UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DEL ESTADO DE HIDALGO

Hidrodinámica

Elaborado por:

Ing. Enriqueta Del Ángel Hernández

Noviembre, 2014

http://www.uaeh.edu.mx/virtual

HIDRODINÁMICA

Estudia el comportamiento del movimiento de los fluidos; en sí la hidrodinámica se fundamenta principalmente en los fluidos incompresibles es decir los líquidos; para ello considera la velocidad, presión, flujo y gasto.

Se aplica en el diseño y construcción de presas, canales, acueductos, cascos de barcos, aviones, hélices, turbinas, frenos, amortiguadores, colectores pluviales entre otras aplicaciones.

El estudio de los líquidos en movimiento considera que:

- Son completamente incomprensibles.
- Ideales, esto es que carecen de viscosidad.
- El flujo es estacionario o estable, porque se considera que la velocidad de cada partícula de líquido que pasa por el mismo punto es igual.

CONCEPTOS IMPORTANTES.

GASTO (G):

Es la relación entre el volumen del líquido que fluye por un conducto y el tiempo que tarda en fluir.

$$\boldsymbol{Gasto = \frac{Volumen}{tiempo}}$$

$$\boldsymbol{G = \frac{v}{t} \quad Fórmula\ 1}$$

$$sus\ unidades\ son: \frac{m^3}{s}\ en\ el\ SI\ (Sistema\ Internacional\ de\ Unidades)$$

Existe otra forma de calcular el gasto o caudal cuando se conoce la velocidad del líquido y el área de la sección transversal de la tubería por la cual circula; de tal forma que:

$$\boldsymbol{Gasto = (Area\ de\ la\ sección\ transversal\ de\ la\ tubería)(\ velocidad\ del\ líquido)}$$

$$\boldsymbol{G = A\, v \quad Fórmula\ 2}$$

EJEMPLOS DE GASTO.

Ejemplo 1.- Calcular el gasto de agua por una tubería si en 30 minutos fluyeron 1200 litros.

SOLUCIÓN:

Para calcular el gasto es importante expresar y sustituir los 30 minutos en segundos así como los 1200 litros en metros cúbicos.

$$\left(\frac{30\ min}{1}\right)\left(\frac{60\ s}{1\ min}\right) = \frac{1800\,\text{min}\ s}{1\ min} = 1800s$$

$$\left(\frac{1200\ litros}{1}\right)\left(\frac{1\ m^3}{1\ 000\ litros}\right) = \left(\frac{1200\ litros\ \ m^3}{1\ 000\ litros}\right) = 1.2\ \ m^3$$

Sustituyendo en la fórmula 1.

$$\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{t}}\ ;\ \ G = \frac{1.2\ \ m^3}{1800\ s} = \mathbf{6.66}\ \boldsymbol{x}\ \mathbf{10^{-4}}\ \frac{\boldsymbol{m^3}}{\boldsymbol{s}}$$

Significa que en un segundo fluyen 6.66 x 10^{-4} **m^3** / s; expresando los m^3 en litros para que quede mejor comprendido el resultado son: 0.66 litros cada segundo (no llega a un litro por segundo).

Ejemplo 2. Calcular el gasto de agua a través de una tubería con un diámetro de 5 cm si la velocidad con la cual fluye es de 4.8 m/s.

SOLUCIÓN.

Como se conoce la velocidad con la cual fluye el agua y el diámetro de la tubería se aplica la fórmula 2, sólo que antes se tiene que calcular el área de la sección transversal de la tubería.

Recordando $A = \frac{\pi\ \varphi^2}{4}$; sustituyendo valores se tiene: $A = \frac{\pi\ (0.05\ m)^2}{4} =$

$$1.96\ x\ 10^{-3}m^2$$

Sustituyendo en la fórmula 2.

