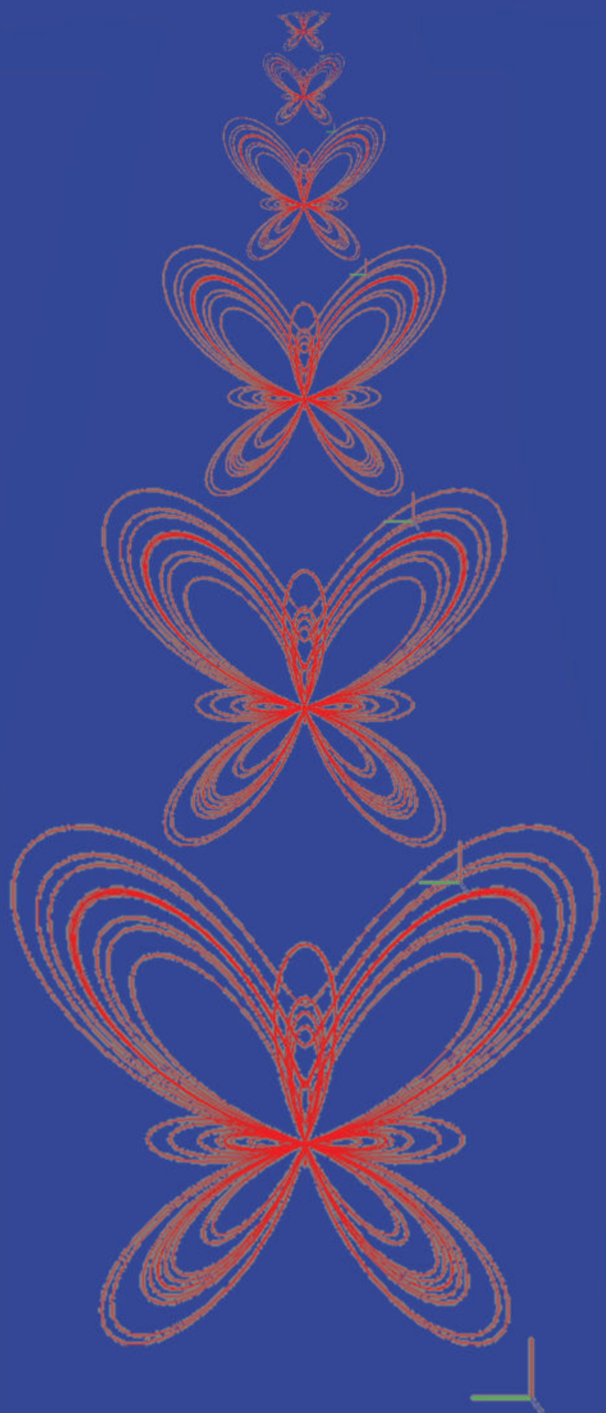
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas



Fernando Barrera Mora
Aarón Reyes Rodríguez

Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas

Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas

Fernando Barrera Mora
Aarón Reyes Rodríguez

Pachuca de Soto, Hidalgo
México, 2023

Primera edición electrónica: 2023

Abasolo 600, Col. Centro, Pachuca de Soto, Hidalgo, México, C.P. 42000
Dirección electrónica: editor@uaeh.edu.mx

ISBN: 978-607-482-811-5

Hecho en México/*Printed in México*

Índice

Presentación

En las agendas de varios grupos de investigadores en educación matemática se considera a la formación y actualización de docentes como una tarea prioritaria, tratando de identificar las características del rol que juega el profesor en la construcción del conocimiento de los estudiantes. Por esta razón, es de importancia que un problema de tal naturaleza sea abordado bajo una perspectiva que considere, entre otros elementos, un análisis profundo de los conocimientos mínimos, pero fundamentales, con que un docente en matemáticas debe contar para llevar a cabo su actividad con efectividad. En este trabajo se dicuten algunas ideas que tienen por finalidad aportar elementos que pudiesen ser un punto de partida para una reflexión tendiente a elaborar propuestas de programas de formación y actualización docentes.

Este texto forma parte de una colección de materiales didácticos que el Área Académica de Matemáticas y Física, como dependencia perteneciente a una de las instituciones públicas que se preocupa por el aprendizaje de los estudiantes, la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, se ha dado a la tarea de elaborar con la finalidad de contribuir y apoyar el proceso de formación docente en el área de matemáticas a nivel regional, estatal y nacional.

Se plantea una concepción sobre el proceso de formación docente, en el área de matemáticas, en la que los conocimientos de todo profesional de la docencia deben estar estructurados en torno a tres componentes esenciales:

a) conocimientos disciplinares
b) conocimientos sobre epistemología
c) conocimientos didácticos sobre los contenidos matemáticos.

Asimismo, se considera que la formación de todo docente de matemáticas es un proceso que se lleva a cabo durante toda la vida profesional, en primer término, como parte de los estudios que se requieren para obtener un título de licenciatura o posgrado y, en segundo término, como parte de un proceso de actualización continua dentro de una comunidad de práctica integrada por profesores, matemáticos y educadores matemáticos. En esta comunidad se discute y reflexiona sobre las problemáticas de aprendizaje de los estudiantes, los procesos de enseñanza y de evaluación, así como sobre la elaboración de propuestas orientadas a superar estas dificultades, entre las que se incluye el diseño o rediseño curricular.

Esperamos que este libro pueda ser de utilidad tanto para profesores como para educadores matemáticos y estudiantes de posgrado en educación matemática. Consideramos que si las reflexiones que tienen lugar en este texto pueden apoyar a mejorar la práctica docente de al menos un profesor, entonces habrá valido la pena el trabajo de escribirlo.

Introducción

La resolución de problemas es una perspectiva de aprendizaje que puede ofrecer diversas contribuciones al proceso de formación docente, ya que el aprendizaje de las matemáticas tiene analogías con la creación de nuevo conocimiento disciplinar y la aplicación de las matemáticas en la comprensión del mundo que nos rodea. En este sentido, el que un profesor proponga actividades en ambientes que promuevan el aprendizaje de los estudiantes requiere que los mismos docentes se hayan enfrentado a situaciones similares, que les ofreciesen oportunidades para desarrollar diversos elementos del pensamiento matemático, entre los que se encuentra la exploración y búsqueda de relaciones entre ideas y conceptos matemáticos, la formulación y justificación de conjeturas, la comunicación de resultados, el establecimiento de conexiones y la formulación de nuevos problemas matemáticos.

En relación con lo anterior, las características académicas de un profesional de la docencia en matemáticas requieren que sus conocimientos disciplinares y didácticos estén en permanente actualización. Para tal efecto, un ambiente propicio debe estructurarse en una comunidad profesional en la que se promueva la reflexión y la colaboración entre diversos actores, entre los que se encuentran, además de los profesores, matemáticos y educadores matemáticos. Cada uno de ellos tiene importantes elementos que aportar para entender el problema del aprendizaje. Los profesores son quienes enfrentan día a día en el salón de clase la compleja problemática del aprendizaje de las matemáticas, por lo que sus conocimientos deben incluir fundamentos y métodos diversos que les permitan abordar con éxito los grandes retos del aula. Los matemáticos, al desarrollar la disciplina, hacen aportaciones en lo que concierne a nuevos conocimientos y fundamentos. Finalmente, los educadores matemáticos aportan fundamentos y métodos que permiten elaborar propuestas de aprendizaje. Con la interacción de estos tres actores se puede lograr construir un ambiente de libre reflexión sobre los problemas educativos en el que se desarrollen propuestas encaminadas a superar tales dificultades. La temática que se aborda en este libro se ha establecido considerando las características que deben poseer los conocimientos de los profesores, los cuales deben ser de tres tipos: conocimientos disciplinares, conocimientos sobre teorías del aprendizaje y conocimientos sobre didáctica.

En el primer capítulo de este libro se aporta un diagnóstico breve de la educación matemática en nuestro país, haciendo referencia a los resultados obtenidos por los estudiantes de diversos niveles educativos en pruebas estandarizadas como PISA o ENLACE. En el segundo se bosquejan los elementos esenciales de lo que consideramos debería ser la formación docente. En el tercero se exponen los principales elementos que integran a los marcos de resolución de problemas, de las representaciones semióticas y de modelos y modelado. Se discute, además, cómo estos marcos pueden apoyar el proceso de formación docente, cuyo fin último es lograr que los estudiantes construyan un aprendizaje con entendimiento (Hiebert, 1997) y que desarrollen una forma matemática de pensar. El aprendizaje con entendimiento es importante ya que contribuirá a la formación de profesionales que posean habilidades y disposición para aplicar sus conocimientos matemáticos como una herramienta en la solución de problemas propios de su disciplina, o en la formación de ciudadanos reflexivos que utilicen las matemáticas en la toma de decisiones en sus actividades cotidianas.

En el cuarto capítulo se presentan algunas tareas de aprendizaje que hemos utilizado en cursos y talleres de formación docente y que consideramos pueden aportar elementos importantes en el diseño de tareas que los profesores pueden utilizar para apoyar la construcción de una comunidad de aprendizaje matemático en su salón de clase, comunidad en la que los estudiantes tengan oportunidades de problematizar su propio proceso de aprendizaje y desarrollar una actitud inquisitiva. Además, abordar estas tareas permitirá a los profesores revisar sus conocimientos matemáticos y reflexionar acerca de su aprendizaje.

En el quinto capítulo se bosquejan aspectos considerados relevantes durante la evaluación. Aquí se resalta especialmente la sensibilidad que debe tener el profesor para comprender que los estudiantes aprenden de formas diferentes, en función de los recursos que poseen en determinado momento y de las experiencias previas a las que se han enfrentado. Se realiza además una distinción entre evaluación y calificación, así como una reflexión acerca del impacto de las calificaciones en el desempeño de los estudiantes.

Finalmente, se lleva a cabo una síntesis de los aspectos revisados en los capítulos previos, con la finalidad de bosquejar la forma en que éstos se podrían estructurar en una propuesta de formación inicial y actualización continua (desarrollo profesional) de profesores de matemáticas, que a su vez contribuya a que los estudiantes cuenten con una educación que promueva el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas relevantes.

Capítulo I
Antecedentes sobre la problemática del aprendizaje de las matemáticas

Las matemáticas son el fundamento de la ciencia y la tecnología, y éstas, a su vez, son factores determinantes para el desarrollo y el bienestar social en diferentes niveles, de pequeñas comunidades a naciones. Las matemáticas influyen cada vez más sobre una amplia variedad de actividades de nuestra vida cotidiana, dado que los nuevos avances en medicina, telecomunicaciones o el cuidado del medio ambiente no serían posibles sin un conocimiento matemático sólido y amplio para ser aplicado. Así que contar con capital humano especializado en matemáticas es indispensable para asegurar el progreso económico y social de un país; además, la población en general debe disponer de una formación matemática básica, ya que para desempeñar una amplia gama de empleos o para tomar decisiones en la vida cotidiana (decidir cuál plan de telefonía móvil es el más conveniente, qué AFORE hay que elegir para obtener los mejores rendimientos o determinar si se está en posibilidades de adquirir un crédito hipotecario o automotriz), es indispensable contar con habilidades para pensar numéricamente, lo cual implica manejar apropiadamente datos e interpretar gráficas, así como creatividad para proponer formas novedosas o alternativas de resolver problemas.

Actualmente, la población mexicana está constituida principalmente por jóvenes, pero si no se fomenta su formación científica y cultural, se les dejará un país cada vez más dependiente del exterior, un país consumidor de tecnología extranjera. Como mencionan Aceff y Lluis (2006: 32), "Una patria sin cultura está destinada a ser absorbida y a no existir. La mayor inversión que puede crearse en un país es la que se destina a la formación de capital humano", porque hoy en día la posesión y aprovechamiento de este capital es el medio para crear bienestar material (Martín *et al.*, 2000).

A pesar de la importancia de las matemáticas en el desarrollo científico y tecnológico, es un hecho que existen problemáticas severas relacionadas con el aprendizaje de la disciplina. Sin embargo, estos problemas no son nuevos ni se circunscriben a un país o región particular; más bien se encuentran presentes en el ámbito internacional y en todos los niveles educativos, por lo que desde hace muchos años se han realizado diversos esfuerzos encaminados a entender esta problemática y a elaborar propuestas tendientes a resolver las principales dificultades.

En países desarrollados, como Estados Unidos, los problemas relativos a la formación matemática de los estudiantes se han identificado desde hace tiempo. En 1957, con el lanzamiento del satélite Sputnik, el gobierno de Estados Unidos se dio cuenta de que su país estaba en desventaja en las áreas de matemáticas y ciencia, comparado con los rusos. Por esta razón se destinó una gran cantidad de recursos a la creación de nuevos planes para la enseñanza de las matemáticas en secundaria y primaria. Este movimiento de reforma curricular fue conocido como *matemática moderna* o *nueva matemática*. Su característica más relevante fue la inclusión, en los niveles pre-universitarios, de ideas provenientes del álgebra abstracta, la topología, la lógica simbólica, la teoría de conjuntos y el álgebra de Boole; sin embargo, esta reforma no tuvo el éxito esperado (Kline, 2007). En una época más reciente (1998), se ha detectado una disminución en la proporción de la población estadounidense que obtiene doctorados en matemáticas, física o ingeniería, así como deficiencias en la educación matemática ofrecida en las universidades y se ha relacionado a estas problemáticas con problemas en la formación de los profesores de nivel básico. Algunos investigadores argumentan que si al terminar la educación primaria un estudiante no está interesado por la disciplina, es poco probable que éste siga una formación profesional en matemáticas (Connors, 1998).

En España también se han identificado diversas dificultades, una de ellas son sus bajos resultados en la prueba PISA en relación con el resto de los países de Europa. Por otra parte, un examen aplicado al final de la educación primaria muestra que entre el 30 y el 40 por ciento de los estudiantes tienen dificultades con las matemáticas. Un resultado similar se ha observado al analizar los exámenes de acceso a la universidad (Ruiz-López y Bosch-Betancor, 2007).

En el caso de Inglaterra, Vorderman *et al.* (2011) reportan que sólo la mitad de los estudiantes que asisten a los cursos para obtener el Certificado General de Educación Secundaria en Matemáticas (GCSE, por sus siglas en inglés) obtienen calificaciones satisfactorias[1] (C o una nota superior). Además, sólo el 15 por ciento de los estudiantes continúa estudiando matemáticas después de los 16 años, 25 por ciento de la población adulta carece de habilidades numéricas necesarias en el trabajo o en la vida cotidiana y sólo 25 por ciento de los nuevos grados otorgados corresponden a las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas, en contraste con China, en donde este porcentaje

1 Existen dos niveles de aptitud en el GCSE: el nivel 1 se adquiere al obtener una nota que va de la D a la G, mientras que el nivel 2 se adquiere al obtener desde una nota A* hasta una C. En Inglaterra, para acceder a diversos empleos o instituciones educativas se requiere el nivel 2 de GCSE en áreas como matemáticas, inglés y ciencias.

asciende a 50% (Norris, 2012).

1.1. Desempeño de los estudiantes mexicanos en pruebas estandarizadas

En México, el conocimiento matemático de los estudiantes que cursan diversos niveles educativos se evalúa, a escala nacional, a través de pruebas estandarizadas como la Evaluación Nacional de Logro Académico en los Centros Escolares (ENLACE), Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE), el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) o la prueba sobre Tendencias Internacionales en Matemáticas y el Estudio de las Ciencias (TIMSS).

La prueba PISA (Programme for Internacional Students Assesment) es una prueba estandarizada, avalada por la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE), la cual pretende medir el nivel de preparación de los estudiantes que concluyen el ciclo de educación obligatoria (estudiantes de 15 años de edad). La prueba tiene por finalidad evaluar la capacidad de los estudiantes para abordar situaciones problemáticas de "la vida real", así como los retos que implica participar en una sociedad del conocimiento. La temática de esta prueba incluye tres áreas principales: lectura, ciencias y matemáticas. La prueba se aplica cada tres años y en cada aplicación se hace énfasis en una de las áreas mencionadas (en 2003 el énfasis fue en el área de matemáticas). El desempeño de los estudiantes se evalúa considerando una escala de 700 puntos y, de acuerdo con el puntaje obtenido, los estudiantes se clasifican en seis niveles de desempeño, donde el nivel 0 es el más bajo y el nivel 6, el más alto.

TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) es una prueba avalada por la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), que tiene el objetivo de medir las tendencias en el logro en matemáticas y ciencias en los grados cuarto y octavo (cuarto de primaria y segundo de secundaria). Esta prueba se ha llevado a cabo desde 1995 cada cuatro años; en 2011 se llevó a cabo la quinta evaluación de este tipo. México participó únicamente en la evaluación de 1995, pero, por el bajo rendimiento de los estudiantes, se decidió no dar a conocer los resultados en los reportes internacionales (Beaton et al., 1996).

