Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2009

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.

Vol.22 • Año 2009

UN ESTUDIO SOBRE LA RECTA TANGENTE EN PUNTOS DE INFLEXIÓN DESDE LA ARTICULACIÓN DE SABERES

Anna Tarasenko, Carlos Rondero Guerrero, Oleksandr Karelin, Juan Alberto Acosta Hernández
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo México
anataras@uaeh.reduaeh.mx, rondero@uaeh.reduaeh.mx, skarelin@uaeh.reduaeh.mx
acostah@uaeh.reduaeh.mx
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado Nivel: Medio y Superior

Resumen. *Algunos de los resultados previamente estudiados con el mismo método del cálculo de la recta tangente, fueron obtenidos sólo para funciones cóncavas o cuando la pendiente m es igual a cero. Ahora se propone una generalización del método para el cálculo de la recta tangente de diferentes tipos de funciones elementales en puntos de inflexión, y cuando* $m \neq 0$. *El procedimiento se basa en ideas de simetría para poder construir una función auxiliar cóncava que tiene la misma pendiente de la función original a la que se le aplica el esquema anteriormente señalado. Este método ayuda a relacionar conceptualmente la derivada de una función en un punto dado, con el cálculo de los puntos mínimos, máximos y de inflexión, sin aplicar métodos de derivación.*
Palabras clave: tangente, inflexión, pendiente, articulación

Antecedentes

En trabajos anteriores (Rondero, Karelin & Tarasenko, 2004), (Karelin, Rondero, & Tarasenko, 2005) se propuso un método alternativo en la búsqueda de la recta tangente para gráficas de funciones elementales cóncavas sin el uso de la derivada.

La idea general es: si a la gráfica de una función, $y = f(x)$ cóncava se le resta la gráfica de la recta tangente $y = mx + b$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, entonces en el punto $x = x_0$, la función auxiliar $F(x) = f(x) - [mx + b]$ tendrá un punto máximo ó mínimo local.

Por medio de tal función se identifican relaciones entre los puntos extremos de la misma y los puntos de tangencia de la función original $f(x)$.

En estos trabajos previos, se han analizado funciones cóncavas y se distinguen dos casos:

a) Cuando la función auxiliar $F(x) = f(x) - [m_{x_0} x + b_{x_0}]$ en el punto $x = x_0$ tiene un punto mínimo, entonces se cumple la desigualdad,

$$(*)\ F(x) \geq F(x_0)$$

ó $f(x)-[mx_{x_0}+b_{x_0}]\geq f(x_0)-[m_{x_0}x_0+b_{x_0}]$

b) Si en el punto $x=x_0$ hay un punto máximo para la función, entonces se cumple la desigualdad,

$$(**)\ F(x)\leq F(x_0)$$

ó $f(x)-[m_{x_0}x+b_{x_0}]\leq f(x_0)-[m_{x_0}x_0+b_{x_0}]$

De donde se desprende el resultado general: La recta $R(x_0,y_0): y=m_{x_0}x+b_{x_0}$ es tangente en el punto (x_0,y_0) para $y=f(x)$, si y sólo si, una de las desigualdades (*) ó (**) se cumple.

Para construir la recta tangente $R(x_0,y_0): y=m_{x_0}x+b_{x_0}$ es necesario hallar m_{x_0} de (*) o de (**) y calcular b_{x_0}, por medio de la expresión, $b_{x_0}=f(x_0)-m_{x_0}x_0$.

Sin embargo, es necesario aclarar que el método propuesto funciona para todos los puntos excepto para los puntos de inflexión.

En trabajos posteriores, (Karelin, Rondero, Tarasenko, 2007) se estudió el caso de las funciones $y=f(x)$ que tienen un punto de inflexión en (0,0) y con la pendiente $m=0$. Para ello usando simetría, se construyó la función transformada

$$y=\tilde{f}(x),\quad \tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\geq 0\\ -f(x), & x<0\end{cases},$$

que es cóncava y por tanto la recta $y=0$, será la recta tangente para la función $y=f(x)$ en el punto de inflexión (0,0). En este caso, para esta función transformada redefinida de este modo se puede aplicar el método mencionado en (Rondero, Karelin, Tarasenko, 2004), (Karelin, Rondero, Tarasenko, 2005), mediante el cual ambas rectas tangentes para la función inicial y la función transformada coinciden.

