Español / Inglés
Spanish / English

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
/ Hidalgo State Autonomous University

Instituto de Ciencias Básica e Ingeniería
/ Institute of Basic Sciences and Engineering

Asignatura: Cálculo Diferencial e Integral
/ Subject: Differential and Integral Calculus

Tema: Regla de l'Hôpital y Serie de Taylor: Métodos de solución múltiples para el análisis comparativo del comportamiento de funciones elementales

/ Topic: L'Hôpital Rule and Taylor series: Multiple solution methods for the comparative analysis of the behavior of elementary functions

Nombre de Profesora: Dra. Anna Tarasenko
/ Name of Professor: Dr. Anna Tarasenko

Secciones / **Sections**

Introducción / **Introduction**

Se presenta una introducción a los temas de la Regla de L'Hôpital y de la Serie de Taylor que entran en la mayoría de los programas de Cálculo a nivel universitario (ver la sección de Introducción abajo). Además se expone brevemente un tercer método que se puede usar para comparación de funciones: Comparación por Derivada de la Diferencia. Este material didáctico fue elaborado para el proyecto de investigación "Métodos de solución múltiples para el análisis comparativo del comportamiento de funciones elementales".
/ An introduction to the topics of L'Hôpital's Rule and Taylor series, that enter into the majority of university-level Calculus programs, is presented (see the Introduction section below). In addition, a third method that can be used to compare functions is briefly presented: Comparison by the Derivative of the Difference. This didactic material was prepared for the research project "Multiple solution methods for the comparative analysis of the behavior of elementary functions".

Objetivos / **Objectives**

Presentar varios métodos que pueden ser utilizados para comparar el comportamiento local de las funciones, inclusive la Regla de l'Hôpital, la Serie de Taylor y la Comparación por Derivada de la Diferencia .
/ To present several methods that can be used to compare the local behavior of functions, including L'Hôpital's Rule and Taylor Series and the Comparison of the Derivative of the Difference.

Desarrollo / **Development**

Ver la sección de Desarrollo abajo. Consiste de las siguientes secciones:
1. Regla de l'Hôpital
2. Serie de Taylor
3. Comparación por Derivada de la Diferencia

/ See the Development section below. It consists of the following subsections:
1. L'Hôpital's Rule
2. Taylor Series
3. Comparison of the Derivative of the Difference

Actividades / **Activities**

Ver la sección de Ejercicios abajo.
/ See the Exercises section below.

Conclusiones / **Conclusions**

Este material proporciona una revisión concisa de temas importantes de cálculo que pueden usarse para comparar el comportamiento local de funciones, entre otras aplicaciones. También se proponen tres ejercicios que se pueden utilizar para practicar estos temas.
/ This material provides a concise review of important Calculus topics that can be used to compare the local behavior of functions, among other applications. Three exercises that can be used to practice these topics are provided.

Bibliografía / **Bibliography**

Stewart, J. (2017). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas. Edición Ocho. CENGAGE learning.
/ Stewart, J. (2015). Single variable calculus: Early transcendentals. Eighth Edition. CENGAGE learning.

Instrumento para el Proyecto de Investigación:
Métodos de solución múltiples para el análisis comparativo del comportamiento de funciones elementales

Introducción

Consideren un ejercicio donde se les están dadas dos funciones, $f(x)$, $g(x)$, que ambas pasan a por el orígen. Se les pide decidir cuál de estas funciones es más grande que la otra por valores positivos de x muy pequeños. ¿Cómo lo harían?

Para algunas funciones, la respuesta es inmediatamente obvia. Por ejemplo, está claro que $x + 1$ es más grande que x para todos los valores de x. Sin embargo, en la mayoría de los casos la respuesta no es obvia.

Otra idea podría ser calcular el valor de cada función en un punto muy cercano con cero. Por ejemplo, $x = 0.0001$, y ver cuál de las funciones tiene un valor más alto en este punto. Sin embargo, este método solo nos dice cuál función es más grande en este punto. Sin embargo, podría existir una infinidad de puntos aún más cercanos a cero, donde esta situación podría ser invertida. Vamos a discutir brevemente tres diferentes métodos que pueden ser utilizados para comparar las funciones.

1. Regla de l'Hôpital

Cuando $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es igual a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, se puede usar la Regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En otras palabras, en este caso se puede sustituir a las funciones $f(x)$, $g(x)$ por sus derivadas. Claro, las derivadas de ambas funciones deben de existir para poder hacerlo.

¿Cómo se puede usar la Regla de l'Hôpital para comparar dos funciones?