ENLACE es una prueba estandarizada que se aplica en los planteles públicos y privados del país. En la modalidad de educación básica, examina a estudiantes de tercero a sexto de primaria, así como todos los grados de secundaria en las asignaturas de español y matemáticas, y una asignatura adicional, la cual ha variado en cada uno de los años (en 2008, ciencias; en 2009, formación cívica y ética; en 2010, historia; en 2011, geografía; en 2012, nuevamente ciencias). En la modalidad de educación media superior se aplica a estudiantes que cursan el último año de bachillerato, con la finalidad de evaluar competencias disciplinarias básicas en compresión lectora y matemáticas.[2]

Por otra parte, los EXCALE son pruebas que evalúan contenidos curriculares, con el objetivo de ver los resultados educativos de grandes grupos de estudiantes: por modalidad, entidad, sexo y edad. Estas pruebas generalmente evalúan cuatro grandes áreas curriculares: español, matemáticas, ciencias naturales y ciencias sociales. Los EXCALE se aplican en tercero de prescolar, tercero de primaria, sexto de primaria y tercero de secundaria. Las puntuaciones de estas pruebas se presentan en una escala de 200 a 800 puntos. Para interpretar los resultados de los estudiantes se definieron cuatro niveles de logro educativo, las cuales representan categorías amplias de habilidades y conocimientos que poseen los estudiantes evaluados. Los niveles de logro que se utilizan son: avanzado, medio, básico y por debajo del básico (INEE, 2009)

Los resultados de las pruebas estandarizadas anteriores ofrecen información que ha permitido detectar diversas problemáticas de aprendizaje de los estudiantes, las cuales incluso se reportan en documentos de programas estratégicos nacionales. Por ejemplo, en el Plan Nacional de Desarrollo 2007-2012 se indica que los estudiantes de primaria y secundaria, por lo general, presentan un bajo desempeño en Matemáticas (PND 2007-2012: 177). De la misma forma, diversos medios informativos nacionales reiteradamente han señalado que existen deficiencias en el aprendizaje matemático de los estudiantes.

En el nivel bachillerato, de acuerdo con la prueba ENLACE 2008, el 84.4 por ciento de los estudiantes obtuvo un nivel insuficiente en matemáticas (Avilés, 2008), mientras que para 2009 este porcentaje fue de 81 por ciento (Avilés, 2009; Fernández-Vega, 2009; Poy, 2009b) y en 2012 de 69.2 (Avilés, 2012). Los estudiantes que pertenecen a las categorías insuficiente y elemental únicamente saben efectuar operaciones aritméticas básicas como sumar o restar, pero no resolver problemas que requieren más que la aplicación de algoritmos. Estos resultados de los estudiantes pueden estar relacionados con algunas deficiencias relativas a la formación profesional de los docentes. Por ejemplo, se ha documentado que alrededor de 40 por ciento de los profesores de bachillerato no tienen un título que avale sus conocimientos (Avilés, 2009; Olivares-Alonso, 2009). Asimismo, los conocimientos didáctico-disciplinares de estos profesores son deficientes.

En lo que respecta al nivel de secundaria, los resultados no son más alentadores. De acuerdo con la prueba ENLACE correspondientes al año 2007,

2 http://www.enlace.sep.gob.mx/que_es_enlace/

el 94.4 por ciento de los estudiantes obtuvieron un nivel insuficiente (Avilés, 2007), mientras que para 2009 y 2010 los porcentajes fueron de 90.6 (Poy, 2009a) y 52.6 (Boletín Informativo Enlace 2010), respectivamente. En esta misma línea de ideas, los resultados de EXCALE 2008 en el área de matemáticas señalan que el 52 por ciento de los estudiantes de tercero de secundaria se ubican en el nivel por debajo del básico; es decir, tan sólo uno de cada dos estudiantes que concluyen este nivel educativo "cuentan con los elementos para seguir progresando en Matemáticas en sus estudios posteriores" (Xique y León, 2009: 102).

Por otra parte, en la prueba PISA 2003 el puntaje promedio de los estudiantes mexicanos fue de 385 puntos, lo que equivale a un Nivel 1 de desempeño. Durante ese año, México quedó en el lugar 37 de entre 40 países participantes y en último lugar de los países integrantes de la OCDE. Más aún, se reporta que el 65.9 por ciento de los estudiantes evaluados se ubicaron en los niveles 0 y 1, es decir, más de la mitad de los estudiantes de quince años en México no cuenta con las habilidades matemáticas mínimas para insertarse en el mercado laboral (Cortina, 2006).

En la prueba PISA 2006, México obtuvo una media global en matemáticas de 406 puntos, mientras que en la prueba 2009 la media global fue de 419 puntos (OECD, 2010), lo cual ubicó al promedio de los estudiantes de nuestro país nuevamente en el nivel 1 de desempeño. Aquellos estudiantes que se encuentran en el nivel 1, únicamente pueden contestar preguntas que aparecen en contextos familiares, en los que está presente toda la información relevante y las preguntas están claramente definidas, así como identificar información y desarrollar procedimientos rutinarios a partir de instrucciones directas en situaciones explícitas (INEE, 2007). Otro dato relevante es que en 2006 el 56 por ciento de los estudiantes examinados se clasificaron en los niveles 0 y 1 de desempeño, mientras que en la prueba 2009 fue el 51 por ciento. La competencia matemática que poseen los estudiantes que pertenecen a estos niveles es insuficiente para que se integren a estudios superiores, ya que el nivel 2 representa el mínimo necesario para que una persona se desenvuelva de forma apropiada en una sociedad del conocimiento, por lo que si en un país una proporción importante de los estudiantes no alcanza el nivel 2 de desempeño, se considera que la sociedad está fallando en preparar adecuadamente a sus futuros ciudadanos (INEE, 2010).

Enfatizamos que estas cifras pueden tener relación directa con los conocimientos de los profesores, pues de acuerdo con los resultados obtenidos en algunas pruebas, como la Evaluación Universal de Docentes y Directivos en Servicio de Educación Básica,[3] cuya primera aplicación fue en 2012 y

3 De acuerdo con la Secretaría de Educación Pública federal, la Evaluación Universal tiene el propósito

correspondió a profesores de primaria, los profesores muestran un bajo dominio del conocimiento disciplinar. En esta evaluación se identificó que 98 mil 836 docentes (el 37.4 por ciento de quienes presentaron la prueba) requieren "atención inmediata" en diversas asignaturas. Particularmente, 15 mil 475 deben recibir capacitación en "pensamiento matemático" (Avilés, 2012b). Asimismo, los resultados del Concurso Nacional de Plazas Docentes muestran que el 70.1 por ciento de los aspirantes en el año 2012 (94 mil 440) obtuvo una calificación equivalente a "reprobados" (Martínez, 2012). Estos resultados han sido reiterativos (últimos tres años) en los exámenes que se aplican a docentes al concursar para ocupar una plaza.

1.2. Los exámenes escritos y su relación con el pensamiento matemático

No obstante que los resultados expuestos con anterioridad pueden ser indicadores de algunas deficiencias tanto en la educación matemática de los estudiantes como en la formación de los profesores, hay que interpretar la información con reservas ya que estas pruebas tienen limitaciones inherentes a la forma en que se obtiene la información. La mayoría de estas pruebas son escritas y, por lo tanto, aportan información limitada acerca del desempeño de los estudiantes, ya que las preguntas que las integran no dan cuenta de los procesos y cualidades de razonamiento que los estudiantes pueden exhibir en el proceso de solución de problemas (Santos-Trigo y Vargas-Jarillo, 2003). El objetivo de la instrucción matemática es que los estudiantes sean capaces de plantear problemas nuevos y resolverlos mediante la aplicación de sus conocimientos previos, que den significado a los conceptos, que encuentren sentido a las justificaciones y comuniquen resultados, pero todo lo anterior no puede valorarse mediante una prueba escrita (Grimison, 1992; Watt, 2005). Los exámenes habituales requieren que los estudiantes respondan a un conjunto de preguntas en un tiempo determinado; sin embargo, resolver un problema, es decir, una tarea para la cual no se conoce un algoritmo o procedimiento que conduzca a la solución de forma inmediata, requiere examinar la información del problema —y en ocasiones buscar información adicional— así como

de "contribuir, a través de una evaluación diagnóstico-formativa de los participantes, a la mejora de la eficacia de sus prácticas de enseñanza que impacten en la mejora del aprovechamiento escolar de los alumnos del Sistema Nacional de Educación Básica". Por otra parte, los objetivos de la evaluación son cuatro: *1)* ofrecer a los docentes diagnósticos de sus competencias profesionales, así como del logro académico de sus alumnos, *2)* focalizar los trayectos de formación continua en las áreas de oportunidad detectadas a través de los diagnósticos de los participantes, *3)* orientar y consolidar la calidad y pertinencia de los trayectos formativos y de los programas académicos de educación básica y normal, a través de los resultados obtenidos, y *4)* generar estrategias oportunas que coadyuven a los docentes en su desempeño profesional, redundando así en el logro académico de los alumnos y en la mejora de la calidad de la educación. http://www.evaluacionuniversal.sep.gob.mx/uno.htm reflexionar y madurar ideas, para lo cual se requiere de un tiempo que excede el límite que regularmente se proporciona para la realización de un examen escrito.

Los exámenes o pruebas escritas en matemáticas generalmente requieren que los estudiantes reproduzcan información o procedimientos aprendidos previamente; su objetivo es determinar la capacidad de aprender de memoria y llevar a cabo un razonamiento imitativo (Bergqvits, 2007). Si esto no fuera así, y el objetivo de los exámenes fuera conocer la capacidad del estudiante para pensar, razonar creativamente, o reflexionar, ¿por qué no se permite el uso de libros en los exámenes? ¿En qué podría afectar el uso de libros a los procesos de pensamiento, razonamiento creativo y reflexión? (Kline, 2007). Adicionalmente, se ha documentado que pruebas estandarizadas como ENLACE presentan algunas deficiencias metodológicas debidas a la mala redacción de las preguntas o a su poca e incluso nula utilidad para evaluar conocimientos o habilidades matemáticas relevantes (Imaz-Jahnke y Santos-Trigo, 2010).

24. Edna dice que la edad de su abuelita Sofía está dada por la siguiente ecuación:

$x^2 - 6 = 58$

Si **x** es igual a la edad de Edna, ¿cuál es la edad de ella?

A) 6 años.
B) 8 años.
C) 52 años.
D) 64 años.

Figura 1.1. Problema de la prueba Enlace 2009, tercero de secundaria.

En el problema que se muestra en la figura 1.1, se indica que la edad de la abuelita de Edna está dada por una ecuación; sin embargo, esta afirmación carece de sentido, ya que una ecuación representa una relación entre dos o más cantidades. Por otra parte, no queda claro si con la palabra “ella” se hace referencia a Edna o a la Abuelita de Edna. En todo caso, la pregunta podría haberse planteado como sigue: “Si x es igual a la edad de Edna y se sabe que la edad de Edna satisface la ecuación $x^2 - 6 = 58$. ¿Cuántos años tiene Edna?" Así, puede observarse que la inclusión del dato de la edad de la abuelita es irrelevante y su único objetivo es confundir al estudiante. Por otra parte, aún si se elimina el dato de la edad de la abuelita, el contexto del problema es completamente artificial y da una falsa idea de la aplicabilidad de las matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana (Imaz-Jahnke y Santos-Trigo, 2010).

Por otra parte, contestar correctamente un examen o cuestionario no necesariamente indica que se ha aprendido matemáticas; por ejemplo, se ha obtenido evidencia de que estudiantes con buenos resultados en pruebas estandarizadas tienen dificultades para razonar matemáticamente, es decir, no son capaces de llevar a cabo procesos centrales del pensamiento matemático tales como explorar relaciones entre objetos matemáticos, identificar patrones, formular y justificar conjeturas, proponer nuevos problemas, comunicar resultados, construir significados o elaborar modelos matemáticos. Por ejemplo, Santos-Trigo y Vargas-Jarillo (2003) citan algunos resultados en los que estudiantes coreanos de sexto año, quienes generalmente ocupan los primeros lugares en TIMMS o PISA,[4] mostraron dificultades para entender el significado de las operaciones aritméticas, así como para aplicar e interpretar estas operaciones en distintos contextos[5]. A los estudiantes se les pidió formular un problema (*word problem*) que involucrara las siguientes operaciones con fracciones: (a) $4\left(\frac{1}{6}\right)+\frac{3}{4}$, y (b) $\left(\frac{4}{3}\right)\times 6$. Algunas respuestas de los estudiantes fueron: *a)* "Había 4 (1/6) de gorila en el zoológico. El propietario compró (3/4) más de gorila. ¿Cuál es el número total de gorilas en el zoológico?", y *b)* "La edad de su papá es cuatro tercios de la edad de Minji. La edad de Minji es 6. ¿Qué edad tiene su papá?" (*op. cit.*: 13).

Se ha documentado que incluso estudiantes que han obtenido buenas calificaciones en sus cursos de matemáticas tienen dificultades para aplicar sus conocimientos en la resolución de problemas no-rutinarios, es decir, problemas para los cuales no se les ha enseñado un algoritmo o procedimiento que permita obtener la solución inmediatamente (Selden, Selden, Hauk y Mason, 2000). Estudiantes que han obtenido notas de A o B[6] en sus cursos de cálculo no hacen uso de las herramientas o técnicas revisadas durante el curso para abordar problemas no rutinarios (Tabla 1), más bien utilizan procedimientos aritméticos y

4 De acuerdo con el informe PISA 2003 (OCDE, 2004), Corea se ubicó en el cuarto lugar del *ranking* general en lo que respecta a la prueba de 2003. Asimismo, en la prueba TIMSS 2007, Corea se colocó entre los tres primeros lugares de desempeño (Mullis, Martin y Foy, 2008).

5 Estos resultados se pueden consultar en la dirección electrónica http://www.arthurhu.com/99/01/korea.txt (la página se encuentra escrita en inglés).

6 En la mayoría de las escuelas en Estados Unidos, desde primaria hasta bachillerato, se utiliza un sistema de calificaciones basado en las letras A, B, C, D y, en ocasiones, E y F. Sin embargo, no existe un estándar nacional para las escalas de calificaciones. En el nivel superior también se utiliza un sistema con letras: A-Excelente, B-Bueno, C-Regular y D o F que significa reprobado.

técnicas algebraicas sofisticadas, a pesar de que no son apropiadas. También se ha observado que en pocos casos se usan aproximaciones gráficas para tratar de resolver problemas (Selden, Selden y Mason, 1994).

1	Encuentra valores de a y b tales que la recta $2x + 3y = a$ sea tangente a la gráfica de $f(x) = bx^2$ en el punto donde $x = 3$.
2	¿La función $f(x) = x^{21} + x^{19} - x^{-1} + 2$ tiene raíces en el intervalo $(-1,0)$? ¿Por qué sí o por qué no?
3	Sea $f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1, & x > 1 \end{cases}$. Encuentra valores de a y b tales que f sea diferenciable en 1.
4	Encuentra al menos una solución de la ecuación $4x^3 - x^4 = 30$ o explica por qué no existe solución.
5	¿Hay una a tal que $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3ax+x-a-1}{x^2-2x-3}$ exista?

Tabla 1.1. Problemas no-rutinarios utilizados por Selden et al. (1994, 2000).

El problema 2 es interesante pues la mayoría de los estudiantes intenta resolverlo calculando las raíces de la función. Sin embargo, lo anterior no es necesario para dar una respuesta: el problema se puede resolver utilizando herramientas elementales de cálculo y un razonamiento creativo. La derivada de la función f es $f'(x) = 21x^{20} + 19x^{18} + x^{-2}$. De la expresión algebraica de f' se puede deducir que ésta es positiva para toda $x \in (-1,0)$, por ser una suma de potencias pares de x. Por otra parte, un resultado de cálculo elemental nos asegura que si $f' > 0$ para toda x de un intervalo (a, b), entonces f es creciente en ese intervalo (Spivak, 2010: 269). Además, como $f(-1) =$1 se concluye que f no tiene raíces en el intervalo (-1,0).

En esta misma línea de ideas, Schoenfeld (1985) documentó que estudiantes talentosos de los primeros años de licenciatura tuvieron dificultades para usar eficientemente sus recursos matemáticos en la resolución de problemas no rutinarios en geometría plana, los cuales no requieren de herramientas matemáticas sofisticadas para resolverse, sino más bien de creatividad y habilidades para razonar. Ejemplos de esos problemas son los siguientes:

1. Sean l_1 y l_2 dos rectas que se intersectan. Sea P un punto sobre l_1. Construye con regla y compás una circunferencia tangente a ambas rectas de tal forma que P sea uno de los puntos de tangencia.

2. Sea ABC un triángulo. Muestra que siempre es posible construir, con regla y compás, una recta paralela al lado AB de forma que divida al triángulo en dos partes de igual área.

