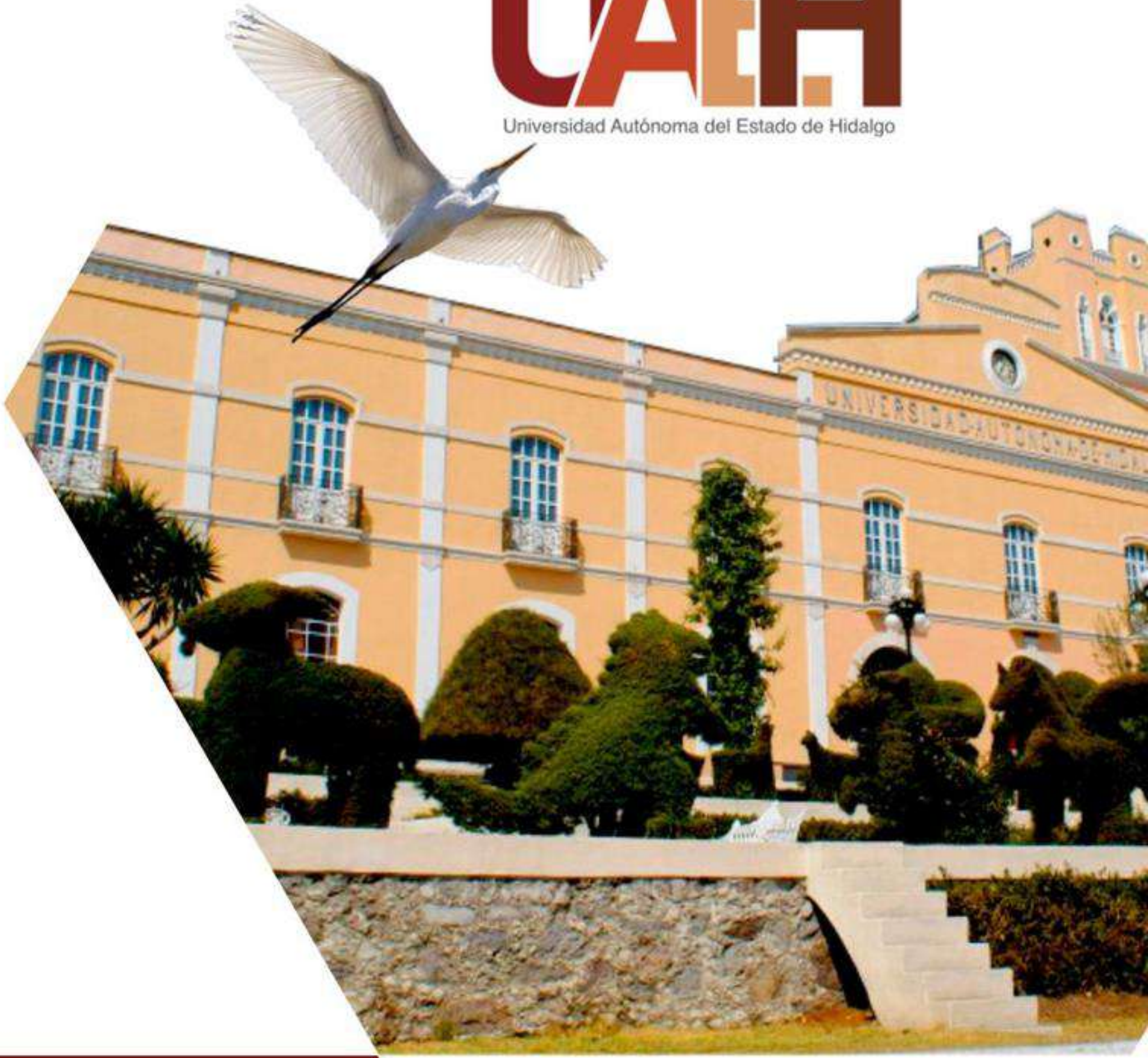
La Matemática de la Suma

Quinto

Julio 2022



UAEH
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Bloque 2

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

M.C.C.C. Olivia Vázquez Bautista

Escuela Preparatoria Número Tres

Objetivo del bloque

Desarrollar habilidades lógicas y matemáticas que permitan distinguir la estrategia adecuada para obtener antiderivadas mediante el análisis de diferentes técnicas

Aprendizaje esperado

Utiliza la sustitución trigonométrica para transformar integrales algebraicas en trigonométricas simples o inmediatas.