Método propuesto para funciones con punto de inflexión. Caso general.

Consideremos las funciones $y=f(x)$ con $x\in D,\ D=[a,b]$ para las cuales en cada punto $(x_0,y_0),\ x_0\in D$ de su gráfica $L:\{(x,y(x))\}$ existe una y sólo una recta

$R(x_0, y_0): y = m_{x_0} x + b_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0) y no tiene otros puntos comunes con la gráfica L en una vecindad del punto (x_0, y_0).

Sea $y = f(x)$ una función con un punto de inflexión en (0,0).

Si la función auxiliar, $y = F(x),\ F(x) = f(x) - mx$ para un número m tiene en (0,0) la recta tangente $y = 0$, entonces la recta $y = mx$ recibe el nombre de recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (0,0).

Sea $y = f(x)$ una función con un punto de inflexión en (0,0).

Si la función transformada $y = \tilde{F}(x)$ para la función auxiliar

$y = F(x), \quad F(x) = f(x) - mx$, es

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x),\ x \geq 0 \\ -F(x),\ x < 0 \end{cases}$$

para un número m (es cóncava) y tiene en (0,0) la recta tangente $y = 0$, entonces la recta $y = mx$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (0,0).

Subrayamos la unicidad de la recta tangente.

Ejemplo

Construir la recta tangente para la gráfica de la función

$y = f(x), \quad f(x) = x^3 - 5x^2 + x$ en el origen $(0,0)$.

La función auxiliar es

$y = F(x), \quad F(x) = f(x) - mx = x^3 - 5x^2 + x - mx$.

Y la función transformada para la función auxiliar es,

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x),\ x \geq 0 \\ -F(x),\ x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - mx, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + mx, & x < 0 \end{cases}.$$

Es necesario ahora encontrar el número m, tal que la función $y=\widetilde{F}(x)$ sea cóncava y tenga la función $y=0$ como su recta tangente.

Para el caso en que $m=1$, se tiene que la función transformada de la función auxiliar $y=\widetilde{F}(x)$ tiene forma

$$\widetilde{F}(x)=\begin{cases} x^3-5x^2+x-x, & x\geq 0 \\ -x^3+5x^2-x+x, & x<0 \end{cases} = \begin{cases} x^3-5x^2, & x\geq 0 \\ -x^3+5x^2, & x<0 \end{cases}.$$

Mostramos que $y=\widetilde{F}(x)$ es cóncava con la pendiente $p=0$ en el punto $(0{,}0)$..

Según nuestro esquema formamos la función auxiliar para la función transformada de la función auxiliar de la función inicial $y=f(x)$

$$y=\widetilde{F}(x)-px=\begin{cases} x^3-5x^2-px, & x\geq 0 \\ -x^3+5x^2-px, & x<0 \end{cases}.$$