Evaluar el desempeño de los profesores representa una situación aún más complicada que la evaluación de los estudiantes, ya que es difícil determinar cuáles son los conocimientos o habilidades relevantes que determinan un buen desempeño profesional, dadas las diversas problemáticas que tienen que atender los docentes y los contextos específicos en los que éstas tienen lugar. Es un hecho que los profesores deben disponer de una cultura general básica, sin embargo, consideramos que no es posible evaluar, a través de una misma prueba, a un profesor experto en enseñar a leer y escribir a estudiantes de los primeros grados de primaria que a un buen profesor de sexto de primaria, porque el primero tal vez haya olvidado algunos hechos históricos o geográficos o cómo resolver problemas de variación proporcional inversa, ya que tales hechos no son fundamentales para la función docente que lleva a cabo; es decir, no le son de utilidad para resolver problemas con los que se enfrenta en su quehacer diario en el aula, a diferencia del segundo, quien constantemente revisa esos contenidos con sus estudiantes. De acuerdo con Harel (1994), el conocimiento de los profesores debería promoverse y evaluarse en términos de valores relevantes en cada disciplina, y no en términos de habilidades específicas, manejo de conceptos o manipulaciones simbólicas.

¿Cuáles son algunas de las causas por las que los estudiantes muestran dificultades para pensar o razonar matemáticamente? Algunos estudios sugieren que el bajo desempeño de los estudiantes en lectura, ciencias y matemáticas se relaciona con aproximaciones didácticas en las que se privilegian procedimientos rutinarios y el desarrollo de habilidades para la memorización y la aplicación de algoritmos (INEE, 2007: 235) o con una cultura en la que se privilegia enseñar para aprobar los exámenes (Norris, 2012) y en la que se considera que los conocimientos escolares tienen poca o nula aplicabilidad en la resolución de problemas reales. Respecto a este último punto, Hiebert *et al.* (1997: viii) mencionan que al cuestionar a un estudiante de sexto grado si la afirmación "si una niña tiene tres hermanos, entonces dos niñas tienen seis hermanos", tenía sentido, el estudiante contestó que ésta realmente no tenía sentido en la vida cotidiana, pero como la pregunta era de la clase de matemáticas, seguramente ahí sí tenía sentido.

Lo mencionado con anterioridad es un indicador de que el tipo de experiencias de instrucción que los profesores ofrecen a los estudiantes y la cultura del salón de clase determina el tipo de aprendizaje que éstos logran construir (Harel, 1997). Por otra parte, el tipo de actividades y escenarios de instrucción que los profesores son capaces de diseñar y poner en práctica se relaciona con las experiencias a las que ellos mismos se han enfrentado durante su proceso de formación profesional y a las creencias sobre lo que son las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina que se forjaron durante su educación escolarizada.

Aunado a las posibles carencias en los conocimientos de los profesores, es importante reconocer que las condiciones laborales de muchos de ellos, en todos los niveles educativos, pero en mayor medida en los niveles bachillerato o superior, no son las óptimas. Los profesores comúnmente tienen una sobrecarga de horas frente a grupo, necesitan trabajar en más de una institución educativa o en actividades diferentes a la docencia y hay una falta de reconocimiento a las actividades adicionales que realizan como parte de su tarea docente —preparación de clases, calificación de tareas o trabajos, impartición de asesorías o tutorías, por citar algunos casos—. También es un hecho que existe carencia de espacios, equipos y materiales apropiados para diseñar e implementar actividades de instrucción, elaborar materiales didácticos, impartir asesorías a los estudiantes o para que los profesores se mantengan informados de los avances más recientes de investigación, debido a que incluso en algunas universidades en las que se ofrecen programas de posgrado en educación matemática, la literatura especializada es escasa, debido principalmente a los costos que implica la compra de libros, la subscripción a revistas o el acceso a sitios de Internet especializados como JSTOR, ELSEVIER o el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Adicionalmente, se tiene la limitante de que los resultados de la investigación relacionada con el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas son publicados principalmente en inglés.

Por otra parte, aspectos institucionales derivados de los programas de estudio, en los que se exige que el profesor aborde una gran cantidad de contenidos en un tiempo muy corto, o requerimientos para restringir las actividades en la clase a aquéllas que aparecen en los libros de texto, son factores que limitan el que los profesores propongan tareas y formas de trabajo innovadoras. De acuerdo con Latapí (2003), la escuela, por lo general, da prioridad a actividades no sustantivas (festejos, concursos, comisiones, llenado de informes y formularios, reuniones, entre otras) que consumen gran cantidad de tiempo y se le impone al profesor como obligación "cubrir el programa" a toda costa, lo cual no permite que el docente atienda las problemáticas particulares de sus estudiantes.

Diversas investigaciones en educación matemática coinciden en establecer que un aspecto importante para el mejoramiento de los conocimientos matemáticos de los estudiantes y, en general, para el desarrollo armónico de sus facultades cognitivas consiste en colocar en cada salón de clases a profesores altamente preparados (Sowder, 2007). Para tal fin, los programas de formación y actualización de profesores deben estructurar y unificar tres conjuntos de conocimientos que son esenciales para la actividad docente: *a)* matemáticas, *b)* epistemología y *c)* didáctica (Harel, 1994; Harel y Lim, 2004; Shulman, 1987). Adicionalmente, se sugiere que estos programas estén organizados de forma tal que permitan a los profesores participar en comunidades profesionales en donde tengan la oportunidad de reflexionar e intercambiar ideas que sustenten y amplíen sus conocimientos matemáticos y didácticos (Santos-Trigo, 2008), de forma que la formación inicial y el desarrollo profesional se conciba como un proceso permanente que contribuya al desarrollo del individuo y a la transformación de la sociedad (Ley General de Educación, art. 1°). En la constitución de estas comunidades se resalta la importancia de la participación de matemáticos y educadores matemáticos.

Pero, ¿qué significa formar profesionales de la enseñanza de las matemáticas?, y ¿cuál es el papel que deben jugar las instituciones nacionales de educación superior, principalmente las universidades públicas, en la formación y actualización de los profesores de los diferentes niveles? En México, la formación de los profesores de educación básica, educación prescolar, primaria y secundaria, ha estado a cargo de las escuelas normales y la Universidad Pedagógica Nacional.

1.3. La escuela normal y la formación docente en México

El origen de las escuelas normales se remonta a finales del siglo XIX y principios del XX. En 1887 se creó en la ciudad de México la Escuela Normal para Profesores, y el año siguiente la antigua Secundaria para Señoritas se transformó en Escuela Normal para Profesoras. Para 1900 se encontraban en funcionamiento aproximadamente 45 normales en México (Robles-Sánchez, 2012). Sin embargo, estas instituciones educativas sufrieron una crisis derivada del movimiento armado revolucionario (1910-1917), la cual se extendió incluso hasta el gobierno de Venustiano Carranza (1917-1920). En esta época las condiciones económicas de los profesores eran difíciles debido en parte a la desaparición de la Secretaría de Instrucción y a la delegación del control de las escuelas a los municipios, los cuales carecían de recursos para cubrir los salarios de los profesores. En la segunda década del siglo pasado se inició una reestructuración de las normales a cargo de la Secretaría de Educación Pública.[7] El primer objetivo de la reestructuración estuvo orientado por una expansión de la instrucción a partir del impulso de las escuelas rurales. La rapidez en la creación de estas escuelas propició que en un principio se

7 A través de la publicación de un decreto en el *Diario Oficial de la Federación* (DOF), se creó la Secretaría de Educación Pública el 3 de octubre de 1921. El 12 de octubre del mismo año, José Vasconcelos asumió la titularidad de esta Secretaría. http://www.sep.gob.mx/es/sep1/sep1_Historia_de_la_SEP#.UK-nH4fhKSo

contratara a maestros con poca preparación, ya que las normales urbanas no podían satisfacer la demanda de docentes. Derivado de la situación anterior se organizaron las primeras normales rurales (Kovacs, 1983). Es importante considerar que en sus orígenes la educación normalista no tenía el carácter de educación de nivel superior, ya que la formación en las escuelas normales rurales se llevaba a cabo en un periodo de dos años posteriores a la educación secundaria, aunque cabe resaltar que el plan de estudios de la Escuela Nacional de Maestros era de seis años (Santillán-Nieto, sf).

En el periodo postrevolucionario, el normalismo obtuvo prestigio debido a las políticas de alfabetización y educación básica promovidas por el Estado (Andión-Gamboa, 2011). Durante el periodo de José Vasconcelos como secretario de Educación Pública, el maestro tenía la misión de promover la justicia y el bienestar de la sociedad, mientras que durante el cardenismo los maestros se consideraban como transformadores de la sociedad. Durante esta época los profesores estuvieron más ligados al pueblo y sus necesidades, principalmente en las comunidades rurales.

En 1924, la Escuela Normal para Profesores se transformó en la Escuela Nacional de Maestros (hoy Centenaria Benemérita Escuela Nacional de Maestros), con el objetivo de preparar y capacitar a docentes de los niveles de preescolar, primaria y secundaria. En 1942 se crea la Escuela Normal Superior de México para profesionalizar específicamente a los maestros de secundaria (Hernández-Morales, 2011) con un programa de cuatro años posteriores al bachillerato. Durante las décadas de 1960 y 1970 del siglo pasado, como consecuencia de la expansión de la educación básica, se ampliaron y diversificaron los servicios de educación normal. En esta época, la necesidad de incorporar personal docente a las escuelas primarias condujo a la contratación de profesores mediante procesos de selección poco rigurosos (SEP, 2003). En 1978 se crea la Universidad Pedagógica Nacional (UPN)[8] con la intención de que se convirtiera en la institución rectora del sistema nacional de formación de maestros. La UPN es una institución con dos sistemas: el escolarizado (que se desarrolla en la Unidad Ajusco en el Distrito Federal, la cual fue concebida como un centro de investigación educativa y docencia de alto nivel) y el de educación a distancia (en las unidades UPN del resto del país, que funciona como una universidad orientada a la formación del magisterio en servicio). Sin embargo, de acuerdo con Latapí (2003), la UPN no ha encontrado su lugar en el contexto educativo nacional ya que desempeña funciones de docencia e

8 La Universidad Pedagógica Nacional es una institución pública de educación superior, creada por decreto presidencial el 25 de agosto de 1978. La UPN inició labores formales el 12 de marzo de 1979, ofreciendo carreras a nivel licenciatura entre las que se encontraban sociología y psicología de la educación, pedagogía, administración educativa y educación básica. Los estudios de posgrado, con especialización en planeación y administración educativa, iniciaron el 23 de abril de ese mismo año. (Kovacs, 1983).

investigación escasamente relacionadas con sus propósitos originales. En 1984, los estudios de educación normal, orientada a formar profesores de primaria, adquirieron el nivel de licenciatura —siendo requisito de ingreso contar con el bachillerato—, por lo que la población que demandaba ingreso a la UPN disminuyó considerablemente.

A diferencia lo que sucede en el nuestro, en países como Estados Unidos, Inglaterra o España la formación de los docentes de todos los niveles está a cargo de las universidades; sin embargo en muchos casos es una formación que no se encuentra estructurada, ya que por un lado, los futuros profesores cursan algunas materias de matemáticas en las facultades de ciencias y algunos cursos de didáctica en las facultades de educación.

Es innegable que las normales han desempeñado una función de gran relevancia en la formación de profesores de educación básica; sin embargo, se han identificado algunas características de estas instituciones sobre las cuales es importante reflexionar. Se puede mencionar, por ejemplo, la endogamia de la formación docente, la cual produce una especie de blindaje para aprender cosas diferentes (Latapí, 2003) o la poca diversificación de los recursos de aprendizaje y de las estrategias de enseñanza (SEP, 2003). Además, en varios estados de la república aún existen escuelas normales cuyo personal académico cuenta con un nivel de estudios inferior al de licenciatura (Avilés, 2013). En el contexto internacional se ha destacado la importancia de que la formación inicial de los profesores se lleve a cabo en un ambiente que debería caracterizar a la formación universitaria en general, un ambiente en el que se favorezca la interdisciplinariedad, así como el desarrollo de una actitud crítica y reflexiva.

En lo que se refiere a la actualización de profesores en servicio, en 2009 como parte de la Alianza por la Calidad de la Educación, el gobierno estableció el Programa del Sistema Nacional de Formación Continua y Superación Profesional de Maestros de Educación Básica en Servicio (Santiago, McGregor, Nusche, Ravela y Toledo, 2012). Este programa involucra a la Universidad Pedagógica Nacional, las escuelas normales del país, los centros de actualización del magisterio, las instituciones de educación superior, los centros de investigación educativa y las dependencias educativas de los gobiernos federal y estatal, quienes diseñan y proponen programas académicos (cursos, diplomados, especialidades, maestrías y doctorados) en diversas áreas del conocimiento —en respuesta a una convocatoria emitida anualmente por la SEP— que conformarán el Catálogo Nacional de Formación Continua y Superación Profesional para Maestros de Educación Básica en Servicio.

Capítulo II
Una visión del proceso de formación docente en el área de matemáticas

El profesor es un actor fundamental en el proceso de aprendizaje de los estudiantes debido a que sus conocimientos, y, en consecuencia, las características de las actividades que propone en el salón de clase, son determinantes en el tipo de aprendizaje que los estudiantes logran construir. Las tareas a partir de las cuales los estudiantes construyen su conocimiento son el ingrediente básico para dar sentido y dotar de significado a conceptos e ideas matemáticas. Si las tareas están enfocadas únicamente a memorizar hechos y llevar a cabo procedimientos rutinarios o algorítmicos, los estudiantes desarrollarán formas de pensamiento limitadas, respecto de las que podrían construir al abordar tareas en las que se requiera pensar conceptualmente y establecer conexiones entre diferentes ideas matemáticas (Stein y Smith, 1998). Uno de los propósitos de estudiar matemáticas es que los estudiantes aprendan a razonar y que desarrollen una forma matemática de pensar, es decir, una forma particular de pensamiento al resolver problemas que caracterizan a los matemáticos, una forma de “ver el mundo a través de los lentes de un matemático” (Schoenfeld, 1992). El siguiente comentario de Henry Pollak permitirá formarse una idea de lo que se entiende con la frase “una forma matemática de pensar”.

> ¿Cuántos cactus saguaro[1] de más de 6 pies de alto hay en el estado de Arizona? Yo leí que los saguaros son una especie en peligro de extinción. Los desarrolladores inmobiliarios los derriban cuando construyen nuevos condominios. Cuando visité Arizona hace dos o tres años decidí elaborar una estimación. Estimé que existen 10^8 saguaros en Arizona. Permítanme comentar cómo llegué a esa respuesta. En las áreas donde existen, los saguaros parecen estar espaciados uniformemente, aproximadamente 50 pies entre sí. Esta aproximación me indica que hay 10^2 saguaros en una milla lineal, lo

1 Los saguaros o sahuaros gigantes son cactus que tienen un crecimiento bastante lento. En su primer año de vida llegan a medir tan sólo unos seis milímetros. A los quince años tendrán una altura de 30 cm, y dos metros cuando tengan 50 años. Es hasta los 75 años cuando estas plantas florecen y producen semillas por primera vez. El saguaro adulto produce unos 40 millones de semillas durante su vida, pero posiblemente sólo una de ellas sobreviva y llegue a la fase adulta. Esta planta puede llegar a vivir 200 años, tener un tronco hasta de 80 cm de diámetro, una altura de quince metros y un peso de diez toneladas. http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/publicaciones/publi_reinos/flora/saguaro_gte/saguaro.htm

> cual implica que hay 10^4 saguaros en una milla cuadrada. La región donde los saguaros crecen es de al menos de 50 por 200 millas. Entonces multipliqué $10^4 \times 10^4$ para obtener mi respuesta final. Pedí a un grupo de maestros de Arizona que me dieran su estimación, pero ellos no sabían cómo empezar (Pollak, 1987: 260-261).

La disposición a cuantificar y modelar que se aprecian en el ejemplo, así como el hábito de ver a los fenómenos desde un punto de vista matemático caracterizan a las personas con "una forma matemática de pensar". Estos hábitos y disposición se adquieren a través de trabajo continuo y reflexión que se lleva a cabo durante la resolución de problemas.

Las tareas proporcionan la materia prima a partir de la cual los estudiantes aprenderán a pensar acerca de las matemáticas y a dar sentido a los conceptos (Bayazit, 2006). Por ejemplo, si se muestra a estudiantes de primaria cómo encontrar la representación decimal de una fracción dada (1/4 = 0.25), llevando a cabo la división del numerador entre el denominador, y posteriormente se les pide que aborden tareas similares, únicamente se estará promoviendo la memorización y la aplicación de algoritmos. Por el contrario, si se les presenta una cuadrícula en la cual aparece cierta cantidad de cuadros sombreados y se solicita a los estudiantes que expliquen cómo determinar la fracción del total que representa el área sombreada y la parte decimal de esta misma, y una vez que resolvieron la tarea comunican sus caminos de solución y escuchan la forma en que sus compañeros resolvieron el problema, se puede promover el desarrollo de diferentes elementos del pensamiento matemático, entre los que se encuentra la comunicación de ideas, la justificación de resultados y el razonamiento, entre otros (Tabla 2.1).