$\boldsymbol{G = A\, v}$; Se tiene: $\boldsymbol{G = (1.96\ x\ 10^{-3} m^2)\left(\frac{4.8\ m}{s}\right) = 9.40\ x\ 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}}$

El gasto de agua es de 9.40 X 10^{-3} m^3/ s, explicado de manera más entendible son 9.4 litros cada segundo.

Ejemplo 3.- ¿Qué diámetro debe tener una tubería para que el gasto sea de 10 litros/s a una velocidad de 5m/s?

SOLUCIÓN:

Se utiliza la fórmula 2; $\boldsymbol{G = A\, v;}$ de donde se despeja "A":

$\boldsymbol{A = \frac{G}{v}}$ Posteriormente se sustituye "A" por la fórmula para calcular área,

$$\boldsymbol{A = \frac{\pi\, \varphi^2}{4}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi\, \varphi^2}{4} = \frac{G}{v}}\ \ se\ despeja\ \varphi$$

$$\boldsymbol{\varphi^2 = \frac{4G}{\pi v};\quad \varphi = \sqrt{\frac{4\ G}{\pi\ v}}}$$

Sustituyendo valores en la expresión anterior:

$$\boldsymbol{\varphi = \sqrt{\frac{4\ (0.01\frac{m^3}{s})}{\pi(\ 5\frac{m}{s})}} = 0.050\ m}$$

La tubería debe tener un diámetro de 0.05 m o sea de 5 cm.

FLUJO (F).

Cantidad de masa de líquido que fluye a través de una tubería en un segundo; matemáticamente:

$$\boldsymbol{Flujo = \frac{masa}{tiempo}}$$

$$\boldsymbol{F = \frac{m}{t} \quad Fórmula\ 3}$$

$$sus\ unidades\ son\ \boldsymbol{\frac{Kg}{s}}$$

Existe otra fórmula para calcular flujo si se relaciona con la densidad, de tal forma que:

$$\boldsymbol{Flujo = Gasto\ \ por\ densidad}$$

$$\boldsymbol{F = G\rho \quad Fórmula\ 4}$$

EJEMPLOS DE FLUJO.

Ejemplo 4.- Calcular el flujo de agua a través de una tubería si el gasto es de 2 litros cada segundo.

Recuerde que la densidad del agua es de 1000 Kg/m^3.

Solución:

De acuerdo a que sólo se conoce el gasto se puede utilizar la fórmula 4; antes de sustituir en esta fórmula el gasto se debe expresar en m^3 / s.

$$\left(\frac{2\ litros}{s}\right)\left(\frac{1\ m^3}{1000\ litros}\right) = \frac{2\ litros\ \ m^3}{1000\ s\ \ \ litros} = 2\ x\ 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}$$

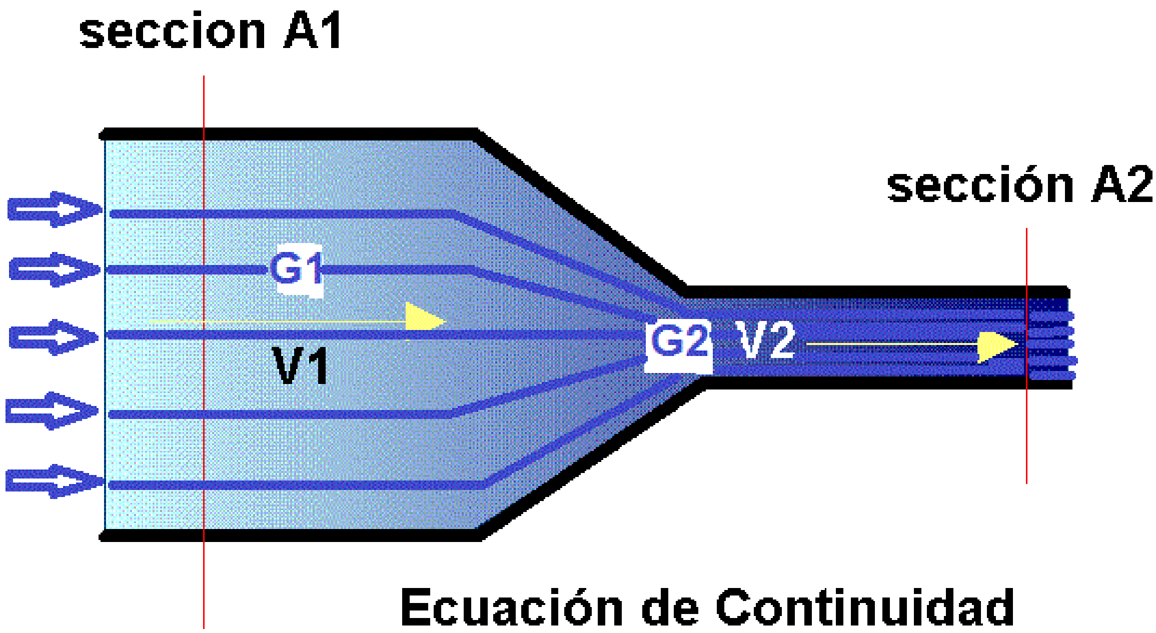
Sustituyendo:

