



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

# PRODUCTO PUNTO, CRUZ Y TRIPLE PRODUCTO

**Área Académica: Licenciatura en Ingeniería Industrial**

**Profesor(a): Dra. Esmeralda Ivonne Espinoza Martínez**

**Periodo: Enero – Junio 2019**



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

## Producto punto, cruz y Triple producto.

Resumen: Estudiar los vectores, sus características y reglas de operación es fundamental en distintas ramas de la ciencia. El producto escalar de dos vectores tiene muchas aplicaciones. Equipos de localización, como los GPS, utilizan vectores de posición de algunos satélites para determinar la ubicación exacta de distintos objetos; los arquitectos deben operar vectorialmente los esfuerzos sobre las edificaciones y puentes; los veleros pueden navegar en contra del viento, si logran que la componente de la velocidad del viento este dirigida hacia delante; conociendo los vectores de posición y de velocidad de un avión, se puede predecir la ruta de vuelo.

Palabras clave: vector, producto, tipología.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

## Product point, cross and Triple product.

Abstract: Studying vectors, their characteristics and rules of operation is fundamental in different branches of science. The scalar product of two vectors has many applications. Location equipment, such as GPS, use position vectors from some satellites to determine the exact location of different objects; the architects must operate vectorially the efforts on the buildings and bridges; the sailboats can sail against the wind, if they manage that the component of the wind speed is directed forward; by knowing the position and velocity vectors of an aircraft, the flight path can be predicted.

Keywords: vector, product, typology.



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

## Competencias genéricas.

Son las que debe poseer un profesional para tener un comportamiento adecuado, tanto en lo laboral como en lo social. Para alcanzarlas es ineludible que exista una coherencia entre los programas educativos, el desempeño natural y el trabajo real de ese profesional en el ámbito local, nacional e incluso internacional.

El estudiante de la Licenciatura de Ingeniería Industrial desarrollará las siete competencias genéricas establecidas por la UAEH, con el apoyo de *todas las asignaturas* que integran este programa educativo.



# Competencias genéricas a desarrollar en el estudiante

- Pensamiento crítico: Aplicar el pensamiento crítico y autocrítico para identificar, plantear y resolver problemas por medio de los ***procesos de abstracción, análisis y síntesis.***
- Comunicación: Desarrollar en los estudiantes la capacidad de la comunicación en español y en un segundo idioma para su interacción social a través de ***signos y sistemas de mensajes que pueden ser orales o escritos, derivado del lenguaje y del pensamiento.***

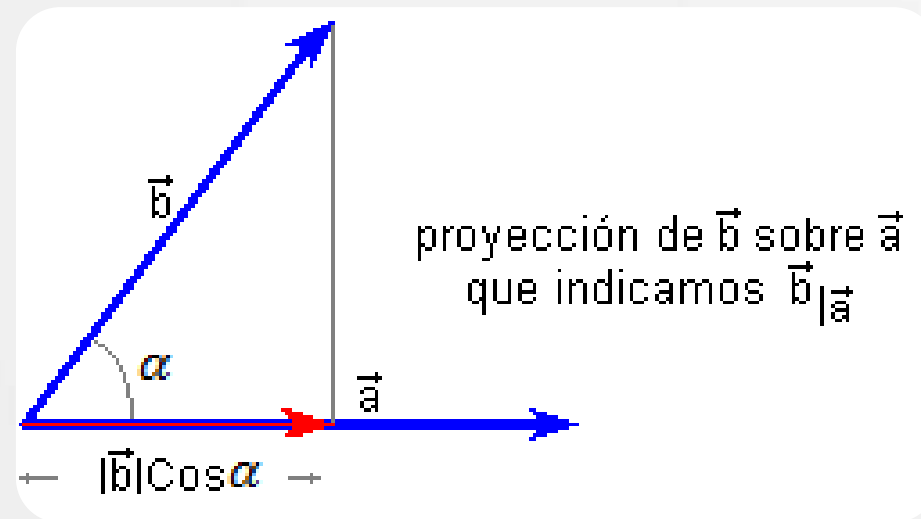


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

# INDICADORES

- Analiza las partes, cualidades, las múltiples relaciones, propiedades y componentes de un problema.
- Generalizan la solución de problemas.
- Valora lo aprendido y lo que necesita aprender.
- Expresa de forma oral y escrita ideas y pensamientos de manera coherente y lógica.

