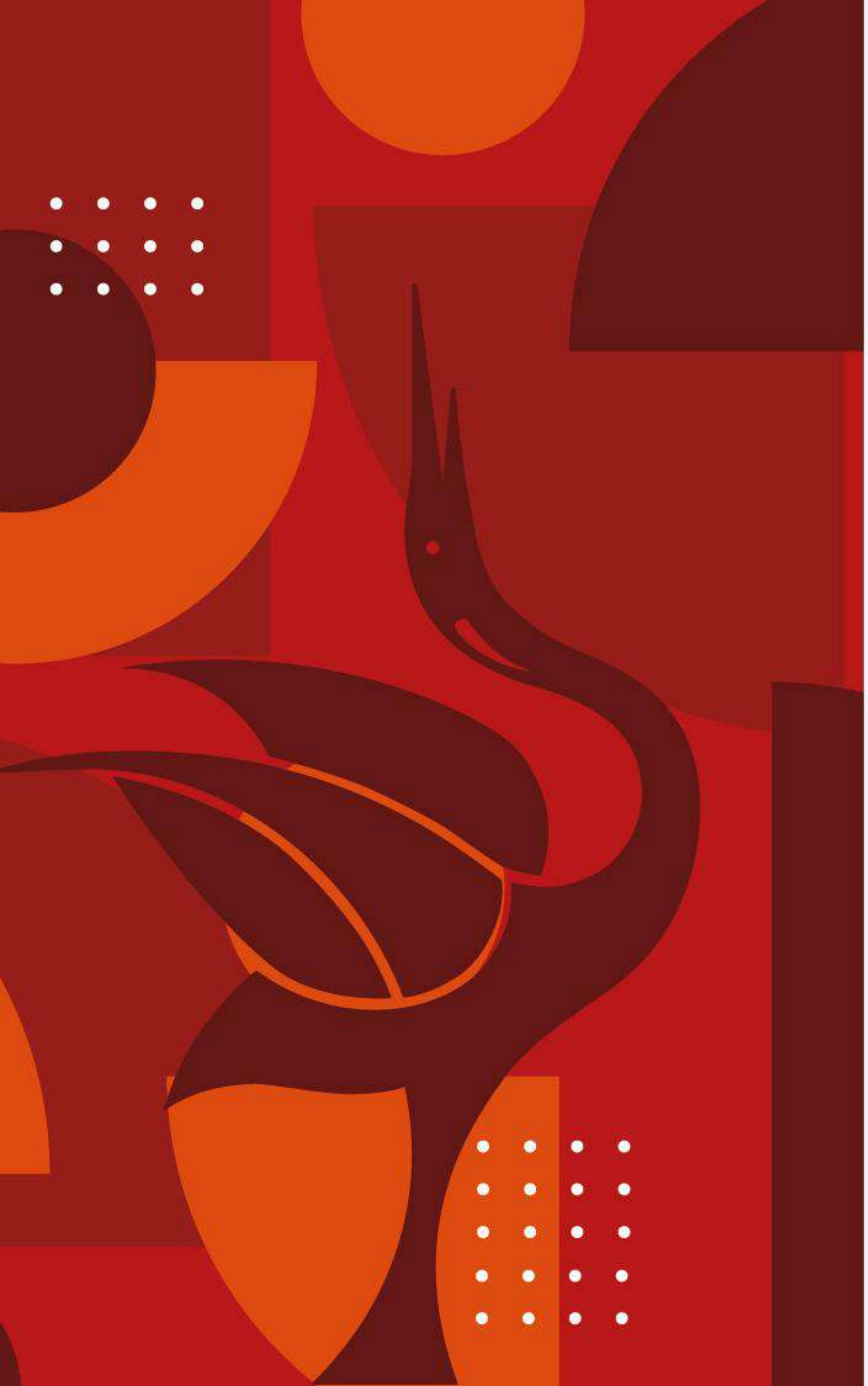

Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería

Área Académica de Computación y Electrónica

Álgebra Lineal

- Inversa por Gauss Jordan
- Inversa por Adjunta

Mtra. Diana Pérez Silva

Enero-junio 2023

Tema: **Matriz Inversa**

Resumen:

El presente documento aborda el termino de matriz inversa y lo ejemplifica como una valiosa herramienta en la solución de sistemas de ecuaciones lineales a través del cálculo de la inversa por gauss jordan y por adjunta.