Como recuerdan, la derivada se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado. En la regla de l'Hôpital aparece la razón de las pendientes:
$\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, lo cual es igual a $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.
El valor de esta razón cuando x tiende a cero nos permite comparar las pendientes de las dos funciones en el orígen. Cuando esta razón es estrictamente mayor o menor a uno, podemos concluir que la función $f(x)$ tiene pendiente más grande o menos grande que la de $g(x)$. La función con la mayor pendiente será por encima de la otra en un entorno muy cercano al orígen. Sin embargo, cuando la respuesta es 1, significa que ambas funciones tienen la misma pendiente, y no podemos decir cuál de las dos estará por encima de la otra en un entorno muy pequeño alrededor del origen. En este caso, otros métodos tienen que ser usados.

2. Serie de Taylor

La Serie de Taylor permite representar a una función diferenciable como un polinomio con infinitos términos:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

En este caso, las coeficientes a_0, a_1, a_2, $\dots$ se calculan con la fórmula: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, donde $f^{(n)}(0)$ representa a la enésima derivada de la función f, evaluada en $x = 0$ y $n!$ representa al producto de todos los números enteros positivos menores o iguales a n. Por ejemplo, $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.

¿Cómo puede ser usada la Serie de Taylor para comparar dos funciones?

La Serie de Taylor puede aproximar a cualquier función en forma de un polinomio. Cuando ambas funciones tienen la forma de un polinomio, puede ser más fácil compararlas que en su forma original. Sin embargo, este método involucra el cálculo de varias derivadas que tienen que ser evaluadas en $x = 0$, pero algunas de ellas pueden no existir en este punto. Por ejemplo, la función $f(x) = \sqrt{x}$ tiene la derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Esta derivada no puede ser evaluada para $x = 0$ debido a que tendría un cero en el denominador.

3. Comparación por Derivada de la Diferencia

Formemos la diferencia entre las dos funciones que queremos comprar, $f(x) - g(x)$. Si esta diferencia es positiva, significa que la primera función $f(x)$ es mayor que la segunda $g(x)$; si es negativa, significa que $f(x)$ es menor que $g(x)$, y si es cero, significa que ambas funciones son iguales. Entonces, para saber cuál de las dos funciones $f(x)$, $g(x)$ es más grande que la otra, solo tenemos que ver si su diferencia es positiva o negativa. Vamos a llamar a esta nueva función que describe la diferencia $r(x)$:

$$r(x) = f(x) - g(x)$$

Como ambas funciones $f(x)$, $g(x)$ pasan por el orígen, su función diferencia también es cero en el orígen, $r(0) = 0$. Una función que pasa por el orígen y después crece va a ser positiva, y una que pasa por el orígen y después decrece va a ser negativa. Para saber si la función $r(x)$ crece o decrece usamos su derivada: si la derivada de una función es positiva la función crece y si es negativa la función decrece. Entonces, podemos resumir el procedimiento en cuatro pasos:

a) Formamos la diferencia entre nuestras dos funciones: $r(x) = f(x) - g(x)$

b) Calculamos su derivada: $r'(x) = f'(x) - g'(x)$

c) Cuando la derivada de la diferencia es positiva, significa que $f(x)$ es mayor que $g(x)$

d) Cuando la derivada de la diferencia es negativa, significa que $g(x)$ es mayor que $f(x)$

¿Cómo puede ser usada la Derivada de la Diferencia para comparar dos funciones?

Para saber cuál de las dos funciones que pasan por el orígen es mayor que la otra, podemos comparar sus derivadas en vez de las funciones mismas. Esto tiene sentido para las funciones cuyas derivadas son más simples que las funciones mismas, por ejemplo, la derivada de x es 1, lo que es más simple que la función original.

Si $f'(x) - g'(x) > 0$, significa que $f(x) > g(x)$.

Si $f'(x) - g'(x) < 0$, significa que $g(x) > f(x)$.

Ejercicios

Ejercicio 1: ¿Cuál de las siguientes dos funciones es más grande que la otra para los valores de x positivos muy cercanos a cero: $f(x) = x$, $g(x) = sen(x)$? Explicar.

Ejercicio 2: ¿Cuál de las siguientes dos funciones es más grande que la otra para los valores de x positivos muy cercanos a cero: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$? Explicar.

Ejercicio 3: ¿Cuál de las siguientes dos funciones es más grande que la otra para los valores de x positivos muy cercanos a cero: $f(x) = 3x$, $g(x) = \sqrt{x}$? Explicar.

***Instrument for the Research Project**:*
Multiple solution methods for the comparative analysis of the behavior of elementary functions.