# Producto punto





## ¿Qué es?

En matemáticas, el **producto escalar**, también conocido como **producto interno**, **producto interior** o **producto punto**, es una aplicación cuyo dominio es  $V^2$  y su codominio es  $K$ , donde  $V$  es un espacio vectorial y  $K$  el conjunto de los escalares respectivo. Esta aplicación amplía la oportunidad de emplear los conceptos de la geometría euclídea tradicional: longitudes, ángulos, y ortogonalidad en dos y tres dimensiones.



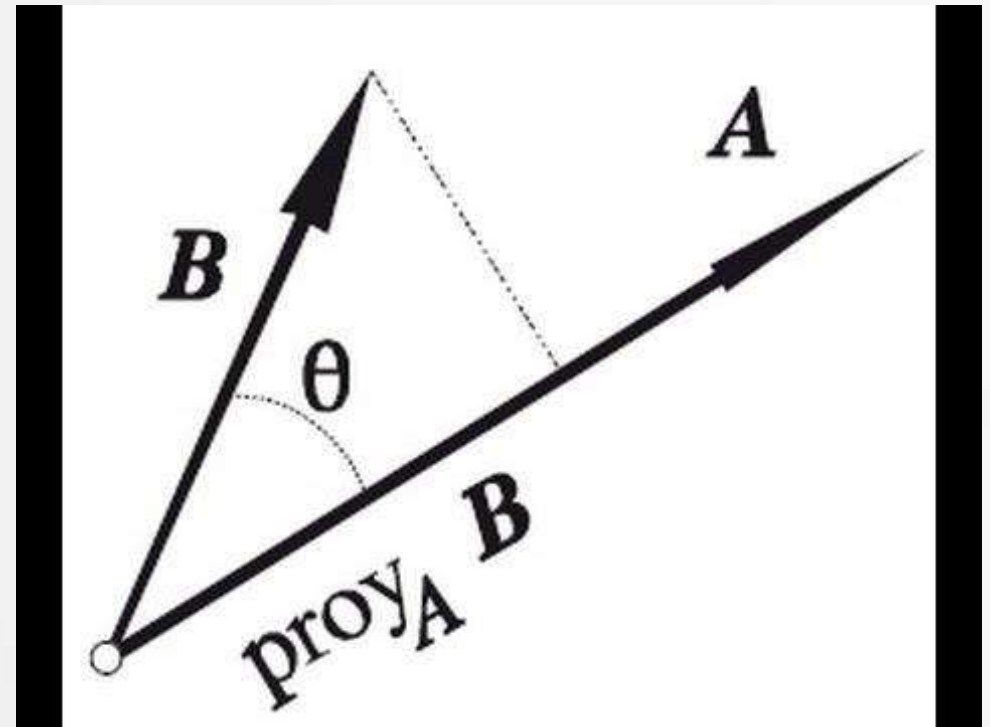


## PROPIEDADES

Conmutativa  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Asociativa  $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$

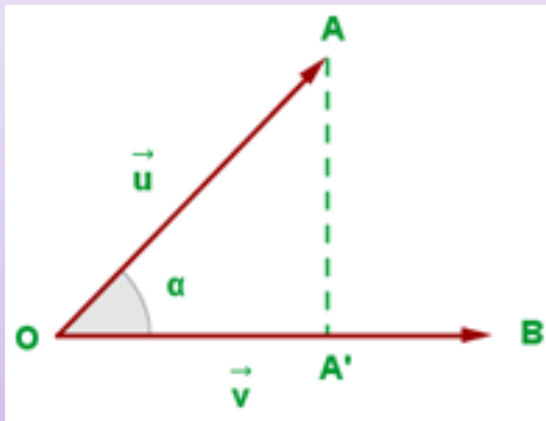
Distributiva  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$





## Interpretación geométrica

El producto de dos vectores no nulos es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.