Otro caso en el que se ejemplifica cómo los procesos cognitivos que el estudiante puede desarrollar dependen del tipo de tareas y de las aproximaciones didácticas empleadas por el profesor es el siguiente: se puede mostrar la forma de aplicar "la ley del sándwich" para llevar a cabo la división de dos fracciones y después pedir a los estudiantes que practiquen el algoritmo al realizar un conjunto de ejercicios. En este caso se está promoviendo que el estudiante desarrolle fluidez procedimental, sin que exista una comprensión o construcción de significado ligado a la operación de división. Por el contrario, se puede indicar al estudiante que el resultado de la división $\frac{a}{b}$ puede interpretarse como "cuántas veces cabe el denominador en el numerador". La idea anterior es robusta, ya que su aplicabilidad se extiende más allá de las operaciones con números enteros y puede aplicarse a la división con números racionales. Suponga que se desea calcular $\frac{1}{2}$ entre $\frac{1}{4}$; el estudiante puede representar cada una de las fracciones en una cuadrícula, digamos de 3 x 4. Posteriormente, empleando la idea de "cuántas veces cabe", puede darse cuenta de que la respuesta es 2, ya que $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{1}{2}$ (Tabla 2.2).

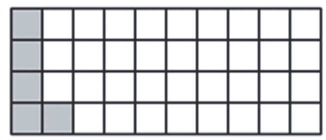
Tarea que favorece la memorización	**Tarea que favorece el pensamiento matemático**
Encuentra la representación decimal de las siguientes fracciones: (a) $\frac{3}{8}$, (b) $\frac{7}{10}$.	Explica cómo determinar: (a) la fracción del total que representa el área sombreada, (b) la parte decimal que representa el área sombreada. (Stein y Smith, 1998, p. 269) 

Tabla 2.1. Tipos de tareas.

Tarea que favorece el desarrollo de fluidez procedimental	**Tarea que favorece la construcción de significado**
Para dividir $\frac{1}{2}$ entre $\frac{1}{4}$ en primer lugar se multiplican los extremos y el producto se coloca en el numerador del resultado, en segundo lugar se multiplican los medios y el producto se coloca en el denominador del resultado. $\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{4}{2} = 2$ Aplique la regla anterior para obtener el resultado de las siguientes divisiones: (a) $\frac{1/2}{1/3}$ (b) $\frac{3/4}{2/5}$	El resultado de la división de dos números puede interpretarse como cuántas veces cabe el denominador en el numerador. Utilizando la idea anterior encuentra cuál es el resultado de dividir: (a) 1/2 entre 1/4, (b) 1/2 entre 1/3. Explica cómo obtuviste la respuesta. Posible respuesta:  1/2 1/4 En las figuras están representadas las fracciones 1/2 y 1/4. Se observa que 1/4 cabe 2 veces en 1/2, entonces el resultado de dividir 1/2 entre 1/4 es igual a 2.  1/2 1/3 En las figuras están representadas las fracciones 1/2 y 1/3. Como 1/3 cabe una vez y media en 1/2, entonces el resultado de dividir 1/2 entre 1/3 es igual a $1\frac{1}{2}$.

Tabla 2.2. Procesos desarrollados al abordar diferentes tareas.

Un aspecto de fundamental importancia, que nos parece debe resaltarse, es que las tareas son importantes porque pueden ampliar o expandir las concepciones de los estudiantes acerca de las ideas matemáticas (Henningsen y Stein, 1997), pero es aún más importante la capacidad y experiencia del profesor para crear condiciones que favorezcan que los estudiantes realicen conexiones entre ideas, conceptos y representaciones (Bayazit, 2006). Además, la actividad y el ejemplo del profesor son fundamentales para que los estudiantes desarrollen hábitos y una disciplina de estudio en la que se enfatice el trabajo constante. Para lograr lo anterior, los conocimientos del profesor deben ser profundos y estructurados para que le permitan plantear e implementar tareas en las que los estudiantes tengan la oportunidad de llevar a cabo un aprendizaje con entendimiento (Hiebert *et al.*, 1997).

Para que los profesores tengan posibilidades de realizar esas tareas, ellos mismos deben haber sido expuestos a resolver tareas similares, por lo cual consideramos de gran importancia que su actualización se lleve a cabo, permanentemente, dentro de una comunidad en la que participen profesores, matemáticos y educadores matemáticos, ya que un profesor bien preparado puede incluso transformar ejercicios rutinarios que aparecen en los libros de texto en tareas relevantes que favorezcan el razonamiento y la comprensión conceptual de los estudiantes (Santos-Trigo, 1998).

Un aspecto importante que debe considerar todo profesor de matemáticas es la relevancia de hacer explícitas las conexiones entre los diversos elementos que intervienen durante la resolución de un problema o la ejecución de una actividad. En los ejemplos anteriores sobre fracciones resulta relevante explicitar las relaciones entre las representaciones gráficas de las fracciones y las representaciones numéricas. Además, aunque el objetivo principal es el logro de un entendimiento conceptual, la solución del problema se debe conectar en algún momento con el algoritmo usual para dividir fracciones, de forma que la vinculación entre la asignación de significados y el desarrollo de fluidez en los procedimientos permitan al estudiante desarrollar un aprendizaje con entendimiento (Hiebert *et al.*, 1997).

Los estudiantes aprenden matemáticas a través de las experiencias que los profesores les proporcionan y, en consecuencia, su entendimiento matemático, así como su capacidad para usar las matemáticas al resolver problemas, su confianza en que pueden aprender y su gusto (o aversión) hacia la disciplina son moldeadas por las formas de enseñanza que encuentran en la escuela. La mejora de la educación matemática para todos los estudiantes requiere, entonces, de profesores con una formación sólida (NCTM, 2000) en los ámbitos disciplinar, epistemológico y didáctico.

A pesar de la importancia de contar con docentes altamente capacitados que apoyen el aprendizaje de los estudiantes, se ha documentado que muchos profesores tienen serias deficiencias en el manejo del contenido disciplinar que deben enseñar —ya que no entienden con profundidad incluso conceptos matemáticos básicos que se abordan desde el nivel primaria hasta el bachillerato (Harel, 1994)— o no lo han aprendido de manera que lo puedan enseñar en la forma requerida en los programas de estudio actuales, porque es un hecho que muchos profesores imparten matemáticas con base en un currículo bastante diferente de aquél con el que ellos fueron educados (Adler *et al.*, 2005). Un ejemplo de lo mencionado anteriormente es que algunos profesores de primaria muestran diversas dificultades de compresión de la división de fracciones, entre las que se encuentran, por citar un caso, confundir la división por 1/2 con la división por 2 o confundir la división por 1/2 con la multiplicación por 1/2 (Ma, 2010).

Aunado a esto, muchos profesores no entienden la forma de aprender de sus estudiantes (epistemología) y, como resultado, no poseen los medios para ayudarlos a superar sus dificultades de aprendizaje de conceptos específicos (didáctica). Al respecto, Dubinsky (2000) menciona que, durante sus estudios universitarios, al solicitar un ejemplo de una función que no tuviera límite en un punto, su profesor proporcionaba siempre el mismo ejemplo, la función f, cuya regla de correspondencia es $f(x) = \begin{cases} -1, \text{si } x > 0 \\ 1, \text{si } x < 0 \end{cases}$. Sin embargo, el ejemplo no ayudó a Dubinsky a entender la idea de límite de una función en un punto; no sino hasta que se desempeñó como educador matemático que descubrió la razón: en esa época este ejemplo no era una función para él porque la gráfica de f "no tiene curvatura". Esto ilustra que las creencias y concepciones de los estudiantes deben ser exploradas a profundidad por parte del profesor para identificar las dificultades que impiden entender un concepto.

Por otra parte, el hecho de que en México no existan programas específicos de formación de profesores de matemáticas del nivel medio superior y superior hace que la problemática del aprendizaje de la disciplina se acentúe en estos niveles. Es por ello que si se desea realmente mejorar el aprendizaje de las matemáticas, es necesario promover la reflexión y la discusión en torno a la puesta en operación de manera urgente de un programa de formación de nuevos profesores, así como de la actualización continua (desarrollo profesional) de los docentes en servicio en todos los niveles educativos. Esto tiene su fundamento en que la efectividad en la enseñanza requiere de conocer y entender profundamente el contenido matemático, tener la capacidad de elegir entre diversos conocimientos para diseñar tareas que apoyen el desarrollo de una forma matemática de pensar, así como reflexionar para mejorar o adecuar estrategias didácticas (NCTM, 2000). El diseño e implementación de tales programas requiere de responder algunas preguntas, entre las que destacan:

¿cuáles y qué tipo de conocimientos matemáticos y didácticos debe poseer un profesor para poder apoyar el aprendizaje de sus estudiantes? ¿Cómo se deben estructurar estos conocimientos en los programas de formación? ¿Quiénes deben ser los responsables de la formación y actualización de los docentes de matemáticas? ¿Cuál es el papel que deberían jugar las instituciones públicas de educación superior en la formación y actualización de profesores, en el nivel medio superior y superior, dada la inexistencia de programas específicos para tal fin? (Barrera, 2009a).

Es indiscutible que la formación y actualización docente en todos los niveles es relevante, pues profesores bien preparados estarán en mejores condiciones de apoyar y guiar el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Los profesores de matemáticas deben estar capacitados para ofrecer una enseñanza de la disciplina en la que se destaquen posibles aplicaciones, tanto en la vida cotidiana y en el ámbito laboral como en los estudios que posteriormente emprenderán los estudiantes. La formación de profesores con tales habilidades será posible si los programas de formación inicial y desarrollo profesional estructuran y unifican los contenidos matemáticos, epistemológicos y didácticos necesarios para la enseñanza, y cuentan además con la participación coordinada de matemáticos y educadores matemáticos. Es importante enfatizar que los problemas de aprendizaje no se deberían atender a partir del bachillerato o la universidad (Harel, 1994), puesto que las concepciones (correctas o erróneas) sobre lo que son las matemáticas, el aprendizaje de la disciplina y los hábitos de trabajo se encuentran muy arraigados en la *estructura conceptual* (Skemp, 1976) de los estudiantes de bachillerato, por lo que resulta bastante difícil modificarlas. Por ello, se debe prestar particular atención a la formación y desarrollo profesional de los profesores de educación básica, pues en este periodo, crucial para el desarrollo cognitivo, los estudiantes pueden generar un gusto por el estudio de la disciplina, el cual continuaría fortaleciéndose durante el bachillerato y la universidad.

2.1. Panorama internacional de los programas de formación docente[2]

En el contexto internacional, el proceso de formación docente varía considerablemente entre los diferentes países. En algunos es posible trabajar como profesor de matemáticas en secundaria o bachillerato únicamente con una licenciatura en matemáticas, mientras que en otros los profesores de

2 La mayor parte de la información sobre los programas de formación de esta sección se obtuvo de los documentos *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries* (Tatto *et al.*, 2012) e *International Comparative Study in Mathematics Teacher Training* (Burghes, 2008).

matemáticas de secundaria y bachillerato no tienen conocimientos disciplinares más allá de este último nivel. Incluso en los países en los que se requiere un grado universitario para desempeñarse como docente de matemáticas, los profesores presentan diferencias de formación, ya que en algunos casos el grado es otorgado por "universidades de enseñanza" —Universidades Normales en China— mientras que en otros países los profesores cursan una licenciatura en matemáticas seguida de un diploma en enseñanza, como en Australia.

Alemania. La formación de los docentes de educación primaria y secundaria en este país se lleva a cabo en dos etapas. En la primera, los futuros profesores inician su formación en una universidad en la cual se privilegia una aproximación teórica, con un componente importante de cursos sobre educación; lo anterior asegura un nivel relativamente alto de preparación de los futuros profesores, ya que el ingreso a la universidad es bastante selectivo en este país. En la segunda se lleva a cabo la formación práctica; en varios estados de Alemania esta fase se desarrolla en instituciones operadas por los gobiernos estatales denominadas *Studienseminare*.

En Alemania la escuela primaria (*Grundschule*) consta de cuatro grados. A partir del quinto, inicia la secundaria elemental, la cual se divide en cuatro tipos de escuela. Los estudiantes son asignados a una de éstas en función de su desempeño en la escuela primaria: *a) Hauptschule* (grados 5 al 9), más enfocada en la formación para el desempeño de oficios; al finalizar este nivel, los egresados pueden combinar el trabajo de tiempo parcial con la formación para el trabajo o asistir de tiempo completo a una escuela de formación para el trabajo, *b) Realschule* (grados 5 al 10), enfocada a la formación de trabajadores administrativos de bajo nivel y ocupaciones técnicas, *c) Gymnasium*, es la escuela de élite y se encarga de preparar a los estudiantes para ingresar a la universidad, *d) Gesamtschule*, una escuela integral que ofrece programas diferenciados; este tipo de escuela no existe en todos los estados de Alemania. En Alemania los títulos de enseñanza se clasifican en cuatro categorías:

Tipo 1. Primaria solamente (grados 1-4)
Tipo 2. Primaria o secundaria elemental (grados 1-9/10)
Tipo 3. Todos los tipos de secundaria elemental (grados 5-9/10)
Tipo 4. Grados 5 a 12/13.

Antes de ingresar en cualquiera de estos programas, todos los futuros profesores tienen que obtener el *Abitur*, un diploma que se obtiene al terminar el *Gymnasium* con éxito y que ofrece la oportunidad de ingresar directamente a la universidad. La obtención de este diploma requiere aprobar un examen que cubre al menos cuatro temas. Los profesores del tipo 1 son profesores generales, mientras que los profesores del tipo 2 al 4 son más especializados y pueden llevar a cabo estudios que les permitan enseñar dos materias. La primera fase de formación se lleva a cabo durante 42 meses para profesores de primaria y de 54 meses para profesores de secundaria, incluyendo periodos vacacionales durante los cuales los estudiantes tienen que elaborar artículos o redactar experiencias de enseñanza. La segunda fase de formación se lleva a cabo en un periodo que va de 18 a 24 meses. Durante esta segunda fase, los futuros profesores enseñan de tiempo parcial en una escuela, asumiendo todas las responsabilidades que le corresponden a un profesor titular, y al mismo tiempo asisten a cursos de pedagogía general y de pedagogía sobre el contenido organizado por el *Studienseminar* al que asisten.

Como parte de su formación, a los futuros profesores se les aplican dos pruebas diseñadas por los gobiernos estatales para ser considerados profesores calificados. La primera se aplica al final de su educación universitaria y consiste en varios exámenes orales y escritos relacionados con los temas estudiados en la primera fase, así como un ensayo; al aprobar se obtiene un primer grado universitario. La segunda es menos académica y más práctica: en ésta se pide que los futuros profesores enseñen diversas lecciones, durante una o más sesiones, mientras son observados y evaluados por un equipo de examinadores. También se solicita la elaboración de un ensayo u otro documento escrito. Al aprobar se obtiene un segundo grado universitario.

Los salarios de los profesores en Alemania, en promedio, son relativamente altos comparados con los de otros países que pertenecen a la OCDE, pero no son muy competitivos en relación con empleos en el sector privado que también requieren de un grado universitario. Sin embargo, la escasez de futuros profesores de nivel básico asegura que la mayoría de quienes elijan esta profesión conseguirán un empleo.

Australia. En este país se cuenta con un sistema educativo descentralizado, el cual es responsabilidad de cada uno de los estados. Es decir, las autoridades educativas estatales tienen a su cargo el registro y la certificación de los profesionales que desean obtener una posición como profesores de matemáticas.

La formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria requiere completar estudios universitarios en las áreas de matemáticas, educación y metodología, los cuales generalmente tienen una duración de cuatro años. También existe la opción de obtener un posgrado en enseñanza secundaria después de haber concluido estudios de licenciatura en algún área diferente a la educación. La experiencia práctica de enseñanza en una escuela requerida en el proceso de formación de profesores incluye un periodo no menor a 80 días.

Chile. Los profesores de educación básica en Chile se preparan como profesores generales, es decir, profesores que enseñan todos los temas en la escuela elemental, la cual está integrada por ocho grados. En este contexto, Chile difiere de otros países en donde los profesores de los grados 7 y 8 tienen una formación diferente a la de los profesores de los grados 1 a 6. La escuela media en este país es obligatoria, tiene una duración de cuatro grados y se ofrece en dos modalidades: *a)* modalidad científico-humanística de tipo general y *b)* modalidad técnico-profesional, la cual combina estudios generales y formación para el trabajo.

En Chile, la formación de los profesores de educación inicial (prescolar) y básica (grados 1 a 8) se lleva a cabo en las universidades y en algunos institutos profesionales que ofrecen educación superior, y la formación de profesores de educación media se lleva a cabo en las universidades. En muchas de las instituciones en este país, la formación de los profesores se lleva a cabo en un único ciclo de 8 o 10 semestres. Las principales líneas de conocimientos en estos programas son matemáticas, pedagogía, educación general y experiencia en el aula. También existen algunas instituciones que ofrecen especializaciones en alguna materia en particular; los profesores que cursan estas especialidades generalmente enseñan en los grados 5 a 8.

Los aspirantes a ocupar una posición como profesor deben contar con un título profesional expedido por una universidad o instituto profesional, acorde con el nivel en el que pretenden enseñar.