$$F\ = G\rho =$$

$$F = \left(2\ x\ 10^{-3}\ \frac{m^3}{s}\right)\left(1000\ \frac{Kg}{m^3}\right) = 2\ \frac{Kg}{s}$$

Significa que cada segundo fluyen 2 kg de agua.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.



En la figura anterior la tubería presenta una reducción de su sección transversal del punto A1 al punto A2; sin embargo la cantidad de líquido que pasa por ambos puntos es la misma; por lo cual el gasto en el punto A1 es el mismo que en punto A2; expresado matemáticamente:

$$\boldsymbol{G_1 = G_2}$$

$$\boldsymbol{A_1 v_1 = A_2 v_2} \ \textit{llamada ECUACIÓN DE CONTINUIDAD}$$

$$\boldsymbol{F\acute{o}rmula\ 5}$$

Lo anterior es considerando que los líquidos son incompresibles de tal forma que la velocidad del líquido que fluye por la sección transversal mayor tiene una menor velocidad y al pasar por la sección transversal de menor tamaño el líquido incrementa su velocidad, compensando así el gasto.

A MAYOR SECCIÓN, MENOR VELOCIDAD

A MENOR SECCIÓN, MAYOR VELOCIDAD

EJEMPLOS DE LA APLICACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD.

1.- Por una tubería con un diámetro de 4 cm circula agua a una velocidad de 3m/s, si la tubería presenta una reducción de su sección transversal encontrándose que su diámetro en esta parte es de 2.5 cm; ¿Cuál es la velocidad del agua a través de esta última sección?

Solución:

Datos:

Diámetro 1 = $\varphi_1 = 4$ cm o 0.04 m

Diámetro 2 = $\varphi_2 = 2.5$ cm o 0.025 m

Velocidad 1 = v_1 = 3 m/s

Se desconoce la v_2.

Utilizando la Ecuación de Continuidad; $\boldsymbol{A_1 v_1 = A_2 v_2}$ **;** se despeja v_2; quedando como:

$$\boldsymbol{v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}} \quad \boldsymbol{expresión\ \ 1}$$

Considerando que el área de la sección transversal es: $\boldsymbol{A = \frac{\pi\varphi^2}{4}}$ de tal forma que para cada área se tiene:

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{\pi(\varphi_1)^2}{4} \quad y \quad A_2 = \frac{\pi(\varphi_2)^2}{4}}$$

Ahora sustituyendo en la expresión 1, se tiene:

$$v_2 = \frac{\left(\boldsymbol{\frac{\pi(\varphi_1)^2}{4}}\right)(v_1)}{\boldsymbol{\frac{\pi(\varphi_2)^2}{4}}} \quad \boldsymbol{expresión\ 2}$$

