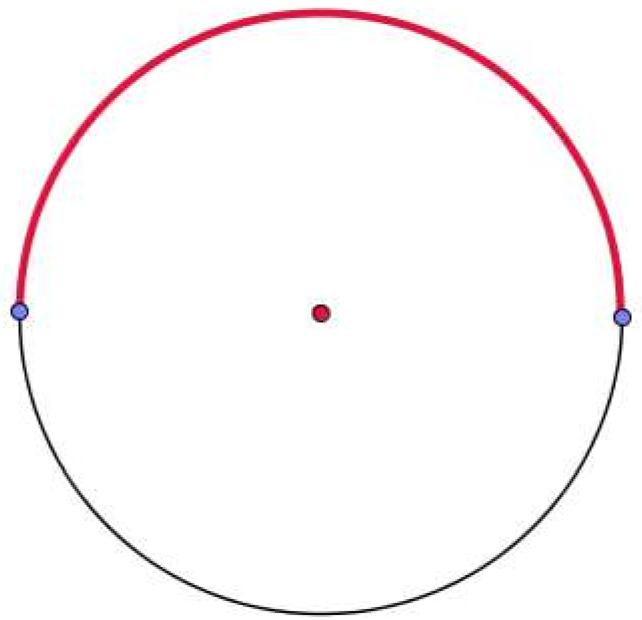
Arco: es una porción de la circunferencia



PREPA TRES

Circunferencia

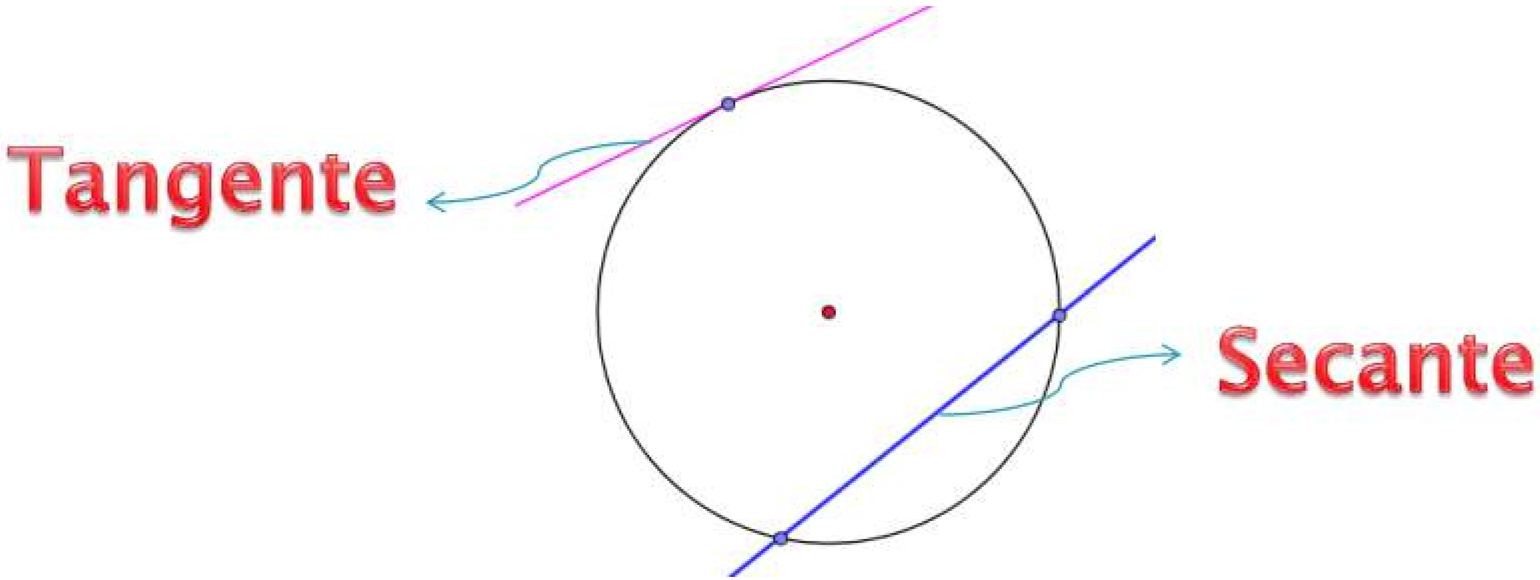
Semicircunferencia: arco igual a la mitad de la circunferencia