China. Para ser profesor de educación primaria se tiene que cursar un programa de tres o cuatro años que permite obtener un diploma de educación superior y un certificado de formación del profesorado. Para ser profesor de secundaria elemental o superior se requiere una formación de cuatro años, la cual permite obtener un diploma de educación superior o un título de licenciatura, así como un certificado de formación del profesorado. El título de licenciatura es un requisito indispensable para enseñar en el nivel de secundaria superior. Alrededor del tercer año de formación profesional, los futuros profesores regularmente enseñan seis semanas en una escuela local, una o dos lecciones cada día. Los salarios de los profesores en China son relativamente bajos, por lo que la docencia resulta una profesión poco atractiva para los estudiantes sobresalientes.

España. La educación escolarizada está organizada de la siguiente forma: *a)* educación primaria obligatoria (de los seis a los doce años), *b)* educación secundaria obligatoria (de los doce a los 16 años), *c)* educación secundaria postobligatoria, se puede elegir entre bachillerato en cuatro modalidades o formación profesional de grado medio (de los 16 a los 18 años), *d)* educación superior, constituida por la enseñanza universitaria o formación profesional superior.

Para ser profesor de educación primaria se debe tener un título de maestro de educación primaria o el título de grado equivalente. Los profesores de este nivel son profesores generales que enseñan todas las asignaturas, excepto lengua extranjera, educación física, educación musical y religión. Para ser profesor de enseñanza secundaria obligatoria o bachillerato es necesario tener un título universitario, además de una formación pedagógica y didáctica de nivel posgrado que generalmente tiene una duración de un año (Ruiz-López y Bosch-Betancor, 2007), al término del cual se obtiene un Certificado de Aptitud Pedagógica. En España, los maestros de primaria se forman en las Facultades de Educación o en las Escuelas del Magisterio, donde se obtiene el título de maestro al culminar su formación, que hasta antes de 2010 se completaba en tres años. La preparación de estos profesores incluye diversas asignaturas psicopedagógicas y sobre teorías del aprendizaje, mientras que la formación matemática se restringe a asignaturas como "Matemáticas y su didáctica" o "Desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica" (Torralbo *et al.*, 2007).

Estados Unidos. Estados Unidos de América tiene un sistema descentralizado de formación y certificación de profesores, lo cual significa que cada uno de los estados es responsable de ambas actividades. La formación inicial de los profesores se ofrece en las universidades, en programas de licenciatura cuya duración es de cuatro años y, en algunos estados, de cinco. También existen programas que otorgan certificación para ejercer la docencia a profesionales egresados de alguna otra licenciatura. Los programas de formación inicial de profesores generalmente incluyen cursos de "contenido", los cuales están a cargo de matemáticos y cursos de "métodos" a cargo de educadores matemáticos sin que exista una articulación entre ambos tipos de cursos. Se ha identificado que esta aproximación a la formación docente ocasiona que las creencias de lo que son las matemáticas y la forma o formas de enseñarlas se construyan implícitamente a partir de las experiencias de enseñanza que los profesores en formación tuvieron en los niveles preuniversitarios (Harel, 1994). Además, los profesores en formación tienen poco contacto con los estudiantes y, cuando existe, se encuentra desvinculado del estudio del aprendizaje y la enseñanza.

En Estados Unidos existen dos tipos de experiencia práctica para los futuros profesores: observación de clases y enseñanza de estudiantes. Durante estas experiencias. el trabajo de los candidatos a profesores generalmente es supervisado por un profesor de la universidad y un maestro en servicio. Las experiencias de enseñanza tienen una duración variable, que va de seis semanas en Louisiana a un semestre en estados como Minnesota o Wisconsin (Wang *et al.*, 2003).

Por su parte, la actualización de docentes en servicio muchas veces se limita a cursos en los cuales los temas se abordan de forma superficial, sin que exista conexión entre el currículo que los maestros tienen que enseñar y aspectos relevantes del aprendizaje de sus estudiantes. Asimismo, los temas o contenidos se ofrecen de forma fragmentada y sin que exista continuidad entre cursos, en la discusión de los temas o ideas relevantes relativas a la enseñanza y el aprendizaje (Ball y Cohen, 1999), o sin coherencia entre la teoría y la práctica (Ferguson, 1993; citado en Hui y Grossman, 2008).

Finlandia. Para ser profesor en este país se tiene que cursar una licenciatura en un Departamento de Educación de Profesores. En el caso de los profesores de matemáticas, física y química se toman cursos tanto en la Facultad de Ciencias como en la Facultad de Educación (Malaty, 2004). Existe bastante competencia durante el proceso de selección de los candidatos, ya que, en el caso de los profesores de primaria, únicamente uno de cada diez aspirantes es admitido para formarse como profesor. Actualmente, un requisito para ingresar al magisterio y tener un empleo permanente en el nivel básico y en el bachillerato, es contar con el grado de maestría, mientras que los profesores de prescolar requieren sólo de licenciatura (Sahlberg, 2010). La formación de los profesores de primaria incluye tres grandes áreas: *a)* teoría de la educación, *a)* conocimiento padagógico del contenido y *c)* didáctica del contenido. La formación de los profesores se lleva a cabo en dos etapas, la primera consistente en la obtención de un título de licenciatura en un periodo de tres años, seguida de un programa de maestría, cuya duración es de dos años e incluye la elaboración de un trabajo de tesis, en el campo de la educación general para los profesores de primaria o de un tema particular de un área específica en el caso de los profesores de secundaria.

Los programas de formación de profesores en Finlandia se caracterizan por integrar los conocimientos sobre teorías educativas, metodología de la investigación y la práctica docente. La fase práctica de los programas de formación incluye la observación de clases impartidas por profesores experimentados, práctica de enseñanza observada por un supervisor y el desarrollo de lecciones independientes supervisadas.

Un aspecto importante del sistema educativo de Finlandia que debe resaltarse es que la educación es gratuita y tiene mucho apoyo gubernamental, ya que las escuelas, además de estar bien equipadas, ofrecen comidas calientes y servicio médico sin costo a los estudiantes. Por otra parte, los estudiantes tienen acceso gratuito a computadoras con Internet e impresoras. Las escuelas son lugares abiertos, no existen bardas que circunden la escuela, cualquier visitante puede ingresar a ellas y, a pesar de lo anterior, no existe ningún tipo de supervisión al trabajo de los profesores (Malaty, 2004).

Inglaterra. En este país, la responsabilidad sobre la formación y certificación de profesores se comparte entre varias instituciones, entre las que se encuentra la Teacher Training Agency, el Department for Education and Skills, la Office for Standards in Education y el General Teaching Council for England (Wang, Coleman, Coley y Phelps, 2003). Estas agencias regulan diversos aspectos de la educación y certificación de los profesores. La formación de los docentes en Inglaterra está a cargo de las universidades, las cuales colaboran estrechamente con las escuelas locales, aunque hay otras opciones de formación para formarse como profesor, como los *School-Centred Initial Teacher Training Courses* (SCITTs), que están a cargo de un grupo de escuelas en un área particular, en colaboración con una universidad, que proporciona la certificación, o la iniciativa *Teach First*, la cual busca convencer a los estudiantes de posgrados en matemáticas o áreas relacionadas a enseñar dos años en escuelas secundarias de Manchester o Londres, después de un curso intensivo de entrenamiento, el cual dura seis semanas. Las actividades de enseñanza que llevan a cabo los candidatos a profesores se llevan a cabo durante un periodo de 24 semanas.

Malasia. Aquí, la primaria consta de seis grados y los profesores que trabajan en este nivel son profesores generales, es decir, enseñan todas las materias. Es este país se ofrecen incentivos especiales para profesores de matemáticas o que trabajan en áreas remotas. Mejoras recientes en las condiciones salariales de los profesores han contribuido a que los jóvenes mejor preparados decidan cursar una carrera relacionada con la docencia.

En Malasia existen profesores de educación básica que cuentan con título universitario y otros que cuentan únicamente con diplomas de enseñanza expedidos por institutos de formación de profesores, los cuales no son equivalentes a un título universitario. Todos los institutos de formación de profesores cuentan con un currículo común, mientras que las universidades diseñan su propio currículo, pero éste se basa en los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación Superior y la Agencia de Certificación de Malasia. Los periodos de práctica requeridos varían entre universidades e institutos, pero regularmente son de entre diez y doce semanas.

Noruega. Noruega cuenta con un marco nacional de formación de profesores que siguen todas las instituciones. En este país existen cuatro tipos de programas de formación. Uno de esos programas está enfocado a la formación de profesores de primaria y de secundaria elemental (grados 1 al 10) y tiene una duración de cuatro años e incluye asignaturas relacionadas con un área específica del conocimiento, pedagogía y didáctica del contenido, además de incluir práctica de la enseñanza durante cada uno de los años. En este tipo de programas es posible elegir materias optativas durante los años tercero y cuarto con la finalidad de estudiar con profundidad un área del conocimiento específica. Existe un segundo tipo de programa que incluye el grado de maestría y tiene una duración de cinco años. Un tercer tipo de programa, cuya duración es cuatro años, ofrece formación para enseñar un área específica en secundaria elemental o superior (grados 8 al 13). El último año en este programa incluye cursos de pedagogía, didáctica del contenido y práctica de la enseñanza.

Nueva Zelanda. Los profesores de matemáticas de secundaria pueden incorporarse a la actividad profesional mediante diferentes rutas, ya que se puede tener un empleo temporal de profesor al contar únicamente con formación matemática o con formación en educación. Sin embargo, la mayoría de profesores en este país cuenta con una formación profesional de al menos tres años, la cual incluye algunos cursos de matemáticas (pero no una especialización en esta área) más un año para obtener un diploma en enseñanza secundaria de una universidad o de otra institución superior formadora de profesores (*teachers college*). Algunos pocos profesores han obtenido su diploma al mismo tiempo que realizaban estudios universitarios, mientras que otros ingresaron al servicio con formación de profesores de primaria, la cual por lo general consiste en un diploma de un grado que se obtiene durante una formación de tres o cuatro años (Barton y Sheryn, 2009).

Singapur. En Singapur existe una única institución formadora de profesores de educación primaria (grados 1 a 6) y secundaria (grados 7 al 10): el Instituto Nacional de Educación (NIE, por sus siglas en inglés), un instituto autónomo de la Nanyang Technological University. Los profesores son seleccionados por el Ministerio de Educación de Singapur y enviados al NIE para su formación, generalmente después de haber concluido su educación post-secundaria (grados 11 y 12). Los graduados del Instituto automáticamente se encuentran certificados para trabajar en las escuelas públicas de este país. Existen diferentes modalidades de formación; una de ellas ofrece únicamente un diploma en educación y otra, un título de licenciatura. El programa que permite obtener un diploma tiene una duración de dos años y hay dos opciones de formación: una orientada a enseñar dos materias y otra a enseñar tres. La opción que otorga el grado de licenciatura (en Ciencias o Artes) tiene una duración de cuatro años. Para obtener un diploma de posgrado en educación se requiere cursar un año adicional a la licenciatura.

En Singapur, las políticas de gobierno han propiciado que los salarios de los profesores sean bastante competitivos, en relación con otras ocupaciones en los sectores público y privado. A los futuros profesores, además de ofrecerles educación universitaria gratuita, el gobierno les otorga un salario mientras dura su formación profesional.

Taiwán. En este país, las universidades son las encargadas de la formación de los profesores de primaria y secundaria, con programas específicos para cada nivel. En Taiwán la primaria consta de seis grados, mientras que la secundaria se divide en secundaria elemental (grados 7 a 9) y secundaria superior (grados 10 a 12). Los profesores de primaria reciben una formación general y pueden enseñar en cualquiera de los grados de este nivel, mientras que los profesores de secundaria enseñan una sola materia, en alguno de los dos niveles. La formación de estos profesores se lleva a cabo durante un periodo de cuatro años para obtener un grado de licenciatura; después de este periodo, llevan a cabo medio año de prácticas profesionales. Los dos programas de formación de profesores de educación básica incluyen tres componentes: materias generales, comunes a todos los estudiantes universitarios independientemente de la rama del conocimiento en la que se especialicen: materias sobre la disciplina, cuyo objetivo es mejorar el entendimiento de los estudiantes acerca de la asignatura o asignaturas que deberán enseñar y materias específicas del profesional de la educación. Además, los futuros profesores deben completar un periodo de prácticas. Una vez cumplidos los requisitos anteriores, se evalúan sus capacidades como profesores mediante una prueba que incluye dos temas generales y dos temas relativos a la educación (Teacher Qualification Assessment).

Es importante mencionar que en Taiwán las políticas gubernamentales han proporcionado y fomentado condiciones favorables para los profesores, incluyendo salarios competitivos, sistema de salud integral así como seguros de invalidez y de vida, vacaciones en verano e invierno con salario anual completo, pensiones y jubilaciones con un nivel salarial igual que el obtenido en el momento del retiro, así como diversas prestaciones especiales (bonos o subsidios por matrimonio, gastos funerarios y educación de los hijos, entre otras).

2.2. Formación inicial y desarrollo profesional de los docentes de matemáticas en México

El proceso de formación inical y actualización continua de los profesores de matemáticas en nuestro país constituye un sistema complejo en el que participan diversas instituciones entre las que se encuentran las escuelas normales, la Universidad Pedagógica Nacional, las universidades públicas y privadas que ofrecen programas de posgrado y de actualización profesional, los Centros de Maestros y los Centros de Actualización del Magisterio.

La formación inicial de profesores de educación básica en Mexico (prescolar, primaria y secundaria) se lleva a cabo en escuelas normales y en la Universidad

Pedagógica Nacional (UPN), mientras que no existen programas específicos de formación inicial para profesores de bachillerato ni para quienes laboran en el nivel superior. Los profesores de prescolar y primaria son profesores generales; para secundaria existen programas de formación específica en el área de matemáticas. En loa niveles bachillerato y superior, los profesores que imparten asignaturas de matemáticas son profesionales universitarios con diversos perfiles: matemáticos, ingenieros, economistas, administradores, etcétera.

Los profesores de educación primaria reciben una formación que incluye algunos cursos orientados al área de matemáticas como son *a)* aritmética: su aprendizaje y enseñanza, *b)* álgebra: su aprendizaje y enseñanza, *c)* geometría: su aprendizaje y enseñanza, *d)* procesamiento de información estadística. Por su parte, la licenciatura en educación secundaria cuenta con una especialización en matemáticas. La formación de los profesores de matemáticas de secundaria incluye contenidos de teoría educativa, pedagogía y cursos específicos en el área de matemáticas tales como: introducción a la enseñanza de matemáticas, pensamiento algebraico, los números y sus relaciones, figuras y cuerpos geométricos, plano cartesiano y funciones, procesos de cambio o variación, medición y cálculo geométrico, escalas y semajanza, la predicción y el azar, presentación y tratamiento de la información; además de algunos cursos orientados a la matemática educativa como procesos cognitivos y cambio conceptual en matemáticas y ciencia, seminario de investigación en educación matemática, tecnología y didáctica de las matemáticas (Licenciatura en Educación Secundaria, Plan 1999).

Como ya se ha mencionado, los profesores de matemáticas en bachillerato y licenciatura son profesionales egresados de diversas áreas del conocimiento, algunos de los cuales cuentan con algún posgrado (maestría o doctorado) en el área de matemática educativa que ofrecen diferentes universidades o centros de investigación en nuestro país.

El desarrollo profesional de los profesores de educación básica se lleva a cabo a través de los diferentes cursos, talleres, diplomados y programas de maestría y doctorado que integran el Catálogo Nacional de Formación Continua y Superación Profesional para Maestros de Educación Básica en Servicio, el cual se describió en el primer capítulo.

En lo que respecta a los profesores de bachillerato y licenciatura, las diferentes instituciones educativas ofrecen una amplia diversidad de cursos a los profesores en verano e invierno. Sin embargo, la mayoría de estos cursos no se encuentran estructurados y tienen poca relación con las problemáticas que los profesores encuentran en su práctica docente.

2.3. Ejes de conocimientos deseables en los programas de formación y actualización docente

Consideramos que es importante que los programas de formación y actualización de los profesores incluyan e integren tres componentes básicos del conocimiento: *a)* matemáticas, *b)* epistemología y *c)* didáctica del contenido matemático (Harel, 1994; Harel y Lim, 2004; Shulman, 1987). Cabe destacar la relevancia del conocimiento didáctico del contenido, ya que esta categoría de conocimientos permite al profesor actuar ante las diferentes situaciones de instrucción que aparecen en el aula, y es el conocimiento que lo distingue de un pedagogo como especialista en la enseñanza de la disciplina (Shulman, 1987). Adicionalmente, se sugiere que los programas estén estructurados de forma que permitan a los profesores participar en comunidades profesionales en donde tengan la oportunidad de reflexionar e intercambiar ideas que sustenten y amplíen sus conocimientos matemáticos y didácticos (Santos-Trigo, 2008). El objetivo de una comunidad profesional es ofrecer un espacio robusto en principios y experiencias que permita a los profesores reflexionar[3] acerca de su práctica en el salón de clase y sustentar sus decisiones y acciones pedagógicas con el conocimiento derivado de esa reflexión. En la constitución de estas comunidades se resalta la importancia de la participación de los propios profesores, así como de matemáticos y educadores matemáticos.