Palabras Clave:

Inversa, matriz, sistema, ecuación lineal, gauss jordan, adjunta

Se dice que una matriz cuadrada A es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad

Matriz Inversa

$A^{-1} * A =$ Matriz Identidad

$\underbrace{A \;\; * A^{-1}}$ = Matriz Identidad

si existe una matriz B con la propiedad de que AB=BA = I; donde I es la matriz identidad. La B es única, la llamamos la inversa de A.

La inversa se representa con un superíndice a la -1

A^{-1}=MATRIZ INVERSA

Inversa por gauss jordan

$$\begin{pmatrix} a11\,x1 & +\,a12x2 & +\,a13x3 = & b1 \\ a21x1 & +\,a22x2 & +\,a23x3 = b2 \\ a31x1 & +\,a32x2 & +\,a33x3 = b3 \end{pmatrix}$$

Se aumenta una matriz identidad del mismo orden que la matriz de coeficientes y se aplica el método de Gauss Jordan.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz Identidad}}$$

Ejemplos de inversa por gauss jordan

Ejemplo 1.- Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de inversa por gauss jordan, verificar que la inversa es correcta, así como el valor de las incógnitas.

$$-4x1 + 5x2 - 3x3 = 28$$
$$-2x1 + 3x2 - x3 = 21$$
$$x1 + 3x2 - 4x3 = 22$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R1p(-1/4)
R1p(2)+R2
R1p(-1)+R3

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{4} & -\frac{19}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R3p(-2)+R1
R3p(-1)+R2
R3(-1/9)

Continúa ejemplo 1…

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{9}{2} & -\frac{17}{2} & 1 \end{array}\right)$$

R3p(-2)+R1
R3p(-1)+R2
R3(-1/9)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{18} & \frac{2}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{19}{18} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$

Matriz Identidad   Matriz Inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{18} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{19}{18} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Se procede a comprobar que la inversa es correcta a través de la multiplicación de matrices.

$AA^{-1}=I$

$A^{-1}A=I$

Continúa ejemplo 1…

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{18} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{19}{18} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al resultar la matriz identidad, indica que la inversa es correcta.

Posteriormente se multiplica la inversa por los términos independientes para obtener el valor de cada incógnita.

AX=b, despejando x

$X= A^{-1}b$

Continúa ejemplo 1…

A^{-1} B $=X$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{18} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{19}{18} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{2} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 28 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{67}{18} \\ \frac{191}{18} \\ \frac{61}{18} \end{pmatrix} \begin{matrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{matrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales, presenta como única solución:

x1=67/18, x2=191/18, x3=61/18

Comprobación:

$$-4\left(\frac{67}{18}\right) + 5\left(\frac{191}{18}\right) - 3\left(\frac{61}{18}\right) = 28$$

$$-2\left(\frac{67}{18}\right) + 3\left(\frac{191}{18}\right) - \left(\frac{61}{18}\right) = 21$$

$$\left(\frac{67}{18}\right) + 3\left(\frac{191}{18}\right) - 4\left(\frac{61}{18}\right) = 22$$

Ejemplos de inversa por gauss jordan

<u>Ejemplo 2.-</u> Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de inversa por gauss jordan, verificar que la inversa es correcta, así como el valor de las incógnitas.

.

$$-2x1 + 3x2 - 4x3 = 32$$
$$-4x1 + 5x2 - x3 = 28$$
$$x1 + 5x2 - 3x3 = -21$$

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Se cambia renglón 3 al renglón 1 para utilizar el uno como pivote y eliminar al -4 y -2.

Continúa ejemplo 2…

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

R1p(4)+R2
R1p(2)+R3

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 25 & -13 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -10 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

R2(1/25)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -13/25 & 0 & 1/25 & 4/25 \\ 0 & 13 & -10 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

R2p(-5)+R1

R2p(-13)+R3

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2/5 & 0 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & -13/25 & 0 & 1/25 & 4/25 \\ 0 & 0 & -81/25 & 1 & -13/25 & -2/25 \end{array}\right)$$

R3p(2/5)+R1
R3p(13/25)+R2
R3(-25/81)