Dividiendo y cancelando $\frac{\pi}{4}$ de la expresión 2, se obtiene:

$$v_{2=}\ \frac{(\varphi_1)^2(v_1)}{(\varphi_2)^2} \quad expresión\ 3$$

Sustituyendo valores en la expresión 3;

$$v_{2=}\ \frac{(0.04\ m)^2\left(\frac{3\ m}{s}\right)}{(0.025\ m)^2}$$

$$v_2 = \frac{(1.6\ x\ 10^{-3}\ m^2)\left(\frac{3\ m}{s}\right)}{6.25\ \ x\ 10^{-4}m^2} = \ 7.68\frac{m}{s}$$

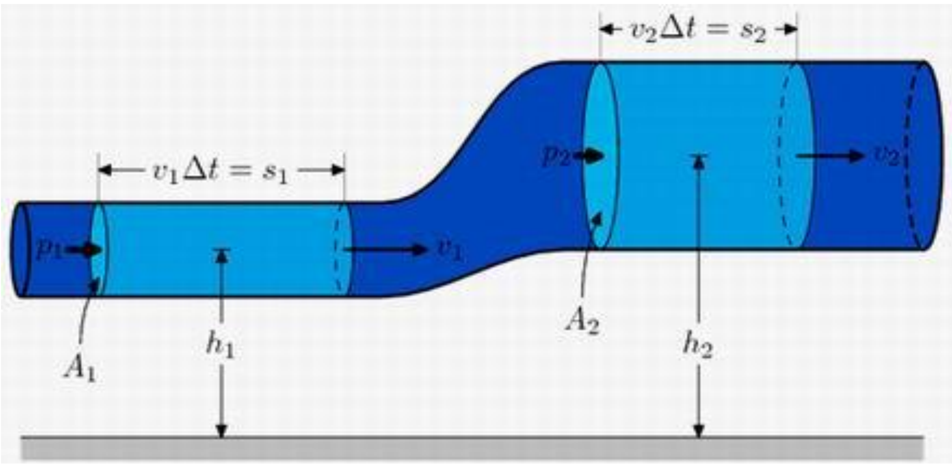
La velocidad del agua en la sección estrecha de la tubería es de 7.68 m/s.

TEOREMA DE BERNOULLI.

"En un líquido ideal cuyo flujo es estacionario, la suma de las energías cinética, potencial y de presión que tiene el líquido en un punto, es igual a la suma de estas energías en otro punto cualquiera"

ECUACIÓN DEL TEOREMA DE BERNOULLI

$$\frac{(v_1)^2}{2} + \ gh_1 + \ \frac{P_1}{\rho_1} = \ \frac{(v_2)^2}{2} + gh_2 + \ \frac{P_2}{\rho_2}$$