Competencias a desarrollar

Creatividad:

- ✓ 5.3 Identifica los sistemas y reglas o principios medulares que subyacen a una serie de fenómenos.
- ✓ 5.4 Construye hipótesis y diseña y aplica modelos para probar su validez.

Pensamiento crítico:

- ✓ 6.3 Reconoce los propios prejuicios, modifica sus puntos de vista al conocer nuevas evidencias, e integra nuevos conocimientos y perspectivas al acervo con el que cuenta.
- ✓ 6.4 Estructura ideas y argumentos de manera clara, coherente y sintética.

UAEH®
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Resumen

En esta unidad se han visto diferentes técnicas de integración, cuyo objetivo es reducir la integral buscada en una integral inmediata o más sencilla.

En este tema vamos a seguir profundizando en las técnicas de integración específicamente en la técnica de sustitución trigonométrica, la cual va a permitir transformar integrales algebraicas en trigonométricas simples o inmediatas, mediante el uso de razones trigonométricas e identidades trigonométricas.

Esta técnica consta de tres casos $\sqrt{a^2-u^2}, \sqrt{u^2+a^2}\ y\ \sqrt{u^2-a^2}$; y cada caso incluye su respectiva transformación en razones trigonométricas, así como su respectivo triángulo rectángulo.

Palabras clave

Sustitución trigonométrica, razones trigonométricas, seno, coseno, tangente, cosecante, secante, triangulo rectángulo.

Abstract

In this unit we have seen different integration techniques, whose objective is to reduce the integral sought in an immediate or simpler integral.

In this topic we are going to continue delving into integration techniques, specifically in the technique of trigonometric substitution, which will allow us to transform algebraic integrals into simple or immediate trigonometric ones, through the use of trigonometric ratios and trigonometric identities.

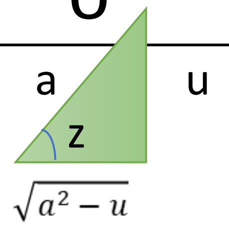
This technique consists of three cases $\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{u^2 + a^2}\ y\ \sqrt{u^2 - a^2}$); and each case includes its respective transformation in trigonometric ratios, as well as its respective right triangle.

keywords

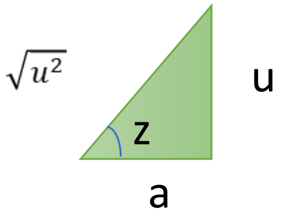
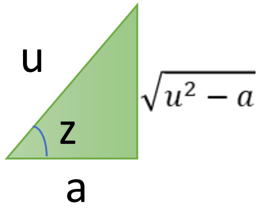
Trigonometric substitution, trigonometric ratios, sine, cosine, tangent, cosecant, secant, right triangle.

Integración por sustitución trigonométrica

Se utiliza para resolver algunas integrales que contienen expresiones de la siguiente forma $\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{u^2 + a^2}\ y\ \sqrt{u^2 - a^2}$; mediante las siguientes transformaciones: [1]

Caso	Cambio	Diferencial	Transformación	Triángulo
				

Integración por sustitución trigonométrica

Caso	Cambio	Diferencial	Transformación	Triángulo
				
				

Integración por sustitución trigonométrica

Ejemplo:

Resuelve la siguiente integral

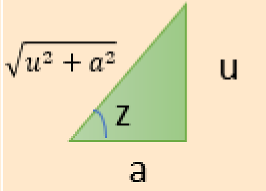
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

Como se puede observar en la integral la expresión con raíz se encuentra en la parte del denominador y corresponde al caso 2.