Continúa ejemplo 2…

$$A=\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{\text{Matriz Identidad}}\right|\left.\underbrace{\begin{matrix}-10/81 & -11/81 & 17/81\\ -13/81 & 10/81 & 14/81\\ -25/81 & 13/81 & 2/81\end{matrix}}_{\text{Matriz Inversa}}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{81} & -\frac{11}{81} & \frac{17}{81}\\ -\frac{13}{81} & \frac{10}{81} & \frac{14}{81}\\ -\frac{25}{81} & \frac{13}{81} & \frac{2}{81}\end{pmatrix}$$

Continúa ejemplo 2…

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{10}{81} & -\frac{11}{81} & \frac{17}{81} \\ -\frac{13}{81} & \frac{10}{81} & \frac{14}{81} \\ -\frac{25}{81} & \frac{13}{81} & \frac{2}{81} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al resultar la matriz identidad, indica que la inversa es correcta.

A^{-1} B =X

$$\begin{pmatrix} -\frac{10}{81} & -\frac{11}{81} & \frac{17}{81} \\ -\frac{13}{81} & \frac{10}{81} & \frac{14}{81} \\ -\frac{25}{81} & \frac{13}{81} & \frac{2}{81} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 32 \\ 28 \\ -21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{985}{81} \\ -\frac{430}{81} \\ -\frac{478}{81} \end{pmatrix}\begin{matrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{matrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales, presenta única solución:

$x1=-\frac{985}{81}$

$x2=-\frac{430}{81}$

$x3=-\frac{478}{81}$

Ejemplos de inversa por gauss jordan

<u>Ejemplo 3.-</u> Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de inversa por gauss jordan, verificar que la inversa es correcta, así como el valor de las incógnitas.

$$\begin{aligned} 8x1 + 2x2 + 9x3 + 5x4 &= 5960 \\ 2x1 + 7x2 + x3 + x4 &= 2430 \\ 5x1 + 3x2 + 2x3 + 4x4 &= 3340 \\ 9x1 + 8x2 + 2x3 + 3x4 &= 4850 \end{aligned}$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 2 & 9 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R1(1/8)
R1p(-2)+R2
R1p(-5)+R3
R1p(-9)+R4

Continúa ejemplo 3…

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{9}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2} & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & -\frac{29}{8} & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{23}{4} & -\frac{65}{8} & -\frac{21}{8} & -\frac{9}{8} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R2p(-1/4)+R1
R2(2/13)
R2p(-7/4)+R3
R2p(-23/4)+R4

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{61}{52} & \frac{33}{52} & \frac{7}{52} & -\frac{1}{26} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{26} & -\frac{1}{26} & -\frac{1}{26} & \frac{2}{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{171}{52} & \frac{49}{52} & -\frac{29}{52} & -\frac{7}{26} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{365}{52} & -\frac{125}{52} & -\frac{47}{52} & -\frac{23}{26} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R3p(-61/52)+R1
R3p(5/26)+R2
R3(-52/171)
R3p(365/52)+R4

Continúa ejemplo 3…

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & \frac{166}{171} & -\frac{11}{171} & -\frac{23}{171} & \frac{61}{171} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{171} & -\frac{1}{171} & \frac{29}{171} & -\frac{10}{171} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{171} & \frac{29}{171} & \frac{14}{171} & -\frac{52}{171} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{755}{171} & \frac{49}{171} & -\frac{53}{171} & -\frac{365}{171} & 1\end{array}\right)$$

R4p(-166/171)+R1
R4p(16/171)+R2
R4p(49/171)
R4(-171/755)

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755}\end{array}\right)$$

Continúa ejemplo 3…

$$A^{-}=\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755}
\end{array}\right)$$

Matriz Inversa

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}
-\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\
-\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\
\frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\
-\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755}
\end{pmatrix}$$

Continúa ejemplo 3…

Comprobando si la inversa es correcta

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\ -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\ \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\ -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} b = X

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\ -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\ \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\ -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5960 \\ 2430 \\ 3340 \\ 4850 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190 \\ 210 \\ 280 \\ 300 \end{bmatrix} \begin{array}{l} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{array}$$

Inversa por adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * adjuntaA$$

Inversa por adjunta

$$\underbrace{A^{-1}}_{\text{Matriz Inversa}} = \frac{1}{\underbrace{\det A}_{\text{Determinante de la matriz}}} * \; adjunta A$$

- Transpuesta de B
- B es una matriz de cofactores.