Circunferencia

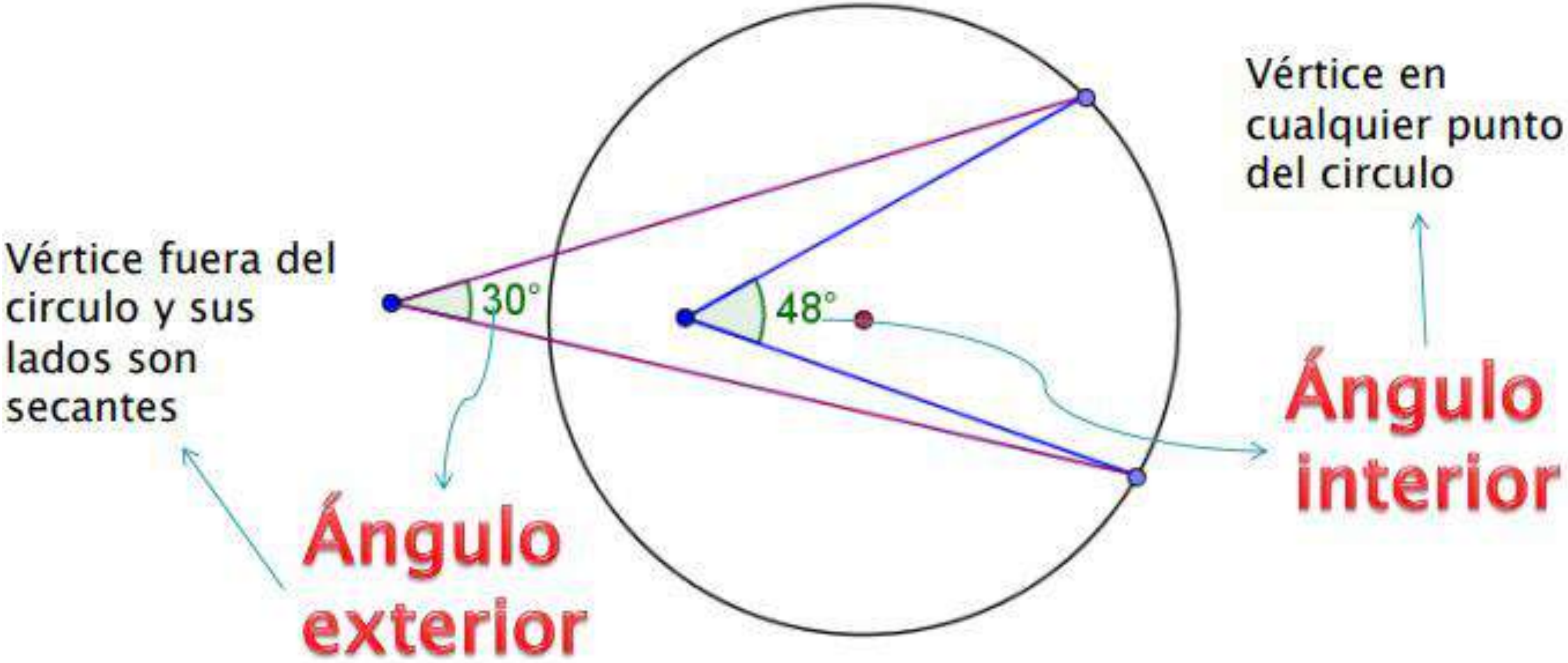
Tangente: recta que toca solo un punto de la circunferencia.

Secante: recta que corta a la circunferencia en dos puntos.



PREPA TRES

Circunferencia



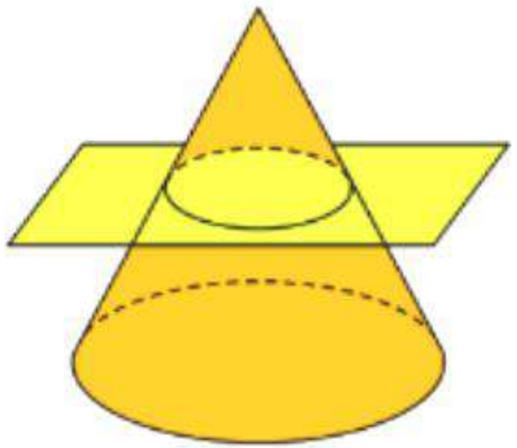
Circunferencia

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. La superficie plana comprendida dentro de una circunferencia es el círculo

Cuando A=C la ecuación $\mathbf{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$, representa de manera general una circunferencia.

Secciones cónicas

Circunferencia: Esta se obtiene al intersecar un plano paralelo a ala base de un cono, se define como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otro, al que se le conoce como el centro de la circunferencia.