Conocimiento de los contenidos matemáticos. Se refiere a la forma en que están estructurados los conceptos en la mente del docente, partiendo de los principios del pensamiento matemático. El dominio de este aspecto del conocimiento de un profesor debe permitirle entender un amplio rango de temas, pero, más importante, ese entendimiento debe ser profundo y estar estructurado con otros temas del currículo de manera que le permitan al profesor diseñar y desarrollar tareas de aprendizaje que ayuden al estudiante a construir conocimiento con entendimiento. Esta característica del conocimiento matemático de los profesores es crucial en su actividad en el aula, pues influye de manera directa en lo que enseñan y en cómo lo enseñan, así como en el tipo de tareas y rutas de instrucción que proponen para orientar el aprendizaje de los estudiantes. Una habilidad deseable de todo profesor de matemáticas consiste en la capacidad de transformar el salón de clase en un ambiente de práctica matemática, en el cual la colaboración, para abordar tareas matemáticas sustantivas sea un elemento para que los estudiantes desarrollen una forma matemática de pensar, pero esto únicamente será posible si los

3 Por reflexión se entiende lo que un profesor hace cuando analiza, retrospectivamente, la forma en que enseña, las estrategias que utiliza y los logros de aprendizaje de sus estudiantes, así como la re-construcción, re-escenificación y re-experimentación de los sucesos y las emociones acontecidas en el aula (Shulman, 1987).

profesores dominan con profundidad y fluidez los contenidos que deben enseñar, ya que en caso contrario el entendimiento conceptual que puedan lograr sus estudiantes será limitado (Ma, 2010).

No puede haber un aspecto de mayor relevancia para un buen desempeño del docente que conocer con profundidad la materia que enseña; la razón es que los profesores que no dominan bien un tema muy probablemente no tendrán el conocimiento necesario para ayudar a los estudiantes a aprender ese tema (Ball, Thames y Phelps, 2008). Al respecto, Shulman (1987) argumenta que el profesor debe comprender la estructura de la disciplina que enseña, sus principios de organización conceptual, así como los principios de indagación. Es decir, el profesor debe ser capaz de responder a preguntas del estilo "¿cuáles son las ideas y las destrezas importantes en matemáticas?, ¿de qué manera los matemáticos incorporan las nuevas ideas y descartan las defectuosas?, ¿cuáles son las reglas y los procedimientos de un buen saber académico y de la investigación en matemáticas?"

Cuando un profesor carece de dominio del contenido, muy probablemente adaptará un estilo de enseñanza expositivo, en el que el dominio de la clase le sea exclusivo y en el que raramente se ofrecerán oportunidades a los estudiantes para formular preguntas o para proponer visiones alternativas para solucionar un problema, ante la sensación de ansiedad que puede provocarle que los estudiantes formulen cuestionamientos a los cuales no pueda responder con plena seguridad o que la discusión se desvíe por rutas que difieran en gran medida de aquélla que el docente diseñó anticipadamente (Shulman, 1987).

El conocimiento de los contenidos matemáticos incluye el desarrollar: *a)* un entendimiento conceptual, *b)* fluidez para llevar a cabo procedimientos y algoritmos, *c)* habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos, *d)* capacidad para llevar a cabo razonamientos matemáticos, desarrollar justificaciones y argumentaciones y *e)* disposición para apreciar la realidad desde un punto de vista matemático.

Conocimientos sobre epistemología. Incluye el entendimiento de principios psicológicos básicos que se refieren a cómo aprenden los estudiantes. Los profesores deben comprender que los estudiantes construyen su conocimiento al darle significado a los conceptos a partir de sus conocimientos previos, así como de su relación con los objetos del mundo que les rodea. Al respecto, nuestra posición es que un único modelo o teoría epistemológica no puede capturar la extensa gama de detalles y particularidades del aprendizaje de las diversas áreas de las matemáticas. Por tal razón resulta relevante que los profesores diversifiquen su conocimiento respecto de las diferentes teorías del aprendizaje, ya que ello les permitirá adaptar esos conocimientos a las situaciones específicas del aula, las cuales están en función de la diversidad del medio escolar, las características de los estudiantes, la infraestructura y la disposición de recursos o herramientas didácticas, entre otras. Esta diversificación es importante porque durante el proceso de instrucción son indispensables tanto la construcción de significados, a través del trabajo independiente y en grupo como los procesos de memorización y manejo de rutinas y algoritmos. De esa forma, conocimientos sobre la perspectiva conductista, constructivista o aproximaciones socioculturales, y la habilidad para contrastar los supuestos en los que se basan dichas teorías, así como sus implicaciones didácticas, son un factor fundamental para que el profesor desarrolle flexibilidad y fluidez durante el desempeño de su actividad profesional.

Didáctica del contenido matemático. Se refiere a la forma en que los profesores implementan algunos principios psicológicos para enseñar de acuerdo con la concepción particular que sostengan sobre la naturaleza de las matemáticas y del aprendizaje (Harel, 1994). El conocimiento didáctico del contenido integra los conocimientos disciplinares y la didáctica, posibilita comprender cómo se organiza y representa un conjunto de conceptos o ideas, así como la forma en que éstos se pueden adaptar en función de los intereses y capacidades de los estudiantes en situaciones específicas de enseñanza. Una formación sólida en este rubro permitirá a los profesores reaccionar de forma flexible ante las diversas situaciones de instrucción presentes en el salón de clase, ante los niveles variables de dificultad de los contenidos matemáticos, los estilos característicos de aprendizaje de los estudiantes o los objetivos educativos. De acuerdo con Ball y Bass (2000), una parte importante de este conocimiento se construye durante el desempeño de la profesión o durante la investigación del aprendizaje y la enseñanza de ideas matemáticas específicas. En este contexto, resulta relevante que la formación y actualización docente incluya una participación en comunidades profesionales en las que sea posible compartir experiencias y discutir los avances recientes de investigación en educación matemática, pues por este medio se puede lograr una socialización y una reflexión en torno a la didáctica del contenido matemático.

Esta distinción de los tres componentes de conocimientos que debería incluir la formación de un profesor de matemáticas se hace únicamente con fines de exposición, pues de hecho, los contenidos matemáticos en el contexto escolar no pueden separarse de la epistemología y la didáctica. Los tres rubros de conocimientos están estrechamente relacionados y deben estructurarse como una unidad, con el fin de ayudar al profesor a entender la forma en que los procesos de generación de las ideas matemáticas tienen lugar, además de comprender la forma en que los estudiantes construyen su conocimiento a través de la ejecución de tareas de instrucción y para abordar las dificultades que los estudiantes enfrenten durante el aprendizaje de alguna idea matemática. Por ejemplo, lo que un estudiante de quinto grado de primaria puede conocer sobre los números decimales dependerá de la profundidad del conocimiento del profesor acerca del sistema de numeración decimal y de la notación posicional, así como del entendimiento que tiene acerca de los errores que típicamente cometen los estudiantes —por mencionar un caso, los estudiantes de quinto grado comúnmente confunden .5 con .05, debido a su convencimiento de que 5 y 05 son el mismo número— (Ball y Bass, 2000).

Durante su trabajo en el aula, es importante que el profesor de matemáticas escuche a sus estudiantes, con el objetivo de entender cómo interpretan las ideas, conceptos y procedimientos, y determinar el origen de sus dificultades de comprensión, es decir, encontrar sentido a los errores aparentes que cometen. El profesor debe determinar, por ejemplo, cuál es la razón de que al realizar multiplicaciones de varios dígitos, los estudiantes ordenen de forma incorrecta los productos parciales (Figura 2.1a) (Ma, 2010), o entender por qué los estudiantes no dan sentido a la suma de fracciones (Figura 2.1b) o cuál es el origen de errores al simplificar expresiones algebraicas (Figura 2.1c).

$\begin{array}{r} 123 \\ \times\, 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$	$\frac{2}{3}+\frac{8}{5}=\frac{2+8}{3+5}=\frac{10}{8}$	$\frac{1-r^2}{1-r}=\frac{1-r\cdot r}{1-r}=r$
(a)	(b)	(c)

Figura 2.1. Diversos errores cometidos por los estudiantes.

Por otra parte, un elemento fundamental de la actividad docente consiste en llevar a cabo acciones didácticas y explicaciones que permitan a los estudiantes superar esas dificultades, considerando siempre que los estudiantes, al enfrentarse a un concepto nuevo, se encuentran en un proceso de construcción de significados, por lo que su entendimiento del concepto diferirá del entendimiento que el profesor tiene del mismo. En la formulación de estas explicaciones, el profesor tiene que "desempacar" sus conocimientos matemáticos, ya que éstos se encuentran altamente estructurados y condensados en su estructura conceptual.[4] El objetivo de desempacar este conocimiento matemático es hacerlo accesible al aprendiz.

4 El profesor puede tener un conocimiento profundo de las fracciones y puede describir a éstas como clases de equivalencia de pares ordenados o conocer que los números racionales son densos en los números reales, pero este conocimiento debe adaptarse a un nivel que sea accesible para los estudiantes. En la enseñanza en el nivel elemental, el profesor debe saber, por ejemplo, cuáles son las diferentes formas en que pueden entenderse o interpretarse las fracciones y cómo estas diferentes interpretaciones pueden ayudar a que los estudiantes desarrollen un entendimiento profundo de este concepto (Ma, 2010)

Escuchar a los estudiantes también permite aprender de ellos, ya que algunas ideas o estrategias de solución pueden resultar novedosas y ser de utilidad para el profesor al diseñar tareas que apoyen el aprendizaje de otros educandos. Como menciona Latapí (2003), lo que distingue al maestro como profesional no es la actividad de enseñanza que lleva a cabo, sino su capacidad para aprender continuamente. "La pasión por conocer y por conocer cómo conocemos para ponerlo al servicio de los niños y jóvenes es rasgo distintivo del maestro" (15). Durante el trabajo que llevamos a cabo con estudiantes talento en matemáticas, uno de ellos, de sexto grado de primaria, al abordar una actividad de identificación de patrones, propuso una estrategia para obtener el patrón, cuyas particularidades no habíamos considerado con anterioridad. La tarea que se le propuso fue la siguiente: "obtén una fórmula para calcular la suma $S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n - 2)$". El alumno consideró varios casos particulares y organizó sus resultados en una tabla (Figura 2.2).

n	S
1	1
2	5
3	12
4	22
$\vdots$	$\vdots$
n	

Figura 2.2. Organización de datos en una tabla.

Ante la dificultad para identificar el patrón, el estudiante sugirió agregar una columna en la que colocó los valores $\frac{S}{n}$, expresados en medios, como se muestra en la Figura 2.3. Al realizar lo anterior obtuvo una nueva sucesión de números (2, 5, 8, 11...) relacionada con la sucesión original (1, 5, 12, 22...). Sin embargo, el patrón que sigue la nueva sucesión se puede determinar con mayor facilidad que el original. La expresión algebraica de éste es $3n - 1$. Entonces, el valor en el último renglón de la tercera columna es igual a $\frac{3n-1}{2}$.

Ahora bien, para obtener un valor de la segunda columna basta multiplicar el valor en el mismo renglón de la tercera columna por n. Por lo tanto la fórmula buscada —el valor del último renglón de la segunda columna— es igual a $\frac{n(3n-1)}{2}$.

El estudiante utilizó la operación de división para obtener una sucesión en la cual la identificación del patrón resulta más fácil. Es decir, implementó un caso específico de la heurística de considerar un problema más simple relacionado con el problema original (Polya, 2005). En general, esta estrategia para obtener un patrón más simple se puede utilizar en actividades en las que se busca un patrón dado por una progresión aritmética, algunas de las cuales tienen relación con los números figurados. El conocimiento de esta estrategia y la evaluación de su potencial permiten integrarla al repertorio de recursos didácticos del profesor.

n	S	S/n
1	1	$\frac{2}{2}$
2	5	$\frac{5}{2}$
3	12	$\frac{8}{2}$
4	22	$\frac{11}{2}$
⋮	⋮	⋮
n		

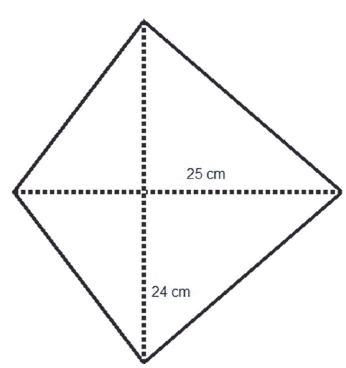
Figura 2.3. Organización de datos para identificar un patrón.

Otro ejemplo en el que se muestra cómo se puede aprender de los estudiantes es expuesto por Ma (2010), quien señala que un profesor pidió a sus estudiantes calcular el área de la figura 2.4a. El procedimiento para obtener el área utilizado por el profesor consistió en considerar el área de la figura como suma de las áreas de los triángulos *ABD* y *BCD*; si las alturas de los triángulos son h_1 y h_2, respectivamente, entonces el área de la figura puede calcularse como:

$$A = \frac{25(h_1)}{2} + \frac{25(h_2)}{2} = \frac{25(h_1) + 25(h_2)}{2} = \frac{25(h_1 + h_2)}{2}$$

Además, dado que $h_1 + h_2$ es igual a 24 cm, entonces el área de la figura es igual a 300 cm^2.

(a)



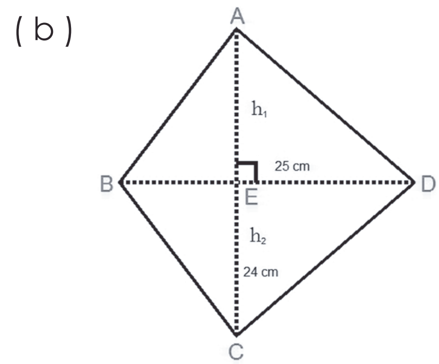


Figura 2.4. Planteamiento del problema.

Sin embargo, un estudiante mencionó que se podía resolver más fácilmente el problema si se trazaba un cuadrilátero auxiliar —cuya área es igual a 25 (24)— porque el área de la figura original es igual a la mitad del área del rectángulo, lo cual se puede justificar al observar sub-figuras en la configuración geométrica (Figura 2.5). El profesor reconoció que esta forma de resolver el problema es ingeniosa y que tenía potencial para favorecer la comprensión del resto de los estudiantes. Sin embargo, entender las nuevas ideas de los estudiantes requiere que el profesor tenga un buen manejo del contenido matemático (Ma, 2010) y que estaé dispuesto a aprender de la comunidad de aprendizaje integrada por los estudiantes y él mismo.

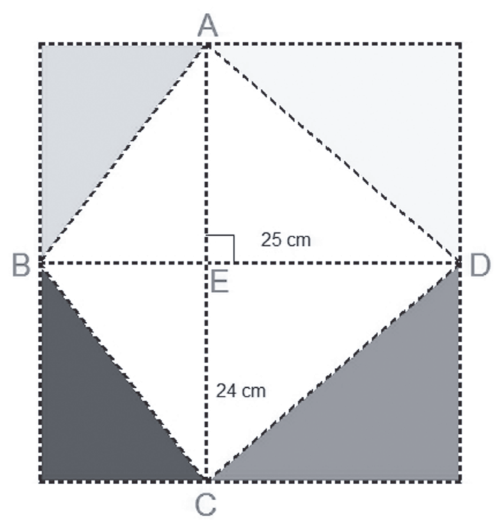


Figura 2.5. Estrategia que combina el agregar elementos auxiliares e identificar subconfiguraciones.

El conocimiento del contenido, de la epistemología y de la didáctica del contenido constituye un conjunto mínimo básico de saberes que todo profesor de matemáticas debe poseer, pero la formación de todo profesional de la docencia en matemáticas incluye además, conocimientos didácticos generales: del currículo, de los estudiantes y sus características, de los contextos educativos y de los objetivos, finalidades y valores educativos (Shulman, 1987), sobre filosofía e historia de la ciencia en general, y de las matemáticas en particular, y, de forma relevante, sobre la utilidad de materiales didácticos entre los que se encuentran los libros de texto, y sobre la evaluación del aprendizaje. Además de estos conocimientos, el profesor deberá desarrollar un gusto por la disciplina, por su aprendizaje y su enseñanza, ya que en muchos casos los "futuros maestros pasan por las escuelas elementales aprendiendo a detestar a las matemáticas... [y] Regresan a la escuela elemental a enseñar a nuevas generaciones a detestarlas" (Educational Testing Service, 1956; citado en Polya, 2005: 11).

El profesor aplicará todos los conocimientos descritos, por ejemplo: *a)* al tratar de que sus estudiantes entiendan por qué asisten a la escuela y por qué aprenden matemáticas, lo cual se traducirá en un interés por aprender (Lluis, 2008), *b)* al mostrar a los estudiantes que las matemáticas consisten en algo más que hacer sumas y multiplicaciones rápidamente, que hacer matemáticas consiste en imaginar, crear y razonar, *c)* al intentar modificar algunas creencias de los estudiantes, entre las que se encuentra el que las matemáticas son difíciles o que sólo las personas "inteligentes" pueden aprender matemáticas, o *d)* al fomentar hábitos de estudio a partir de su conocimiento sobre el funcionamiento del cerebro. Ya que las conexiones neuronales requieren de estímulos y tiempo para establecerse, el aprendizaje de las matemáticas debe incluir jornadas de trabajo intenso por periodos de tiempo razonables, durante todos los días, seguidos de tiempos de descanso en los que se permita madurar a las ideas en el subconsciente.