Introduction

Consider an exercise where you are given two functions, $f(x)$, $g(x)$, which both go through the origin. You are asked to decide which of these functions is bigger than the other for very small positive values of x. How would you approach this?

For some functions, the answer is immediately obvious. For example, it is clear that $x + 1$ is bigger that x for all values of x. However, in most cases the answer is not obvious.

Another idea might be to calculate the value of each function at a point very close to zero; for example, $x = 0.0001$, and see which function has a higher value at that point. However, this approach only tells us which function is bigger at that particular point. There could be an infinity of points even closer to zero, where this situation is reversed. We will briefly discuss three different approaches that can be used to compare the functions.

1. L'Hôpital's Rule

In the case when $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ equals $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$, l'Hôpital rule can be used:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

In other words, in this case it is possible to replace the functions $f(x)$, $g(x)$ by their derivatives. Of course, the derivatives of both functions have to exist for this to be valid.

How can it be used to compare two functions?

As you probably remember, the derivative can be interpreted as the slope of the tangent line to the function at a given point. Thus, in l'Hôpital's rule, a ratio of two slopes appears:
$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, which is equal to $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.
The value of this ratio when x tends to zero allows us to compare the slopes corresponding to the two functions at the origin. When this ratio is strictly greater or less than one, we can conclude that the function $f(x)$ has a slope greater or less than $g(x)$. The function with the greater slope will be above the other in a small vicinity close to the origin. However, when the answer is 1, this means that both functions have the same slope, and we cannot say which of the two will be above the other in a very small vicinity around the origin. In this case, other methods have to be used.

2. Taylor series

The Taylor series allows us to represent a differentiable function as a polynomial with infinite terms:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$$

In this case, the coefficients a_0, a_1, a_2, $\dots$ can be calculated with the formula: $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, where $f^{(n)}(0)$ represents the n-th derivative of the function f, evaluated at $x = 0$ and $n!$ represents the product of all the whole positive numbers less than or equal to n. For example, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

How can it be used to compare two functions?

Taylor series can approximate any function as a polynomial. When both of the functions are in the polynomial form, they may be easier to compare than in their original forms. However, this method involves the calculation of various derivatives which have to be evaluated at $x = 0$, and not all of them might exist at that point. For example, the function $f(x) = \sqrt{x}$ has the derivative $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. This derivative cannot be evaluated at $x = 0$ since it would have a zero in the denominator.

3. Comparison of the Derivative of the Difference

Let us form the difference between the two functions that we wish to compare, $f(x) - g(x)$. If this difference is positive, it means that the first function, $f(x)$, is greater than the second, $g(x)$; if it is negative, it means that $f(x)$ is smaller than $g(x)$, and if it is zero, it means that both functions are equal. Then, to find out which one of the two functions $f(x)$, $g(x)$ is greater than the other, we only have to see if their difference is positive or negative. Let us call this new function that describes the difference $r(x)$:

$$r(x) = f(x) - g(x)$$

Since both functions $f(x)$, $g(x)$ go through the origin, the function that represents their difference is also zero at the origin, $r(0) = 0$. A function that goes through the origin and then increases is going to be positive, and one that goes through the origin and then decreases is going to be negative. To know is the function $r(x)$ increases or decreases we use its derivative: if the derivative of a function is positive the function increases and if it is negative the function decreases. Thus, we can summarize the procedure in four steps:

- *a) Forming the difference between our two functions:* $r(x) = f(x) - g(x)$
- *b) Calculating its derivative:* $r'(x) = f'(x) - g'(x)$
- *c) When the derivative of the difference is positive, this means that $f(x)$ is above $g(x)$*
- *d) When the derivative of the difference is negative, this means that $g(x)$ is above $f(x)$*

How can it be used to compare two functions?

To find out which of the two functions that go through the origin is greater than the other, we can compare their derivatives instead of the functions themselves. This makes sense for functions the derivatives of which are more simple than the functions themselves, for example, the derivative of x is 1, which is more simple than the original function.

If $f'(x) - g'(x) > 0$, this means that $f(x) > g(x)$.

If $f'(x) - g'(x) < 0$, this means that $g(x) > f(x)$.

Exercises

Exercise 1: *¿Which of the following two functions is greater than the other for very small positive values of x: $f(x) = x$, $g(x) = sen(x)$? Please explain.*

Exercise 2: *¿Which of the following two functions is greater than the other for very small positive values of x: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$? Please explain.*

Exercise 2: *¿Which of the following two functions is greater than the other for very small positive values of x: $f(x) = 3x$, $g(x) = \sqrt{x}$? Please explain.*