Ejemplos de Inversa por adjunta

Ejemplo 1.- Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de inversa por adjunta, verificar que la inversa es correcta, así como el valor de las incógnitas.

$$-4x1 + 5x2 - 6x3 = 23$$

$$-2x1 + 3x2 - 4x3 = -21$$

$$6x1 + x2 - 3x3 = 18$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -4(-9+4) - 5(6+24) - 6(-2-18)$$

$$|A| = -10$$

Continúa ejemplo 1…

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix}$$

Obteniendo la matriz de cofactores B de la matriz A

$$\begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{matrix}$$

Continúa ejemplo 1…

*Calculando determinante de cada matriz de 2*2*

Recordatorio:

Para calcular el determinante de una matriz de 2 x 2 se realiza una multiplicación cruzada y se restan los productos

$$|A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A| = [(a_{11} * a_{22}) - (a_{12} * a_{21})]$$

$$B = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -30 & -20 \\ 9 & 48 & 34 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{T} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -2 \\ -30 & 48 & -4 \\ -20 & 34 & -2 \end{pmatrix}$$

La Transpuesta de B es la adjunta de A

Continúa ejemplo 1…

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} * adjuntaA$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-10} \begin{pmatrix} -5 & 9 & -2 \\ -30 & 48 & -4 \\ -20 & 34 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -9/10 & 1/5 \\ 3 & -24/5 & 2/5 \\ 2 & -17/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -9/10 & 1/5 \\ 3 & -24/5 & 2/5 \\ 2 & -17/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Comprobando que la inversa es correcta

Continúa ejemplo 1…

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -9/10 & 1/5 \\ 3 & -24/5 & 2/5 \\ 2 & -17/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -6 \\ -2 & 3 & -4 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \qquad b \quad = \quad X$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -9/10 & 1/5 \\ 3 & -24/5 & 2/5 \\ 2 & -17/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 \\ -21 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 34 \\ 177 \\ 121 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} \end{array}$$

Ejemplos de Inversa por adjunta

<u>Ejemplo 2.-</u> Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de inversa por adjunta, verificar que la inversa es correcta, así como el valor de las incógnitas.

$$-6x1 + 3x2 - 4x3 = 24$$
$$-2x1 + 5x2 - 4x3 = 32$$
$$-3x1 + 2x2 - 5x3 = 28$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -6(-25+8) - 3(10-12) - 4(-4+15)$$

$$|A| = 64$$

Continúa ejemplo 2…

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -6 & -4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 2 & 11 \\ 7 & 18 & 3 \\ 8 & -16 & -24 \end{pmatrix}$$

$$B^{T} = \begin{pmatrix} -17 & 7 & 8 \\ 2 & 18 & -16 \\ 11 & 3 & -24 \end{pmatrix}$$

La Transpuesta de B es la adjunta de A

$$A^{-1} = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} -17 & 7 & 8 \\ 2 & 18 & -16 \\ 11 & 3 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17/64 & 7/64 & 1/8 \\ 1/32 & 9/32 & -1/4 \\ 11/64 & 3/64 & -3/8 \end{pmatrix}$$

Continúa ejemplo 2…

Comprobando que la inversa es correcta

$$A^{-1} \quad A \quad = \quad I$$

$$\begin{pmatrix} -17/64 & 7/64 & 1/8 \\ 1/32 & 9/32 & -1/4 \\ 11/64 & 3/64 & -3/8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -6 & 3 & -4 \\ -2 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -5 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$A^{-1} \quad b \quad = \quad X$$

$$\begin{pmatrix} -17/64 & 7/64 & 1/8 \\ 1/32 & 9/32 & -1/4 \\ 11/64 & 3/64 & -3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \\ 28 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} \frac{5}{8} \\ \frac{11}{4} \\ -\frac{39}{8} \end{array}\right) & \begin{array}{c} X1 \\ X2 \\ X3 \end{array} \end{array}$$

Ejemplos de Inversa por adjunta

<u>Ejemplo 3.- </u>Obtener la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales empleando el método de inversa por gauss jordan, verificar que la inversa es correcta, así como el valor de las incógnitas.