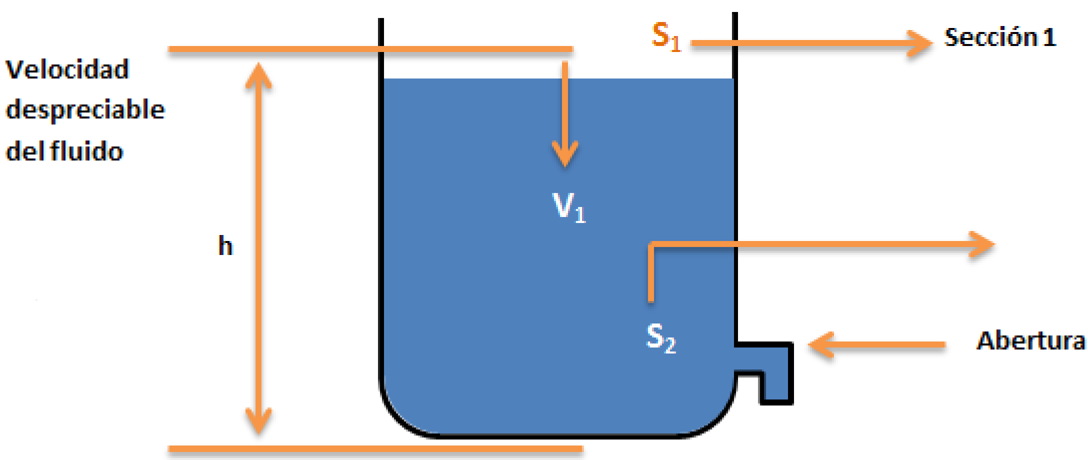
TEOREMA DE TORRICELLI

Una de las aplicaciones del Teorema de Bernoulli es el Teorema de Torricelli que enuncia:

"La velocidad con la que sale un líquido por el orificio de un recipiente es igual a la que adquiriría un cuerpo que se dejara caer libremente desde la superficie libre del líquido hasta el nivel del orificio"

El Teorema anterior fue establecido por Evangelista Torricelli y fundamentado en la siguiente ecuación:

$$v = \sqrt{2gh}$$

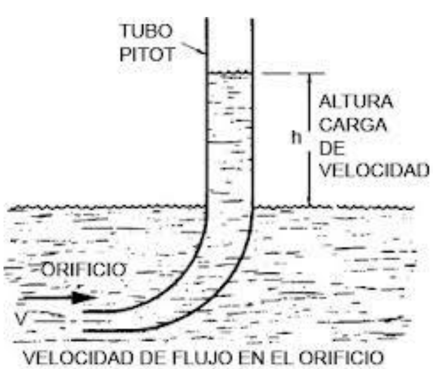


Con el teorema de Torricelli se puede calcular el caudal de salida de un líquido por un orificio

Asimismo, dentro de las aplicaciones también se encuentran: Tubo de Pitot y Tubo de Venturi.

TUBO DE PITOT.

Es utilizado para medir la velocidad de la corriente de agua de un río.



$$v = \sqrt{2gh}$$

TUBO DE VENTURI.

Se emplea para medir la velocidad de un líquido que circula a presión dentro de una tubería.

La siguiente ecuación obtenida a partir del Teorema De Bernoulli permite calcular la velocidad.

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\ (P_A - \ P_B)}{(\frac{A_A}{A_B})^2 - 1}}$$

v_A=*Velocidad del líquido a través de la tubería en* $\frac{m}{s}$.

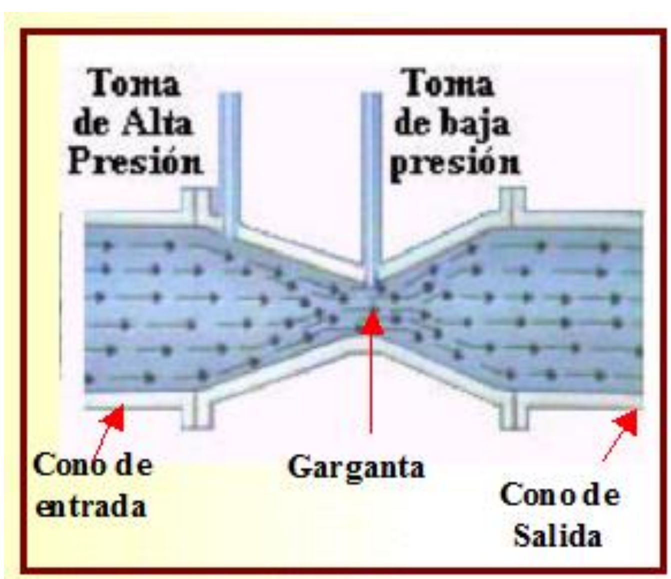
P_A=*Presión del líquido en la parte ancha del tubo en* $\frac{N}{m^2}$.

P_B=*Presión del liquido en la parte más estrecha del tubo en* $\frac{N}{m^2}$

ρ=*Densidad del líquido en* $\frac{Kg}{m^3}$

A_A=*Área de la sección transversal de la parte más ancha de la tubería en* m^2.