Si se cumple la desigualdad,

$$\widetilde{F}(x)-px\geq 0$$

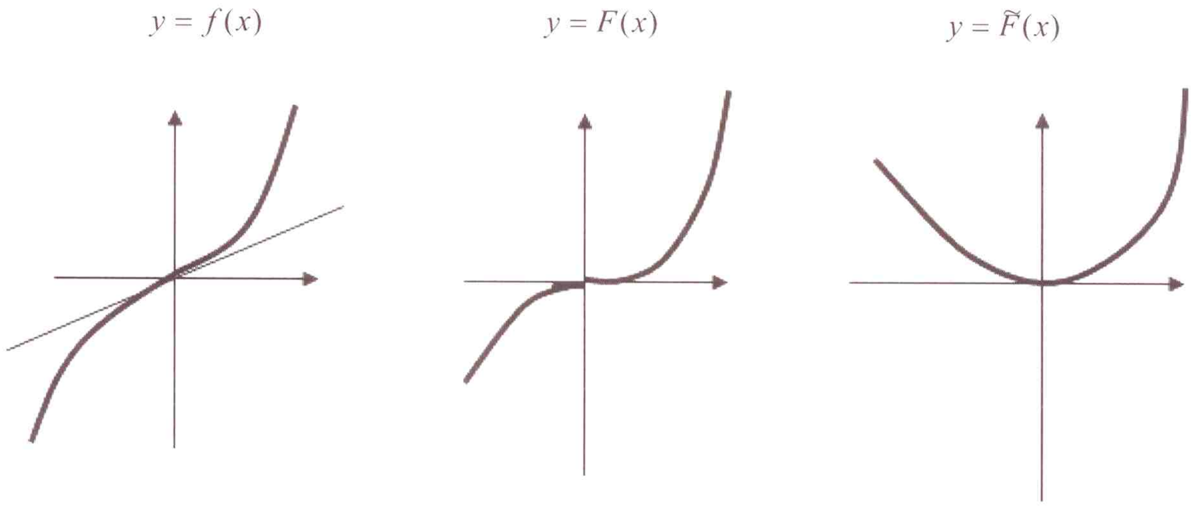
o bien,

$$\begin{cases} x^3-5x^2-px\geq 0, & x\geq 0 \\ -x^3+5x^2-px\geq 0, & x<0 \end{cases}$$

para $p=0$ alrededor del origen $x=0$. En realidad, si factorizamos x, se tiene,

$$\begin{cases} x^3-5x^2\geq 0, & x\geq 0 \\ -x^3+5x^2\geq 0, & x<0 \end{cases}, \begin{cases} x^2(x-5)\geq 0, & x\geq 0 \\ x^2(-x+5)\geq 0, & x<0 \end{cases}$$

En el caso $m = 1$, las gráficas correspondientes de las funciones involucradas son de la forma siguiente,



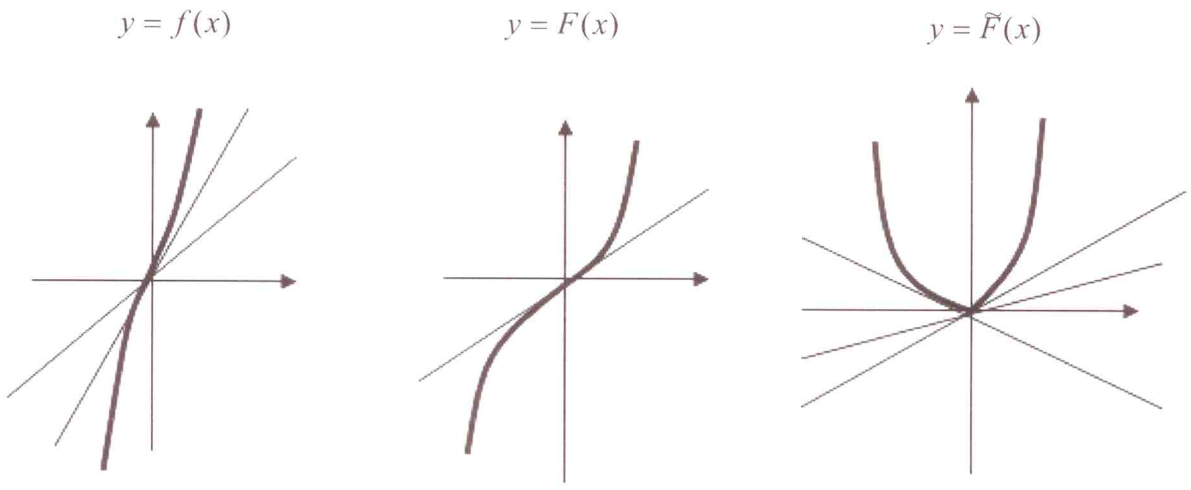
Cuando $p \neq 0$ esta desigualdad no se cumple alrededor del origen $x = 0$. En realidad se cumplen estas otras desigualdades,

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2 - px \geq 0, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - px \geq 0, & x < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x(x^2 - 5x - p) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - p) \geq 0, & x < 0 \end{cases}$$

Ahora investigamos el caso en que $m \neq 1$. ~~m≠0~~

$$y = \tilde{F}(x), \quad \tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), x \geq 0 \\ -F(x), x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - mx, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + mx, x < 0 \end{cases}$$

Mostramos que la función $y = \tilde{F}(x)$ no tiene la recta tangente en el origen.