$$8x1 + 2x2 + 9x3 + 5x4 = 5960$$

$$2x1 + 7x2 + x3 + x4 = 2430$$

$$5x1 + 3x2 + 2x3 + 4x4 = 3340$$

$$9x1 + 8x2 + 2x3 + 3x4 = 4850$$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

R2p(-5)+R1

R2p(-4)+R3
R2p(-3)+R4

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -33 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ -3 & -25 & -2 & 0 \\ 3 & -13 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$|A| = (-2 *-25 *-1) + (-33 *-2 *3) + (4 *-3 *-13) - (3 *-25 *4) - (-13 *-2 *-2) - (-1 *-3 *-33)$

$|A| = 755$

Continúa ejemplo 3…

Obteniendo la matriz de cofactores B de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B =$$

$$\begin{bmatrix}
\left[+\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \\ 8 & 2 \end{matrix}\right] & \left[-\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 9 & 2 \end{matrix}\right] & \left[+\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{matrix}\right] & \left[-\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \\ 9 & 3 \end{matrix}\right] \\
\left[-\begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 9 \\ 3 & 2 \\ 8 & 2 \end{matrix}\right] & \left[+\begin{bmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 5 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 9 \\ 5 & 2 \\ 9 & 2 \end{matrix}\right] & \left[-\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \\ 9 & 8 \end{matrix}\right] & \left[+\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 5 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \\ 9 & 8 \end{matrix}\right] \\
\left[+\begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 9 \\ 7 & 1 \\ 8 & 2 \end{matrix}\right] & \left[-\begin{bmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \\ 9 & 2 \end{matrix}\right] & \left[+\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \\ 9 & 8 \end{matrix}\right] & \left[-\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 1 \\ 9 & 8 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \\ 9 & 9 \end{matrix}\right] \\
\left[-\begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 9 \\ 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{matrix}\right] & \left[+\begin{bmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 9 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{matrix}\right] & \left[-\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{matrix}\right] & \left[+\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{matrix} 8 & 2 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{matrix}\right]
\end{bmatrix}$$

Continúa ejemplo 3…

La Transpuesta de B es la adjunta de A

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -9 & 114 & -49 \\ -153 & 133 & 77 & 53 \\ -85 & -10 & -125 & 365 \\ 166 & -16 & -49 & -171 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} -1 & -153 & -85 & 166 \\ -9 & 133 & -10 & -16 \\ 114 & 77 & -125 & -49 \\ -49 & 53 & 365 & -171 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula de la inversa por adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{755}\begin{bmatrix} -1 & -153 & -85 & 166 \\ -9 & 133 & -10 & -16 \\ 114 & 77 & -125 & -49 \\ -49 & 53 & 365 & -171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\ -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\ \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\ -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755} \end{bmatrix}$$

Continúa ejemplo 3…

$$A^{-1} \qquad A \qquad = \qquad I$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\ -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\ \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\ -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \qquad b \qquad = \quad X$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{755} & -\frac{153}{755} & -\frac{17}{151} & \frac{166}{755} \\ -\frac{9}{755} & \frac{133}{755} & -\frac{2}{151} & -\frac{16}{755} \\ \frac{114}{755} & \frac{77}{755} & -\frac{25}{151} & -\frac{49}{755} \\ -\frac{49}{755} & \frac{53}{755} & \frac{73}{151} & -\frac{171}{755} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5960 \\ 2430 \\ 3340 \\ 4850 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 190 \\ 210 \\ 280 \\ 300 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{array} \end{array}$$

Bibliografía

Barrera Mora, F. (2007). *Álgebra Lineal.* México: Grupo editorial PATRIA.

Del Valle Sotelo, C. (2012). *Álgebra lineal para estudiantes de ingeniería y ciencias* (Primera ed.). México: Mc Graw Hill.

Grossman, S. (2012). *Algebra lineal* (Séptima ed.). México: Mc Graw Hill.

Larson, R. (2013). *Fundamentos de álgebra lineal* (Séptima ed.). México: CENGAGE Learning.

Nakos, G. (1999). *Aplicaciones del álgebra lineal* (Primera ed.). Thomson.

Perry, W. (2014). *Álgebra lineal con aplicaciones.* Mc Graw Hill.

Poole, D. (2017). *Álgebra Lineal, una introducción moderna* (Cuarta ed.). México: CENGAGE Learning.

UAEH®