A_B=*Área de la sección tansversal de la parte más estrecha de la tubería en* m^2.



EJEMPLOS.

1.- El tubo cerca del extremo inferior de un tanque de almacenamiento de agua tiene una pequeña fuga y de ella sale una corriente de agua. La superficie del agua en el tanque se localiza a 15 m encima del punto de la fuga.

a) ¿Qué velocidad tiene la corriente del agua que sale del agujero?
b) Si el agujero tiene un área de 60 milésimos de cm^2; ¿Cuánta agua fluirá en un segundo?

SOLUCIÓN:

a) Para calcular la velocidad del agua que sale del agujero se utiliza:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$$

De acuerdo a los datos proporcionados en el ejemplo la altura es de 15 m; asimismo ya se conoce el valor de la aceleración de la gravedad que es g = 9.81m/s^2, sustituyendo en la fórmula:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2gh}}$$

$$\boldsymbol{v = \sqrt{2\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(15m)} = \sqrt{294.3\frac{m^2}{s^2}}}$$

$$v = 17.15\ \frac{m}{s}\ velocidad\ con\ la\ cual\ sale\ el\ agua\ por\ el\ agujero.$$

b) Para calcular cuánta agua fluirá en un segundo, se debe calcular entonces el volumen de agua; por lo tanto primero se calcula el gasto ya que se conoce área del agujero además de la velocidad con la cual fluye el agua.

Para calcular gasto se utiliza:

$$G = Av$$

Antes de sustituir en la fórmula se deben convertir los 0.060 cm^2 a m^2.

$$\left(\frac{0.060\ cm^2}{1}\right)\left(\frac{1\ m^2}{1\ x\ 10^4\ cm^2}\right) = \frac{0.060\ cm^2\ m^2}{1\ x\ 10^4\ cm^2} = 6\ x\ 10^{-6}\ m^2$$

$$Sustituyendo\ en\ G = Av$$

$$G = (6\ x\ 10^{-6} m^2)\left(17.15\ \frac{m}{s}\right) = 1.029\ x\ 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}; este\ es\ el\ gasto.$$

$$Posteriormente\ de\ la\ fórmula\quad G = \frac{V}{t}$$

De donde:
G = Gasto en m^3 / s
V = volumen en m^3.
t = Tiempo en s.
Se despeja V; quedando:

$$V = G\ t$$

$$V = \left(\frac{1.029\ x\ 10^{-4}\ m^3}{s}\right)(1\ s)$$

$$= 1.029\ x\ 10^{-4}\ m^3\ \ volumen\ de\ agua\ que\ fluye\ en\ un\ segundo.$$

2.- Por una tubería de 5.08 cm de diámetro circula agua a una velocidad de 1.6 m/s. Calcular la velocidad del agua, al pasar por el estrechamiento de la tubería donde el diámetro es de 4 cm.

Solución:

DATOS:

Diámetro 1 = $\varphi_1 = 5.08$ cm o 0.058 m

Diámetro 2 = $\varphi_2 = 4$ cm o 0.04 m

Velocidad 1 = v_1 = 1.6 m/s

Se desconoce la v_2 = ¿?

De acuerdo a los datos se utiliza la ecuación de continuidad.

Utilizando la Ecuación de Continuidad; $\boldsymbol{A_1 v_1 = A_2 v_2}$ **;** se despeja v_2; quedando como:

$$\boldsymbol{v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} \quad expresión\ \ 1}$$

Considerando que el área de la sección transversal es: $\boldsymbol{A = \frac{\pi\varphi^2}{4}}$ de tal forma que para cada área se tiene:

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{\pi(\varphi_1)^2}{4} \quad y \quad A_2 = \frac{\pi(\varphi_2)^2}{4}}$$