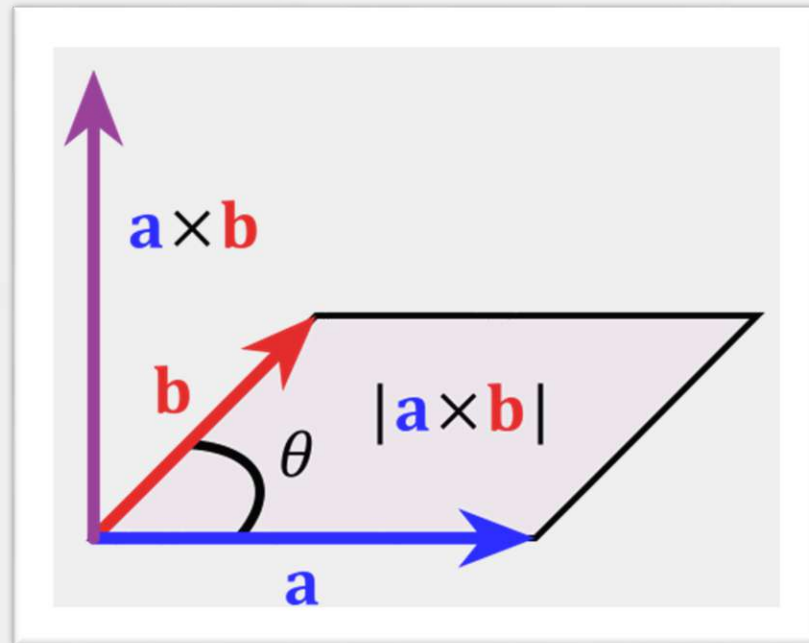
$$\cos \alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \quad OA' = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA' \quad OA' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

# Producto cruz





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

## ¿Qué es?

El **producto vectorial de Gibbs** o **producto cruz** es una operación binaria entre dos vectores en un espacio tridimensional. El resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican, y por lo tanto normal al plano que los contiene.