Si ahora aplicamos el método de reducción al absurdo, es decir consideramos que $y = px$ es la recta tangente para $y = \widetilde{F}(x)$, entonces se tiene la función auxiliar,

$$y = \widetilde{F}(x) - px = \begin{cases} x^3 - 5x^2 + x - mx - px, & x \geq 0 \\ -x^3 + 5x^2 - x + mx - px, & x < 0 \end{cases}$$

Según la definición se cumple una de las dos desigualdades,

$\widetilde{F}(x) - px \leq 0$ ò $\widetilde{F}(x) - px \geq 0$ (*)

Si factorizamos x obtenemos,

$$\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - p), & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - p), & x < 0 \end{cases}$$

Mostramos que si la desigualdad (*) se cumple para $p = l$

$$\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - l) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - l) \geq, & x < 0 \end{cases} \left(\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - l) \leq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - l) \leq, & x < 0 \end{cases} \right)$$

Entonces la desigualdad se cumple y para otro $p = s, \quad s \neq l$

$$\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - s) \geq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - s) \geq 0, & x < 0 \end{cases} \left(\begin{cases} x(x^2 - 5x + 1 - m - s) \leq 0, & x \geq 0 \\ x(-x^2 + 5x - 1 + m - s) \leq 0, & x < 0 \end{cases} \right)$$

La desigualdad (*) se cumple cuando

$$\begin{cases} 1 - m - p > 0 \\ -1 + m - p < 0 \end{cases}, \begin{cases} 1 - m > p \\ -1 + m < p \end{cases}, -1 + m < p < 1 - m$$

$$\left(\begin{cases} 1 - m - p < 0 \\ -1 + m - p > 0 \end{cases}, \begin{cases} 1 - m < p \\ -1 + m > p \end{cases}, 1 - m < p < -1 + m \right)$$

Entonces es suficiente escoger un número $s, \quad s \neq l$ del intervalo

$(-1 + m, 1 - m)$. $((1 - m, -1 + m))$.

Obtenemos una contradicción respecto de la unicidad de la definición de la recta tangente.

Sin embargo, sin perder generalidad se puede pasar de un punto arbitrario (x_0, y_0) al origen $(0,0)$. Sea $y = f(x)$ una función con el punto de inflexión en (x_0, y_0). Si la función $u = u(z), \quad u(z) = f(z + x_0) - y_0$ tiene en el punto (0,0) la recta tangente $u = mz$, entonces la recta $y = mx + b$, donde $b = f(x_0)$ recibe el nombre la recta tangente para la función $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0).

Conclusiones

Es de resaltarse la versatilidad del método del cálculo de la recta tangente para el tratamiento de funciones elementales.

Hemos venido mostrando la evolución de nuestro método en los diferentes trabajos previos, desde casos muy particulares hasta el caso general de funciones suaves, es decir que tienen derivadas.

Hay una clara articulación conceptual en este método con el tratamiento de desigualdades y además entre los conceptos principales del cálculo elemental, como puntos extremos, concavidad y puntos de inflexión, entre otros.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. y Merzbach, U. (1989). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley.

Edwards, C. H.(1979). *The Historical development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Rondero, C., Karelin, O. y Tarasenko, A. (2004). Métodos alternativos en la búsqueda de puntos críticos y derivadas de algunas funciones. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.821-828). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2005). Propuesta didáctica sobre la construcción de la recta tangente sin el uso de la derivada. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.386-392). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Karelin, O., Rondero, C. y Tarasenko, A. (2007). La construcción de la recta tangente en puntos de inflexión: un método alternativo en la articulación de saberes. En C. Crespo Crespo (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20* (pp.198-203). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.