Ahora sustituyendo en la expresión 1, se tiene:

$$v_2 = \frac{\left(\boldsymbol{\frac{\pi(\varphi_1)^2}{4}}\right)(v_1)}{\boldsymbol{\frac{\pi(\varphi_2)^2}{4}}} \quad \boldsymbol{expresión\ 2}$$

Dividiendo y cancelando $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$ de la expresión 2, se obtiene:

$$\boldsymbol{v_{2=} \frac{(\varphi_1)^2(v_1)}{(\varphi_2)^2} \quad expresión\ 3}$$

Sustituyendo valores en la expresión 3;

$$\boldsymbol{v_{2=} \frac{(0.058\ m)^2\left(\frac{1.6\ m}{s}\right)}{(0.04\ m)^2}}$$

$$\boldsymbol{v_2 = \frac{(3.364\ x\ 10^{-3}\ m^2)\left(\frac{1.6\ m}{s}\right)}{1.6\ \ x\ 10^{-3} m^2} = \ 3.364\ \frac{m}{s}}$$

La velocidad del agua en la sección estrecha de la tubería es de 3.364 m/s.

3.- En la parte más ancha de un tubo de Venturi existe un diámetro de 16.16 cm y una presión de 2.9 x 10^4 N/ m^2, en la parte más estrecha el diámetro es de 8 cm y la presión de 1.5 x 10^4 N/m^2.
¿Cuál es la velocidad del agua que fluye por la tubería?

Solución:
Para calcular la velocidad se utiliza:

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\ (P_A - \ P_B)}{(\frac{A_A}{A_B})^2 - 1}}$$

De acuerdo a los datos se conoce:
P_A = 2.9 x 10^4 N/m^2.
P_B = 1.5 x 10^4 N/m^2.
$\varphi_A = \ 16.16 \text{ cm} = 0.1616\text{m}$
$\varphi_B = \ 8 \text{ cm} = 0.08\text{m}$
$Densidad\ del\ agua = \ \rho_{agua} \ = 1000\ \frac{Kg}{m^2}$
Antes de sustituir se calculan las áreas:

$$\boldsymbol{A_A = \frac{\pi(\varphi_1)^2}{4} \quad y \quad A_B = \frac{\pi(\varphi_2)^2}{4}}$$

$$\boldsymbol{A_A = \frac{\pi(\varphi_1)^2}{4} = \frac{\pi\ (0.1616\ m\ )^2}{4} = 0.020\ m^2}$$

$$\boldsymbol{A_B = \frac{\pi(\varphi_2)^2}{4} = \frac{\pi\ (\ 0.08\ m\ )^2}{4} = 5.02\ x\ 10^{-3}\ m^2}$$

Sustituyendo valores en la fórmula:

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\ (P_A - \ P_B)}{(\frac{A_A}{A_B})^2 - 1}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{1000\frac{kg}{m^3}}\ \left(2.9\ x\ 10^4\frac{N}{m^2} - \ 1.5\ x\ 10^4\frac{N}{m^2}\right)}{(\frac{0.020\ m^2}{5.02\ x\ 10^{-3}\ m^2})^2 - 1}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{1000\frac{kg}{m^3}}\left(2.9\ x\ 10^4\frac{N}{m^2} - \ 1.5\ x\ 10^4\frac{N}{m^2}\right)}{\left(\frac{0.020\ m^2}{5.02\ x\ 10^{-3}\ m^2}\right)^2 - 1}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\frac{2}{1000\frac{kg}{m^3}}\left(14\ 000\frac{N}{m^2}\right)}{(3.984)^2 - 1}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\left(28\frac{m^2}{s^2}\right)}{15.872 - 1}}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{\left(28\frac{m^2}{s^2}\right)}{15.872 - 1}}$$

$\boldsymbol{v_A = 1.37\ \frac{m}{s}}$ **velocidad del agua a través de la tubería.**