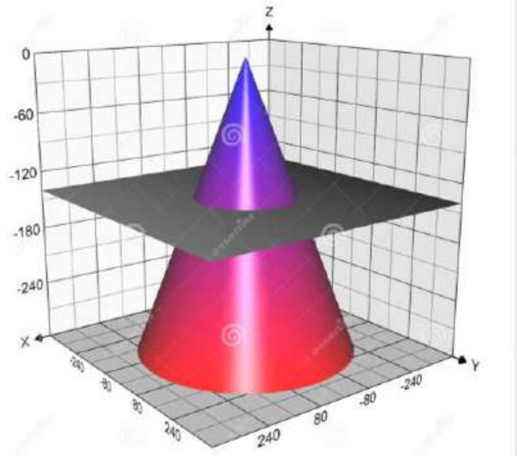


Ecuación :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Secciones cónicas

La circunferencia cuyo centro es el punto (h,k) y cuyo radio es la constante r.

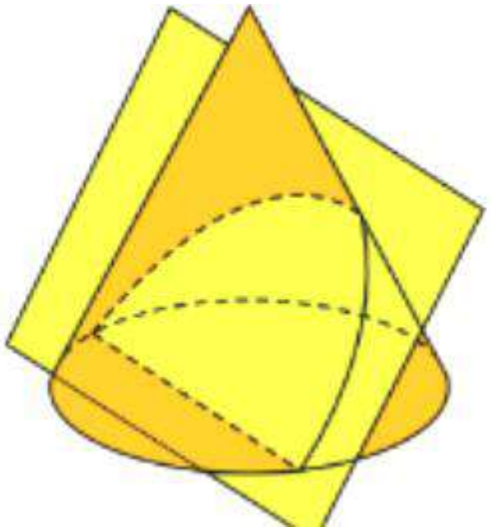


Ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Parábola

Esta se obtiene al intersecar un plano que es paralelo a la generatriz de un cono (una recta que divide un ángulo en dos ángulos de misma apertura) y se le conoce como el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto llamado foto, y de una recta llamada directriz.



Parábola

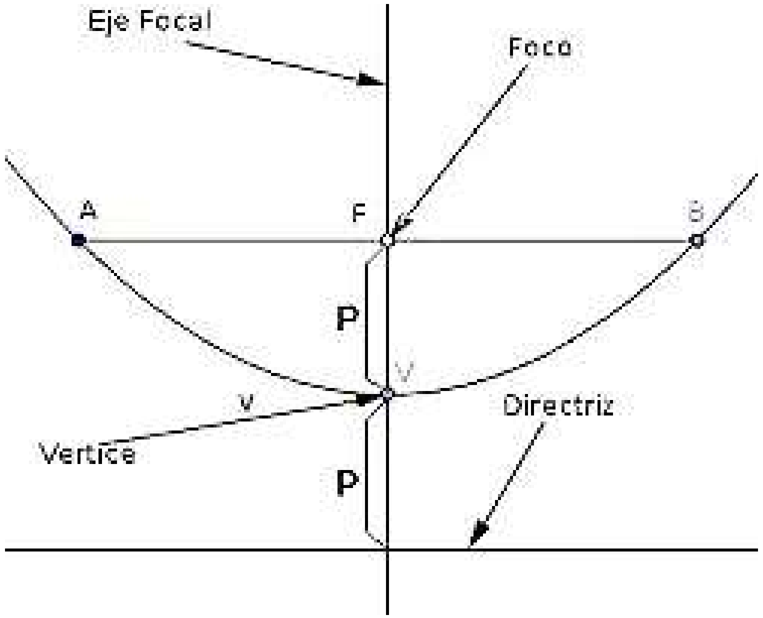
Una parábola es una cónica. Se denomina sección cónica a la curva intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice

Donde :

p: parámetro

Vértice : V(h,k).

p: se suma a *k* cuando abre hacia arriba, y se resta cuando abre hacia abajo. Posición vertical.



Elementos de la parábola:

Foco: Es el punto fijo F.

Directriz: Es la recta fija D.

Parámetro: Es la distancia del foco a la directriz, se designa por la letra p.