En un documental sobre la historia de las matemáticas de la BBC[5] se menciona que Henry Poincaré tenía una rutina estricta de trabajo: dos horas por la mañana y dos horas al comenzar la noche, para que durante el tiempo entre esos dos periodos su subconsciente trabajara en la solución de los problemas que le interesaba resolver. La maduración de las ideas en el subconsciente es de suma importancia al hacer matemáticas, por lo que, en muchas ocasiones, los pensamientos cruciales para resolver un problema pueden aparecer de forma inesperada. El propio Poincaré (1956) comenta que durante un viaje en el que realizaba una expedición geológica había olvidado su trabajo en matemáticas, pero al subir el escalón del autobús en el que realizaría el viaje, se le ocurrió una idea que le ayudó a resolver un problema en el que trabajaba.

5 El nombre del documental es *Historia de las Matemáticas 4. Hacia el infinito y más allá*. Se puede ver en YouTube (doblado al español) en la siguiente dirección electrónica: http://www.youtube.com/watch?v=ReD6j3s-Ti8.

2.4. El rol de la tecnología en la formación y actualización docente

Es evidente que la incorporación de las tecnologías digitales en las diversas actividades humanas ha cambiado radicalmente las formas y costumbres en que los individuos realizan diversas tareas. Por ejemplo, comunicarnos en cualquier momento a cualquier parte del mundo mediante el teléfono celular, registrar hechos mediante fotografías o videos y compartir esa información en Internet, obtener información estadística de instituciones o dependencias gubernamentales, enviar información de forma casi instantánea, realizar transacciones bancarias desde nuestro hogar, etcétera. Consecuentemente, el uso de instrumentos computacionales modifica la forma en que se construye el conocimiento, ya que la presencia de instrumentos de mediación transforma de raíz la estructura de los procesos cognitivos de las personas (Werstch, 1993). Esto es análogo a lo que ocurre con el uso de una herramienta material vinculada a un proceso técnico. Por ejemplo, el desarrollo actual de la biología no sería posible sin los recursos tecnológicos desarrollados simultáneamente con los cuerpos conceptuales. Uno de estos recursos es el microscopio, un instrumento que ha permitido al investigador acceder a un nivel de estructuración de la realidad imposible de alcanzar sin él. El microscopio permitió conocer la estructura de la célula y sustentar la base conceptual que considera a ésta como la unidad básica de la vida. Entonces, la acción cognitiva del profesional de la biología está mediada por el microscopio y el conocimiento producido está afectado de modo sustancial por la presencia del instrumento (Moreno y Waldegg, 2002).

En el ámbito educativo, el reto consiste en integrar esas tecnologías de forma que apoyen el aprendizaje de los estudiantes (en particular, el aprendizaje de las matemáticas). Al respecto, es muy importante tomar en cuenta que el uso de la tecnología en los procesos de aprendizaje de los estudiantes no se debe limitar a facilitar procesos rutinarios, como en el empleo que se está dando en muchos casos a las TIC. Esto puede ser de alguna utilidad, pero no es sustancial. A lo que nos referimos cuando consideramos el uso de la tecnología en el aprendizaje es a su uso como *reorganizador* (Pea, 1985) en los procesos del pensamiento matemático. Por ejemplo, el uso de un *software* dinámico al abordar una tarea de aprendizaje puede aportar elementos que no se tienen en un ambiente de lápiz y papel. La construcción de un cuadrado con lápiz y papel cuadriculado está guiada por la percepción, y consiste en trazar cuatro segmentos de igual longitud sobre las líneas del papel, mientras que llevar a cabo esta misma tarea en Cabri Geometry requiere hacer explícitas las relaciones de perpendicularidad y congruencia de los lados, además de conocer cómo se interrelacionan esas propiedades en la construcción del objeto geométrico (Laborde, 2001).

En este contexto, es importante que la formación de los profesores incluya capacitación en el uso de tecnologías y resolución de problemas. Las tecnologías digitales que pueden ser de utilidad para promover el aprendizaje de las matemáticas incluyen *software* de geometría dinámica (Cabri, Geogebra), sistemas de álgebra computacional (Derive, Maple, Mathematica, Maxima. Octave, Sage), *software* para el aprendizaje de la probabilidad (Probability Explorer) o la estadística (Fathom), *software* de oficina que puede tener aplicaciones educativas (hoja de cálculo de Excel u Open Office), calculadoras tales como la TI-92 o la Voyage 200, manipulativos virtuales,[6] teléfonos celulares, iPads, Internet, proyectores y pizarrones electrónicos, entre otros. Los profesores necesitan adquirir un conocimiento profundo de este tipo de herramientas y disponer de ejemplos de actividades que pueden implementar de forma que se haga un uso efectivo de las herramientas (Ruthven, 2012).

Las tecnologías digitales son importantes en el aprendizaje ya que proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y análisis de grandes volúmenes de información y permiten realizar cálculos de una forma eficiente y precisa (NCTM, 2000). Mediante el uso de la tecnología también se pueden promover actividades matemáticas relevantes tales como la identificación de patrones y de relaciones y conexiones entre conceptos e ideas matemáticas. Además, la inclusión de las herramientas computacionales en el proceso de instrucción favorece el que los estudiantes se enfoquen en actividades de toma de decisiones, en la reflexión y el razonamiento, más que en la memorización o la implementación de procedimientos rutinarios o algorítmicos.

El uso de la tecnología en el ámbito educativo ha cambiado muchas cosas, por ejemplo, ha extendido el tipo de problemas que los estudiantes son capaces de abordar. Actividades de modelación o simulación que anteriormente eran materia de trabajo de expertos en estadística, biología, economía o meteorología hoy pueden utilizarse para promover el aprendizaje de los estudiantes incluso desde nivel bachillerato.

Para ejemplificar la forma en que el uso de la tecnología puede modificar el aprendizaje de las matemáticas, considérese un problema clásico de los cursos de cálculo preuniversitario: el problema de la caja:

> Con un cartoncillo de forma cuadrada de 12 cm. de lado se quiere construir una caja abierta recortando cuadrados iguales de las esquinas y doblando hacia arriba... ¿Cuál debe ser la longitud del lado x de los cuadrados que se recortan, para que la caja tenga un volumen máximo? (Santaló y Carbonell, 1982: 195).

6 Una amplia diversidad de estos manipulativos virtuales se pueden utilizar en línea en la siguiente dirección electrónica: http://enlvm.usu.edu/ma/nav/bb_dlib.jsp

Para resolver este problema con papel y lápiz se requiere encontrar en primer lugar la expresión algebraica de la función *f* que modela la relación entre el volumen de la caja y la variable x. A continuación, se calcula la derivada de *f* y se encuentran los puntos críticos de la función. Finalmente, se verifica, mediante el criterio de la primera o segunda derivada, si los puntos críticos corresponden a un máximo o un mínimo de la función. En este ambiente de papel y lápiz, el estudiante tiene que creer que el volumen varía cuando varía el valor de x y cuenta con pocos elementos para reflexionar acerca del dominio de la función *f*.

Si este problema se aborda mediante el uso de una herramienta como Geogebra (Figura 2.6) se pueden observar algunas diferencias con respecto al trabajo en un ambiente de papel y lápiz. Por ejemplo, al trabajar con el *software*, el punto de partida no es la expresión algebraica, sino el modelo dinámico. Por otra parte, el estudiante puede visualizar la variación conjunta del volumen y de la variable x; además, se puede estimar el valor de la variable que proporciona el volumen máximo mediante la visualización de la gráfica. Asimismo, el proceso de construcción del modelo dinámico proporciona a los estudiantes la oportunidad de pensar acerca del dominio de la función y hacer explícitas las relaciones entre las propiedades de los objetos geométricos. El trabajo en un ambiente dinámico como Geogebra permite ligar entre sí a las diversas representaciones, gráficas, numéricas y algebraicas, que intervienen en el proceso de compresión del problema.

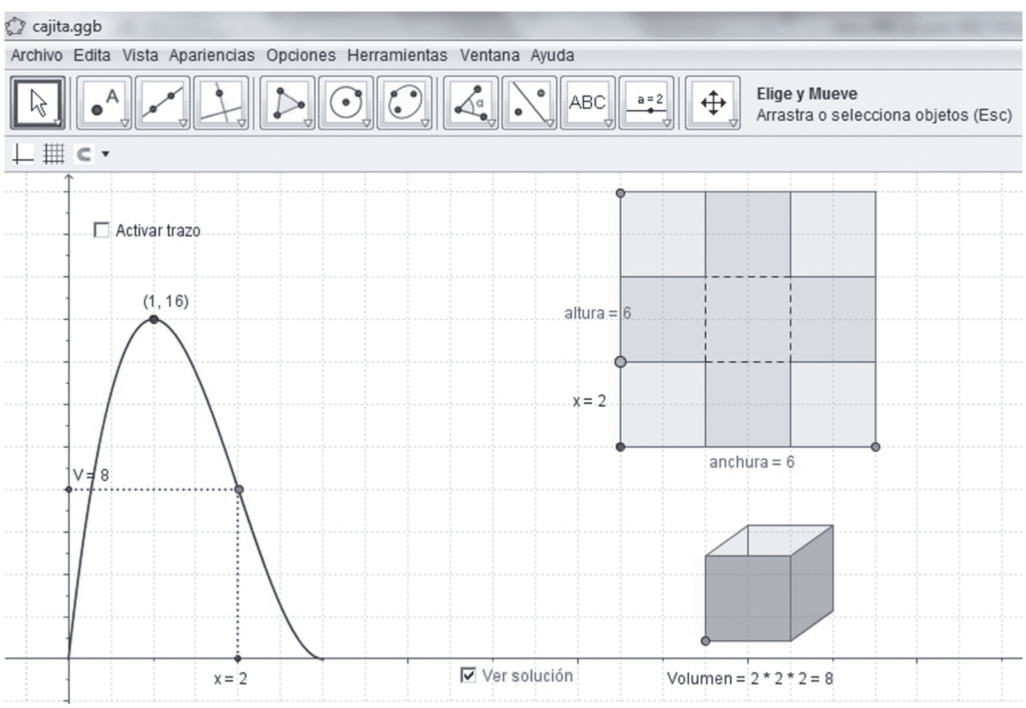


Figura 2.6. Modelo dinámico del problema de la caja.

2.5. Comunidades de profesionales y la actualización docente

Es ampliamente aceptado que el desarrollo del conocimiento y el aprendizaje, en nuestros días, se construye a partir de la interacción social entre diversos miembros de una comunidad. Por esto, afirmamos que una comunidad profesional para la actualización de docentes en matemáticas debe consistir en un grupo de profesionales que tienen como objetivo común reflexionar de manera permanente acerca del aprendizaje de la disciplina y elaborar propuestas de aprendizaje. Para tal fin, esta comunidad se integra por tres actores fundamentales: profesores de matemáticas, investigadores en educación matemática e investigadores en matemáticas. La constitución de este tipo de comunidades ha mostrado su efectividad para sustentar el trabajo de los profesores de matemáticas, por ejemplo, se ha documentado que los profesores de primaria de China se desempeñan mejor que sus contrapartes estadounidenses y existe evidencia de que esta diferencia se debe a que los primeros no sólo revisan materiales educativos individualmente, sino que lo hacen en colaboración con sus colegas. Los profesores chinos están organizados en grupos denominados *jiaoyanzu*, los cuales se reúnen semanalmente por alrededor de una hora, durante la cual discuten y comparten sus ideas y reflexiones sobre la enseñanza, además de analizar materiales educativos (Ma, 2010).

En esa comunidad de profesionales, los profesores tienen la oportunidad de intercambiar experiencias de enseñanza con sus pares y reflexionar sobre procesos de enseñanza y aprendizaje, así como revisar y ampliar los conocimientos relativos a los principios de la disciplina. De acuerdo con Hart *et al.* (1992), reflexionar sobre sus experiencias en el salón de clase les permite a los profesores obtener aprendizajes que fortalecen su actividad profesional. La colaboración regular de un profesor con sus colegas para observar, analizar, discutir y reflexionar sobre la enseñanza y la forma en que los estudiantes piensan es una actividad central de la actualización profesional de los docentes (Stigler y Hiebert, 1999).

Dentro de la comunidad profesional se debe promover el trabajo colaborativo, centrando la atención en el diseño e implementación de actividades de instrucción, así como en la construcción de rutas hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004). La interacción de los profesores en una comunidad les permitirá tener apoyo y recibir una retroalimentación por parte de sus colegas, además le ofrecerá oportunidades para compartir y discutir sus ideas que fortalecerán y enriquecerán su conocimiento matemático, así como sus estrategias para resolver problemas (Santos-Trigo, 2008).

2.6. Profesionales de la docencia en matemáticas en los niveles medio superior y superior

Llevar a cabo una enseñanza efectiva implica que los profesores deben constituirse en profesionales de la docencia, lo cual, además de una formación permanente en los ámbitos disciplinar, epistemológico y didáctico, requiere de un conjunto de condiciones que apoyen la actividad de los profesores. Un profesional de la docencia posee una extensa cultura matemática, entiende a profundidad los conceptos matemáticos que enseña y además cuenta con conocimientos sobre diferentes teorías de aprendizaje y aproximaciones didácticas. Los profesionales de la docencia, además de sus actividades en el salón de clase, deben disponer de tiempo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes fuera del aula, para interactuar con sus colegas con la finalidad de discutir sobre la enseñanza y la forma en que aprenden los estudiantes. También dedican tiempo para el diseño de actividades de instrucción y para mantenerse actualizados, de forma permanente, sobre los resultados más recientes de la investigación en educación matemática.

Entre las condiciones indispensables para que un profesional de la docencia desarrolle sus actividades de manera óptima, se requiere que los grupos que atienda sean pequeños, esto es, con no más de 30 estudiantes, con la finalidad de que el profesor pueda tener un control apropiado sobre los avances individuales de los estudiantes durante la clase y, si las actividades se llevan a cabo en grupos de tres o cuatro estudiantes, atender de seis a ocho equipos represente una actividad manejable para el profesor. En Alemania y Estados Unidos, los cursos de octavo grado (segundo de secundaria en México), por mencionar un ejemplo, cuentan en promedio con 25 estudiantes (Stigler y Hiebert, 1999).

Se recomienda que un profesional de la docencia no imparta más de cuatro horas diarias de clase frente a grupo, lo cual hace un total de 20 horas semanales. Por estas veinte horas, un profesor debería destinar dos horas adicionales para asesorías individuales o en pequeños grupos con la finalidad de resolver posibles dudas no aclaradas durante una sesión en el aula, o sobre la forma de abordar o avanzar en las actividades extra-clase. Adicionalmente, se deberían dedicar otras cuatro horas semanales para actividades complementarias, como la preparación de tareas de instrucción, el diseño de materiales didácticos y dos horas más para la discusión con colegas de su comunidad profesional. Otro elemento importante de las actividades de un docente se enfoca en el diseño y la puesta en práctica de estrategias apropiadas para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Una componente importante de la evaluación debe consistir en la interacción directa e individual del profesor con el estudiante. Con esta interacción se tendrá la oportunidad de identificar plenamente las dificultades que el estudiante experimenta y de proponer acciones que mejoren su aprendizaje. El tiempo estimado que se ha de destinar para llevar a cabo acciones de evaluación directa y personalizada podría ser de diez horas semanales. Todo el tiempo que un profesional de la docencia dedica a preparar y ejecutar acciones didácticas, dentro y fuera del aula, tendrá implicaciones de gran valía en el aprendizaje de los estudiantes. Por esta razón deben ser fomentadas y remuneradas.

Capítulo III
Resolución de problemas y marcos relacionados como sustento de un programa de formación docente

Todo programa de formación docente está basado en un marco conceptual, implícito o explícito, el cual guía y determina el tipo de actividades que se llevan a cabo así como los supuestos que sustentan su implementación, desarrollo y evaluación. Explicitar los fundamentos y supuestos de un programa de formación y actualización es útil, dado que permite comprender por qué se toman ciertas aproximaciones o rutas, por qué se seleccionan determinadas tareas o acercamientos didácticos o por qué se promueve el desarrollo de procesos mentales o formas de razonamiento particulares. En este contexto, se lleva a cabo una reflexión y discusión alrededor de temas fundamentales que incluyen una caracterización de las matemáticas como la ciencia de los patrones. Además, se bosquejan los elementos centrales de diversos marcos teóricos que consideramos de utilidad para sustentar una propuesta de formación docente, tales como el marco de resolución de problemas, el de modelos y modelado, el marco de las representaciones semióticas y diversas aproximaciones a la teoría instrumental. En esta discusión se abordan preguntas tales como: ¿qué son las matemáticas?, ¿qué significa aprender matemáticas?, ¿qué significa entender las matemáticas?, ¿cuáles son las herramientas para desarrollar y entender matemáticas?, ¿cuáles son las condiciones que favorecen el aprendizaje de las matemáticas? y ¿cómo se construye nuevo conocimiento matemático?