Integración por sustitución trigonométrica

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

Caso	Cambio	Diferencial	Transformación	Triángulo
$\sqrt{u^2+a^2}$	$u = a\tan z$	$du = a\sec^2 z\,dz$	$\sqrt{u^2+a^2} = a\sec z$	

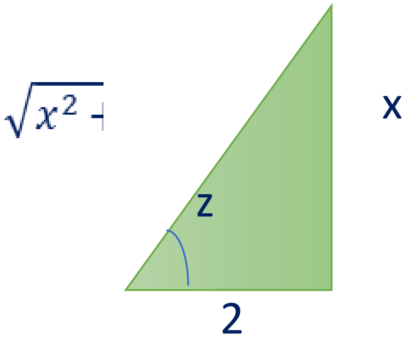
$$u^2 = x^2 \qquad a^2 = 4$$

$$u = x \qquad a = 2$$

$$x = 2\tan z$$

$$dx = 2\sec^2 z\,dz$$

$$\sqrt{x^2+4} = 2\sec z$$



Integración por sustitución trigonométrica

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

Ahora se procede a realizar la sustitución en la integral, y a buscar su solución

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2\sec^2 z\, dz}{2\tan z \cdot 2\sec z}$$

$$= \int \frac{\cancel{2\sec z}\,\sec z\, dz}{2\tan z \cdot \cancel{2\sec z}} = \int \frac{\sec z\, dz}{2\tan z}$$

Integración por sustitución trigonométrica

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sec z\, dz}{\tan z}$$

Aplicar identidades trigonométricas

$\sec a = \dfrac{1}{\cos a}$

$\tan a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

$$= \frac{1}{2}\int \left[\frac{\frac{1}{\cos z}}{\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}}\right] dz = \frac{1}{2}\int \frac{\cancel{\cos z}}{\cancel{\cos z}\cdot \operatorname{sen} z}\, dz = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\operatorname{sen} z}$$

Aplicar identidad

$\csc a = \dfrac{1}{\operatorname{sen} a}$

Integración por sustitución trigonométrica

Ejemplo:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$$

$$= \frac{1}{2}\int csc\ z\ dz = \frac{1}{2}(ln\,|\,csc\ z - cot\ z\,|)$$

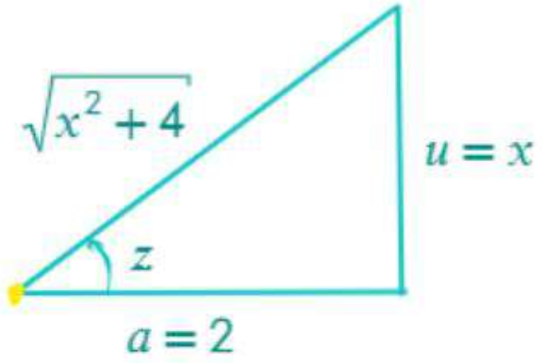
Se aplica la fórmula

$$\int csc\ u\ du = ln\,|\,csc\ u - cot\ u\,| + c$$

Se procede a realizar la transformación en base al triángulo rectángulo

Integración por sustitución trigonométrica

Ejemplo: $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$



$$\csc z = \frac{h}{co} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} \qquad \cot z = \frac{ca}{co} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{2}(\ln|\csc z - \cot z|) = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{x} - \frac{2}{x}\right|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + c$$

Conclusión

La sustitución trigonométrica es una técnica de integración muy útil para poder solucionar integrales que contienen expresiones como: $\sqrt{a^2 - u^2}, \sqrt{u^2 + a^2}\ y\ \sqrt{u^2 - a^2};$ y de las cuales no nos es posible utilizar alguna fórmula directa u otra técnica de integración para poder solucionarla de una manera simple.

Lo primordial en esta técnica es identificar a cual de los tres casos se parece nuestra expresión para posteriormente realizar las transformaciones conforme a nuestra tabla y poder continuar con la sustitución trigonométrica, resolver la integral en términos de z y el resultado transformarlo con el triángulo rectángulo para regresar a los términos originales de la integral .

Referencias

[1] Márquez, A. A., & Colegio Nacional de Matemáticas. (2010). *Cálculo integral*. Pearson educación.

[2] Piskunov, N., & Medkov, K. (1977). *Cálculo diferencial e integral* (Vol. 1). Mir.

[3] Palacios Segura, E. (2013). *Cálculo Integral, Técnicas de integración y aplicaciones.*

[4] Purcell, E. J., Rigdon, S. E., & Varberg, D. E. (2007). *Cálculo*. Pearson Educación.

I ❤ UAEH

GRACIAS POR TU ATENCI ÓN

HOLA

soy GARZA