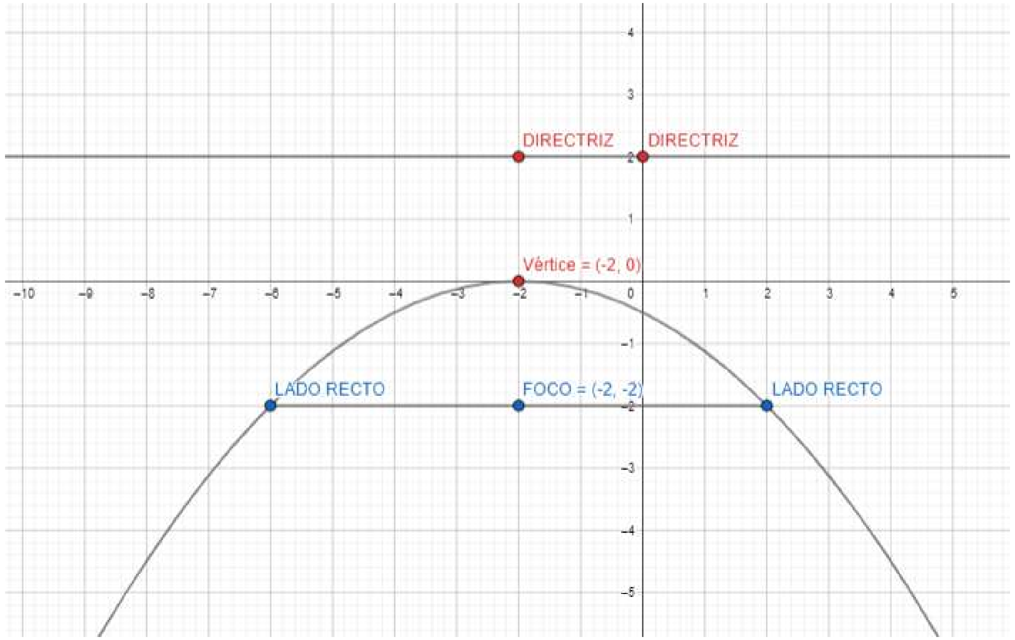
Eje: Es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Vértice: Es el punto de intersección de la parábola con su eje.

Lado recto: Es un segmento que une un punto cualquiera de la parábola con el foco (4p).

PREPA TRES

Secciones cónicas



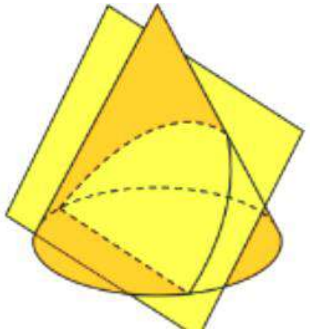
Parábola: Si la parábola es vertical entonces el vértice es (h,k);

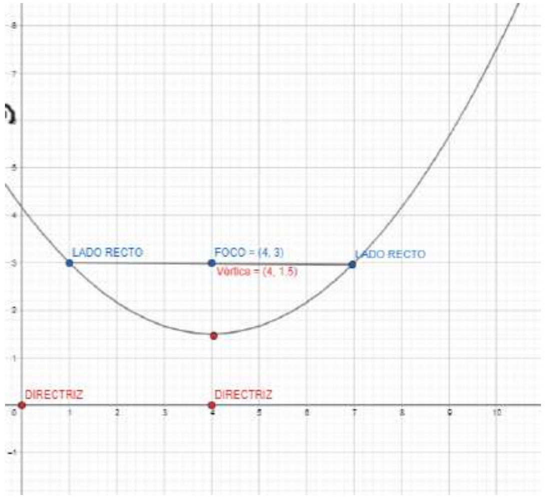
p< 0 cóncava hacia abajo;

p>0 cóncava hacia arriba

Ecuación:

$$(x-h)^2 = \pm 4p(y-k)$$





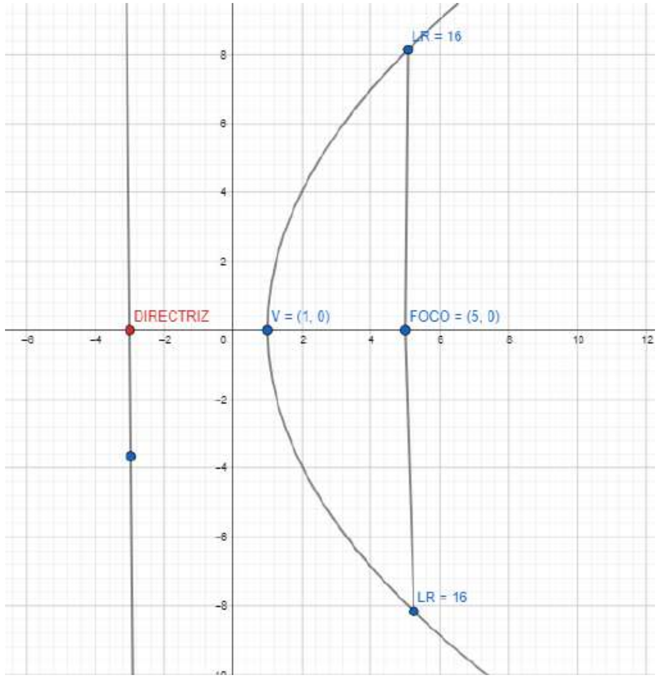
PREPA TRES

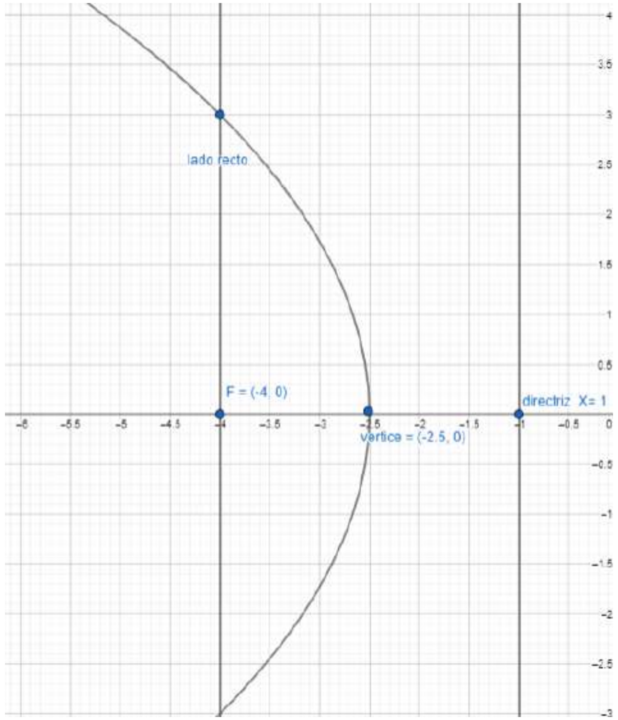
Secciones cónicas

Parábola: Si la parábola es horizontal y su vértice es el punto (h,k), se tiene que:

Si p> 0 la parábola abre hacia la izquierda

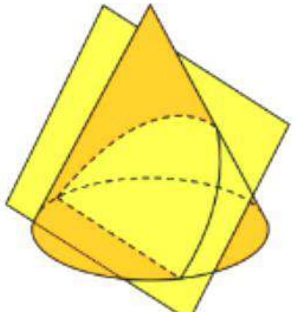
Si p>0 cóncava hacia la derecha



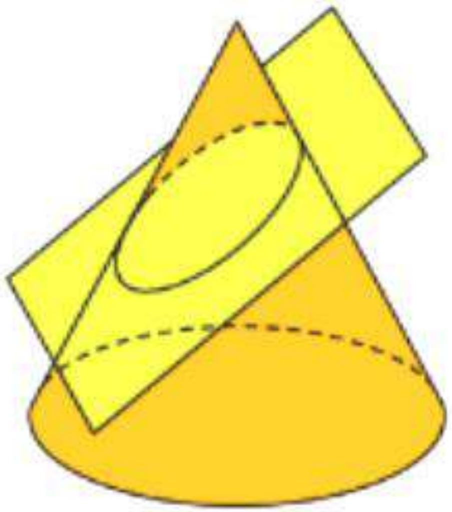


Ecuación:

$$(y-k)^2 = \pm 4p(x-h)$$



Secciones cónicas



Elipse: Esta se obtiene al intersecar un plano con un cono, con la condición de que el plano es oblicuo tanto a la base, como a la generatriz del cono :

Secciones cónicas

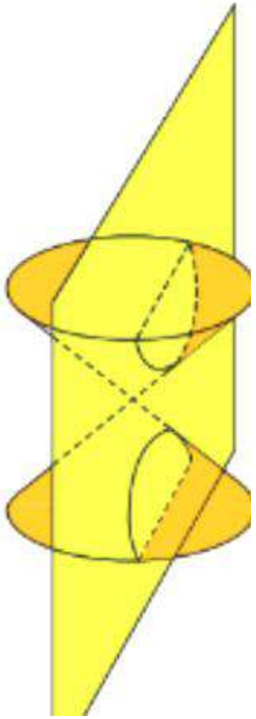
Elipse: Se define como el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos dentro de la elipse, y que se conocen como focos, es constante.

Ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Secciones cónicas

Hipérbola: Se obtiene al intersecar un plano paralelo al eje de simetría de dos conos. Es un lugar geométrico de todos los puntos cuya resta de distancias a dos puntos de la hipérbola, focos.



Ecuación general de cónicas

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0}$$

Esta ecuación se aplica para todas cónicas mencionadas.

Para determinar a qué cónica corresponde una ecuación se aplica lo siguiente:

1.- A =B , La ecuación corresponde a una circunferencia como por ejemplo :

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 6\,y + 6 \ = 0}$$

2.- A o B son iguales a cero, entonces la ecuación corresponde a una parábola por ejemplo :

$$\boldsymbol{y^2 - 8x - 4\,y + 12 \ = 0}$$

PREPA TRES

Ecuación general de cónicas

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Para determinar a qué cónica corresponde una ecuación se aplica lo siguiente:

3.- A ≠ B y los términos a que corresponden son de signo igual, por lo tanto es de un elipse:

$$\mathbf{5x^2 + 9y^2 - 30x - 54y + 81 = 0}$$

4.- A ≠ B y los términos a que corresponden son de signo opuesto, por lo tanto es una hipérbola,

$$\mathbf{-3x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0}$$

PREPA TRES

Ecuación general de cónicas

Ejemplo Determina a qué tipo de cónica corresponde a la ecuación:

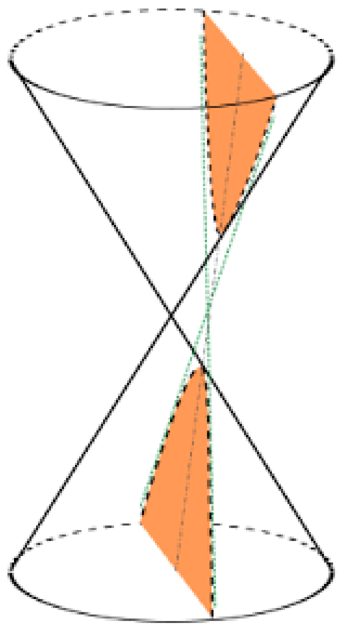
$$x^2 - 8\,y^2 \; - 2x + 40y - 47 = 0$$

Observar los términos cuadráticos, corresponden A, igual o diferente a B.

- El coeficiente de primer termino x^2 **es 1.**
- El coeficiente de segundo termino y^2 **es -8.**
- Los coeficientes son: diferentes
- Signos contrarios
- Ecuación cónica de: ***HIPÈRBOLA***

Ecuación general de cónicas

Ejemplo Determina a qué tipo de cónica corresponde a la ecuación:



$$\boldsymbol{x^2 - 8\,y^2 - 2x + 40y - 47 = 0}$$

Ecuación cónica de: ***HIPÈRBOLA***

PREPA TRES

Ecuación general de cónicas

Ejercicio: Determina a qué tipo de cónica corresponde a la ecuación:

$$\boldsymbol{x^2 - 2\,x + \ 4y + 13 \ = 0}$$

Observar los términos cuadráticos, corresponden A, igual o diferente a B.

- El coeficiente de primer termino:
- El coeficiente de segundo termino:
- Los coeficientes son:
- Signos:
- Ecuación cónica de;

PREPA TRES

Ecuación general de cónicas

Ejercicio: Determina a qué tipo de cónica corresponde a la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$$

Observar los términos cuadráticos, corresponden A, igual o diferente a B.

- El coeficiente de primer termino :
- El coeficiente de segundo termino :
- Los coeficientes son :
- Signos :
- Ecuación cónica de :

PREPA TRES

Ecuación general de cónicas

Ejercicios: Identifica a que cónica pertenece, y grafica las ecuaciones en GeoGebra.

- A) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 19 = 0$
- B) $y^2 + 2x - 10y + 20 = 0$
- C) $7x^2 + 16y^2 - 56x - 96y + 144 = 0$
- E) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$
- F) $x^2 - 6x + 12y - 15 = 0$
- H) $y^2 - 24x^2 + 24x - 10y + 25 = 0$

PREPA TRES

Referencias

Jiménez, René (2011) Matemáticas III Geometría Analítica. México D.F. Prentice hall/Pearson.

Ruiz, B. Joaquín (2014) Geometría Analítica. México D.F. Grupo Editorial Patria S.A. de C.V.

D.C. Baird. (1991).Experimentación: una introducción a la teoría de mediciones y diseño de experimentos. México: Pearson

PREPA TRES