4.- Por un tubo de 10 x 10^{-6} m^2 de sección transversal pasa agua y en 12 min se recogen 80 X 10^{-6} m^3 de dicho líquido. ¿Con qué velocidad está fluyendo el agua?
DATOS:
La sección transversal = A = 10 x 10^{-6} m^2
Tiempo = t = 12 min = 720 segundos.
Volumen = 80 X 10^{-6} m^3

INCÓGNITA:
Se desea saber la velocidad con la cual fluye el agua = v =?
SOLUCIÓN:
Para calcular la velocidad se puede utilizar la fórmula:

$$Gasto = área\ de\ la\ sección\ transversal\ x\ velocidad$$

$$G = Av\ despejando\ v:$$

$$\boldsymbol{v = \frac{G}{A}\quad expresión\ 1.}$$

Ya se conoce área de la sección transversal, sólo se necesita conocer cuál es el valor del gasto, para ello se utiliza la fórmula:

$$\boldsymbol{G = \frac{V}{t}\ expresión\ 2}$$

De donde se conoce el volumen que es de 80 X 10^{-6} m^3 y tiempo de 120 segundos, sólo se sustituye en la fórmula de la expresión 2.

$$G = \frac{80\ x\ 10^{-6} m^3}{720\ s} = 1.11\ x\ 10^{-7}\frac{m^3}{s}$$

Una vez que se conoce el gasto se sustituye en la expresión 1 para calcular la velocidad con la cual fluye el agua por la tubería.

$$\boldsymbol{v = \frac{G}{A}}$$

$$\mathbf{v = \frac{1.11\ x\ 10^{-7}\frac{m^3}{s}}{10\ x\ 10^{-6}\ m^2} = 0.011\ \frac{m^3}{m^2\ s}}$$

$$\boldsymbol{v = 0.011\ \frac{m}{s}}$$

5.- Calcular el diámetro de una tubería, para que el gasto sea de 0.02 m^3 /s a una velocidad de 1.5 m/s

DATOS:

G = 0.02 m^3 /s

v = 1.5 m/s

INCÓGNITA:

Diámetro de la tubería = φ =?

SOLUCIÓN:

La fórmula que implica gasto, velocidad y diámetro (debido al área de sección transversal) es:

$$\boldsymbol{G = Av}$$

De la fórmula anterior se despeja A:

$$\boldsymbol{A = \frac{G}{v}\quad expresión\ 1}$$

Recordando que la fórmula para calcular área cuando se conoce el diámetro es:

$$\boldsymbol{A = \frac{\pi(\varphi)^2}{4}}$$

Se sustituye A en la expresión 1 quedando.

$$\boldsymbol{\frac{\pi(\varphi)^2}{4} = \frac{G}{v}\quad expresión\ 2}$$

De la expresión 2 se despeja φ

$$(\varphi)^2 = \frac{4G}{v\pi}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{4G}{v\pi}} \quad expresión\ 3$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{4\left(0.02\,\frac{m^3}{s}\right)}{\left(1.5\,\frac{m}{s}\right)\pi}} = \sqrt{\frac{0.08\,\frac{m^3}{s}}{4.712\,\frac{m}{s}}}$$

$$\varphi = 0.13\ m \quad o\ sea\ \varphi = 13\ cm\ es\ el\ diámetro\ de\ la\ tubería.$$

FUENTES DE INFORMACIÓN.

- Bueche, J.F. (1993). *"Física general"* Octava edición. Mc. Graw Hill. México, D.F
- Pérez, M. H. (2006). *"Física General"* Tercera edición. Publicaciones Culturales. México, D.F.

http://www.fodonto.uncu.edu.ar/upload/hidrodinamica.pdf
http://bernoullifisicatec.blogspot.mx/2010/01/bernoulli.html
http://cibertareas.com/teorema-de-torricelli-fisica-2.html

Lectura

Colaborador: Ing. Enriqueta del Angel Hernández
Nombre de la asignatura: Temas Selectos de Física
Programa educativo: Bachillerato virtual