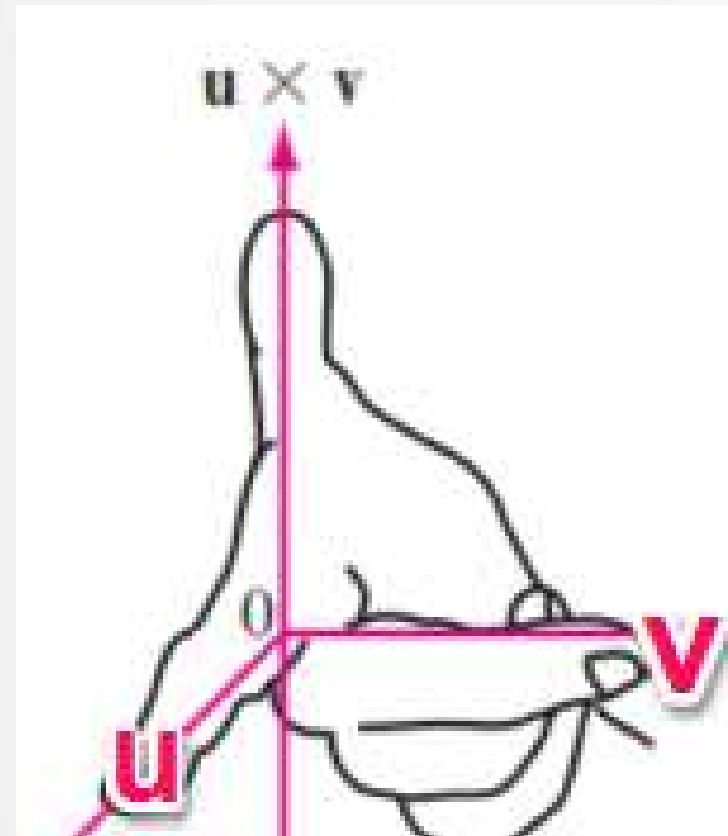


## PROPIEDADES

**Anticonmutativa**  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

**Homogénea**  $\lambda (\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$

**Distributiva**  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

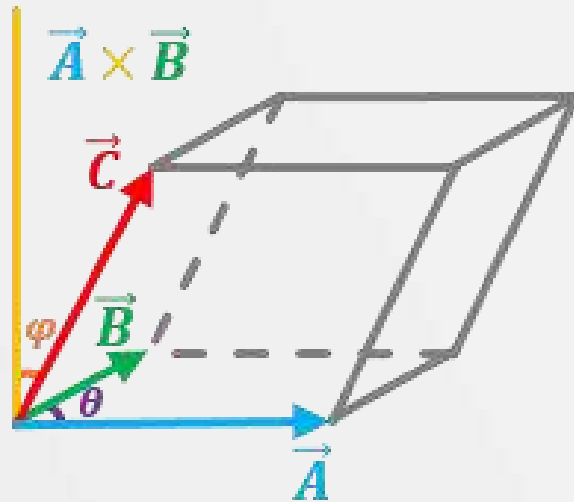




# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

- Estas propiedades se prueban mediante las propiedades de los determinantes. El vector  $u \times v$  es perpendicular a los vectores  $u$  y  $v$  simultáneamente, y por lo tanto, al plano que los contiene. Al igual que en la definición de un sistema de coordenadas derecho, el sentido del vector  $u \times v$  está determinado por la regla de la mano derecha: al orientar los dedos de la mano derecha excepto el pulgar, desde el vector  $u$  hasta el vector  $v$ , el vector  $u \times v$  apunta en la dirección del dedo pulgar.

# Triple Producto escalar (producto mixto)





## ¿Qué es?

- El **producto mixto** (o también conocido como **triple producto escalar**) es una operación entre tres vectores que combina el producto escalar con el producto vectorial para obtener un resultado escalar.
- Se puede calcular también como el determinante de la matriz que se forma con las componentes de los vectores.





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

- Para hallar una fórmula que permita calcular el valor del producto mixto a partir de las coordenadas de los vectores procedemos a realizar la sustitución del producto cruz:



# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO ESCUELA SUPERIOR DE CIUDAD SAHAGÚN

- Sean  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ . El triple producto escalar se define por:
- $u \cdot (v \times w) = u \cdot v \times w =$
- $u_1(v_2w_3 - w_2v_3) - u_2(v_1w_3 - w_1v_3) + u_3(v_1w_2 - w_1v_2) =$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



- El producto mixto de los vectores  $\vec{u}$   $\vec{v}$   $\vec{w}$  es igual al producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos.

El producto mixto se representa por  $( \vec{u} \vec{v} \vec{w} )$ .



- El **producto mixto** de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



## Ejemplo:

- Calcular el **producto mixto** de los vectores:

$$\vec{u} = (2, -1, 3) \quad \vec{v} = (0, 2, -5) \quad \vec{w} = (1, -1, -2)$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (2, -1, 3) \cdot (-9, -5, -2) = -18 + 5 - 6 = -19$$

# Referencias

## Triple producto escalar

- <http://depa.fquim.unam.mx/jesusht/cvvalineal.pdf>
- [http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro13/423\\_producto\\_punto\\_cruz\\_y\\_triple\\_producto.html](http://cidecame.uaeh.edu.mx/lcc/mapa/PROYECTO/libro13/423_producto_punto_cruz_y_triple_producto.html)

## Producto punto y producto cruz

- <http://maticasmodernas.com/vectores-producto-punto-y-producto-cruz/>
- <https://alejadk22.wordpress.com/actividades-de-clase/concepcion-del-producto-cruz-y-el-producto-punto/>