Además de discutir estas preguntas, se especifica la forma en que las diversas aproximaciones teóricas se complementan para entender lo que significa aprender matemáticas, conocer cuáles son las implicaciones didácticas de estos marcos y su utilidad potencial en el diseño y puesta en práctica de programas de formación y actualización docente. Nos enfocamos en la discusión de tres perspectivas teóricas que se complementan y que son frecuentemente utilizadas en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin que por ello se reste importancia a otras perspectivas que pueden ser de utilidad para comprender cómo aprenden los estudiantes. En el proceso de discusión se identifican los principales supuestos y los recursos usados para analizar y contrastar aspectos relevantes alrededor de cada perspectiva. Así, se inicia describiendo aspectos relevantes asociados con cada una de las aproximaciones teóricas y posteriormente se identifica el tipo de preguntas que se discuten en torno a cada una de ellas.

3.1. ¿Qué son las matemáticas y qué significa aprenderlas?

La respuesta a la pregunta que encabeza esta sección ha cambiado a través del tiempo. Frecuentemente las matemáticas se definen como la ciencia de la cantidad y el espacio, sin embargo las matemáticas, además de los números y la forma, también estudian el cambio (cálculo), el azar (probabilidad), los procesos en movimiento (sistemas dinámicos) o el caos. Para Steen (1988), las matemáticas son la ciencia de los patrones, y, en consecuencia, el trabajo de los matemáticos consiste en buscar y examinar patrones abstractos, mientras que las teorías matemáticas explican las relaciones entre patrones, los cuales pueden ser numéricos, de forma, de movimiento, de comportamiento, de razonamiento o de repetición (Devlin, 2000). Por otra parte, al usar o aplicar las matemáticas se recurre a esos patrones para explicar y predecir fenómenos naturales que se ajustan a ellos.

Las matemáticas son la ciencia rigurosa de Euclides, pero también son una disciplina que tiene como objetivo la búsqueda y el entendimiento de patrones en el mundo que nos rodea, a partir de evidencia empírica, por lo que el trabajo matemático consiste en "observar y codificar regularidades en los mundos de los símbolos y los objetos" (Schoenfeld, 1994: 56). Las matemáticas son una actividad inherentemente social, en la cual una comunidad de personas lleva a cabo intentos sistemáticos, basados en la observación, estudio y experimentación, para determinar la naturaleza o principios de regularidades que aparecen en sistemas definidos axiomática o teóricamente, o modelos de sistemas abstraídos de objetos o fenómenos que ocurren en el "mundo real" (*idem.*).

Asimismo, compartimos la visión de Halmos (1980) de que las matemáticas consisten esencialmente de problemas y sus respuestas. En esta línea de ideas, el aprendizaje de las matemáticas se lleva a cabo mediante la actividad de resolver problemas, la cual favorece el desarrollo de procesos mentales *análogos* a los empleados por los matemáticos profesionales al crear nuevos conocimientos disciplinares, o al aplicar las matemáticas para comprender el mundo. Es decir, aprender matemáticas significa hacer o aplicar matemáticas en niveles adecuados al contexto particular de los estudiantes.

Aunque una parte del trabajo matemático de los estudiantes consiste en la memorización y mecanización de reglas y procedimientos, es importante que desarrollen habilidades para resolver problemas y representar sus ideas en el lenguaje de las matemáticas. Es decir, el aprendizaje de la disciplina incluye buscar soluciones y memorizar procedimientos, explorar e identificar patrones y desarrollar habilidad para aplicar fórmulas, establecer conjeturas y desarrollar fluidez al aplicar procedimientos (NCR, 1989). Al estudiar matemáticas resulta relevante que los estudiantes aprendan a formular preguntas y a buscar distintos caminos para abordar y encontrar respuesta a esas preguntas, además de desarrollar una forma de pensar consistente con el quehacer matemático, en contraposición con el hecho de solamente memorizar reglas o fórmulas (Santos-Trigo, 2007). Los nuevos retos en el ámbito laboral requieren que los estudiantes desarrollen flexibilidad para plantear y resolver problemas, habilidad para desarrollar métodos de solución y sistemas conceptuales (modelos) que sean adaptables a diversas situaciones problemáticas, ya que la aparición de nuevas tecnologías ha hecho obsoletas habilidades algorítmicas convencionales que anteriormente se consideraban importantes (Hiebert *et al*., 1997). Otro aspecto relevante es que los estudiantes deben entender que aprender matemáticas es un proceso continuo de dar sentido a las ideas o conceptos matemáticos (Santos-Trigo, 2010).

3.2. Aprendizaje con entendimiento

Uno de los objetivos fundamentales de la instrucción matemática es el entendimiento. El entendimiento es crucial porque las cosas que se aprenden con entendimiento pueden utilizarse de forma flexible, adaptarse a nuevas situaciones, y utilizarse para aprender nuevas cosas (Hiebert *et al.*, 1997: 1). Cuando se aprenden reglas para operar símbolos no se está aprendiendo matemáticas, así como no se aprende historia al memorizar nombres de héroes o fechas de acontecimientos considerados importantes. Aprender matemáticas implica imaginar, crear, proponer nuevas ideas, razonar y argumentar. La actividad esencial de los matemáticos no consiste en aplicar reglas o algoritmos, sino inventar esas reglas, algoritmos y procedimientos que nos permitan entender los patrones y regularidades que aparecen en nuestro mundo.

¿Qué significa aprender matemáticas con entendimiento?, y ¿qué significa enseñar para promover el entendimiento de las matemáticas? Una de las dificultades para describir el entendimiento radica en que es un fenómeno complejo que se desarrolla a través de diferentes niveles y que constantemente está incrementándose y cambiando. De acuerdo con Hieber *et al.* (1997), conocemos algo cuando podemos ver cómo ese algo está relacionado o conectado de forma relevante con otras cosas que conocemos. Entre mayor sea el número de conexiones estructuradas que se pueden realizar, será mayor nuestro nivel de entendimiento.

Por ejemplo, un estudiante entiende (a cierto nivel) el concepto de función si puede, por ejemplo, manejar y relacionar diversas representaciones de este concepto (gráfica, algebraica o numérica), si es capaz de relacionar las diferentes interpretaciones de este concepto (regla de correspondencia, relación entre los elementos de dos conjuntos, subconjunto del producto cartesiano), si puede construir casos particulares de funciones o construir expresiones algebraicas y gráficas que no representen funciones; si puede utilizar a las funciones para modelar fenómenos, etcétera.

La evidencia del entendimiento se puede obtener a través de las explicaciones que proporcionan las personas acerca de por qué las cosas funcionan como lo hacen, ya que a partir de estas explicaciones es posible identificar las conexiones entre la situación objetivo y otras cosas que se conocen. El entendimiento tiene que ver con la medida en que los estudiantes razonan y pueden usar aquello que han aprendido. Por otra parte, el entendimiento, además de ser una de las experiencias intelectuales más satisfactorias del ser humano, es una fuente de confianza que fortalece el autoestima.

¿Cómo se lleva a cabo este proceso de elaboración de conexiones estructuradas o relevantes? En el proceso de construcción de conexiones intervienen dos procesos fundamentales: la reflexión y la comunicación. La reflexión se lleva a cabo cuando uno piensa de forma consciente sobre sus propias experiencias, analiza esas experiencias desde múltiples perspectivas y se cuestiona la razón de las acciones que lleva a cabo. Este proceso de reflexión permite establecer nuevas conexiones y revisar las conexiones ya establecidas, lo cual se traducirá en un incremento en el nivel de entendimiento (Hiebert *et al.*, 1997). Por otra parte, la comunicación involucra escuchar, hablar, escribir, justificar y razonar. La comunicación nos permite conocer las ideas de otros y reflexionar sobre ellas, contrastarlas y profundizar en las ideas propias para mejorarlas o justificarlas, así como construir nuevas ideas.

¿Cuál es el papel del profesor en el logro de un aprendizaje con entendimiento? El papel del profesor consiste en favorecer el entendimiento conceptual de los estudiantes, lo cual se lleva a cabo mediante el diseño e implementación de tareas que representen verdaderas situaciones problemáticas, las cuales permiten a los estudiantes desarrollar una forma matemática de pensar. Además, el profesor debe favorecer la construcción de un ambiente que ofrezca oportunidades para aprender, lo cual implica permitir el trabajo individual y en pequeños grupos, la comunicación de ideas, la reflexión y la discusión de diferentes soluciones, puntos de vista o rutas para abordar un problema. El profesor orienta el proceso de aprendizaje de los estudiantes mediante la formulación de preguntas y la elaboración de comentarios cuando los estudiantes ya no pueden avanzar más en el proceso de solución o cuando los estudiantes han pasado por alto un detalle o condición que es relevante para diseñar un plan de solución o implementarlo. Además, el profesor escucha a los estudiantes, identifica sus dificultades de comprensión e ideas erróneas; en resumen, trata de comprender cómo piensan sus estudiantes. Además, es capaz de identificar las ideas novedosas que aparecen durante la discusión y las utiliza como plataformas para apoyar el aprendizaje de otros estudiantes.

¿Cuál es el impacto de la interacción social que se lleva a cabo en el salón de clases sobre el entendimiento? El salón de clase es una comunidad formada por un conjunto de personas que comparte una serie de objetivos comunes. Esta comunidad debería constituirse en un microcosmos matemático en el que la interacción y comunicación entre sus miembros sea esencial para favorecer el entendimiento. En un salón de clases de este tipo existen condiciones para que los estudiantes expresen sus ideas, además de que escuchen y reflexionen sobre las ideas de los demás, porque cada una de estas ideas puede contribuir al aprendizaje de todos los miembros de la comunidad. Además, es importante que los estudiantes reconozcan que existen diversos caminos o rutas para abordar una tarea o para solucionar un problema. Una tercera característica que resulta relevante promover en el salón de clases es el reconocimiento de que los errores representan oportunidades para aprender.

3.3. Resolución de problemas

El marco de resolución de problemas tiene su antecedente principal en el trabajo desarrollado por Polya (1945), quien a partir de su experiencia como matemático profesional identificó y caracterizó cuatro fases por las que se transita al resolver un problema o tarea matemática: *a)* comprender el problema, *b)* concebir un plan, *c)* ejecutar el plan y *d)* examinar la solución obtenida (visión retrospectiva). En cada una de estas fases se ejemplifican algunas preguntas y estrategias que pueden ser de utilidad para avanzar en el proceso de solución de un problema.

Para Polya (2005), las actividades en el salón de clases orientadas a la ejercitación de operaciones rutinarias, en las que el objetivo del aprendizaje es aprobar un examen, impiden el desarrollo intelectual de los estudiantes y limitan su interés en las matemáticas. Por el contrario, cuando las actividades que los estudiantes llevan a cabo incluyen problemas que constituyen un reto, problemas que los estudiantes pueden resolver utilizando los recursos de los que disponen, y en algunos casos, mediante el apoyo de preguntas y sugerencias elaboradas por el profesor —cuyo objetivo es centrar la atención en aspectos o detalles que pudieran haberle pasado desapercibidos al estudiante—, se puede despertar su curiosidad y el gusto por el pensamiento independiente. A través de la resolución de problemas relevantes, que requieren de cierto grado de independencia, originalidad y creatividad, los estudiantes podrán dar sentido a las ideas matemáticas, entender cómo se descubren los hechos o resultados matemáticos, cómo ellos mismos pueden descubrir o inventar esos resultados y comprender los mecanismos mediante los que esos hechos se justifican, organizan y sistematizan. En lo que respecta al proceso de enseñanza, Polya resalta que la actividad del profesor consiste en apoyar a los estudiantes para avanzar en el proceso de solución de problemas. La asistencia brindada por el profesor debe ser tal que se deje a los estudiantes asumir *una parte razonable del trabajo* (énfasis en el original); para ello debe tratar de ver los problemas desde el punto de vista del estudiante y entender cómo piensa, para así ofrecer sugerencias o formular preguntas que promuevan operaciones intelectuales útiles para avanzar en la solución de los problemas. La formulación de preguntas, además de ayudar al estudiante a avanzar en el proceso de solución, también tiene el objetivo de desarrollar su habilidad para que pueda resolver otros problemas de forma independiente mediante la utilización de esas preguntas como referente.

Una de las contribuciones más importantes del trabajo de Polya al marco de resolución de problemas es el concepto de heurística, una estrategia de carácter general que puede permitir avanzar en el proceso de solución, pero que no asegura la obtención de una respuesta al problema. Las heurísticas tienen el objetivo de promover procesos mentales que típicamente resultan útiles al resolver problemas. Entre estas heurísticas se pueden mencionar: encontrar un problema más simple relacionado con el problema original, relajar una o más condiciones del problema, considerar el problema como resuelto, trabajar hacía atrás, dibujar una figura, trazar elementos auxiliares, analizar casos particulares, utilizar la analogía, entre otras.

Las aproximaciones de resolución de problemas enfatizan la importancia de que los estudiantes desarrollen recursos y estrategias para pensar matemáticamente así como un trabajo creativo en un nivel apropiado (Polya, 1981). Aquí los problemas son cruciales para que el estudiante construya conocimiento matemático y aprenda a pensar matemáticamente. Pensar matemáticamente incluye ser flexible e ingenioso en la disciplina y usar el conocimiento de forma eficiente (Schoenfeld, 1985).

¿Qué significa ser flexible e ingenioso en matemáticas? ¿Qué significa usar el conocimiento matemático de forma eficiente? Abordar estas preguntas es fundamental para reconocer que una componente central para estimular el pensamiento matemático de los estudiantes es la adquisición de hábitos, recursos, estrategias y disposiciones que reflejen la práctica matemática. Esto es, desde la perspectiva de resolución de problemas se considera que hay una relación directa entre el proceso de desarrollar o aplicar las matemáticas y la forma en que el estudiante aprende o construye conocimiento matemático. Las matemáticas son una herramienta que los seres humanos utilizamos para entender el mundo que nos rodea, por lo que hacer matemáticas es más que llevar a cabo cálculos y deducciones; hacer matemáticas involucra la identificación de patrones, la formulación y justificación de conjeturas, la estimación de respuestas, la comunicación de resultados, la modelación y la formulación de nuevos problemas. En resumen, desde una perspectiva de resolución de problemas, las matemáticas son consideradas como la ciencia de los patrones y el orden (NCR, 1989).

Un avance en el marco de resolución de problemas respecto del trabajo de Polya lo llevó a cabo Schoenfeld (1985), quien trató de entender el porqué de la dificultad de implementar las heurísticas. Al tratar de categorizar o explicar el desempeño de los estudiantes al resolver problemas, Schoenfeld se dio cuenta de que las heurísticas se expresaban con bastante generalidad, por lo que debían ejemplificarse en contextos particulares; además, identificó la existencia de dimensiones particulares o categorías que influyen directamente sobre el desarrollo de una forma matemática de pensar entre los estudiantes: *a)* recursos básicos o conocimiento base que involucra las definiciones básicas, hechos, notaciones, fórmulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un área particular o tema, incluyendo formas de acceder a ese conocimiento, *b)* estrategias de resolución de problemas que incluyen formas de representar y analizar los problemas para entender y resolverlos (algunos ejemplos de esas estrategias son explorar sub-metas: encontrar un problema más sencillo o un problema análogo, descomponer el problema, visualizar el problema mediante el uso de un diagrama, trabajar hacia atrás, etc.), *c)* estrategias metacognitivas que involucran el conocimiento sobre las propias funciones cognitivas (¿qué necesito y cómo uso ese conocimiento?) y estrategias para monitorear y controlar los procesos cognitivos propios (¿qué estoy haciendo?, ¿por qué lo estoy haciendo?, ¿hacia dónde voy?), *d)* creencias y componentes afectivos que incluyen la forma en que los estudiantes conceptualizan a las matemáticas y a la resolución de problemas, así como la disposición y actitudes de los estudiantes para involucrarse en actividades matemáticas. Estos componentes están relacionados y se han usado ampliamente para documentar y analizar los comportamientos de resolución de problemas de los estudiantes. Las dimensiones que caracterizan las formas de pensamiento matemático de los estudiantes y los expertos emergieron de observar y analizar en detalle el proceso de solución de una amplia variedad de problemas. Un ejemplo del tipo de problemas empleados fue: *inscribir un cuadrado en un triángulo dado. Dos vértices del cuadrado deben estar sobre la base del triángulo dado, los otros dos vértices del cuadrado sobre los otros dos lados del triángulo, uno en cada lado* (Schoenfeld, 1985: 85).

Preguntas relevantes que se pueden formular y dar seguimiento durante la solución de este problema involucran: ¿qué condiciones o propiedades debe tener un triángulo para inscribir un cuadrado en él?, ¿dónde se localiza uno de los vértices superiores de ese cuadrado inscrito?, ¿cómo puedo inscribir un cuadrado en un triángulo isósceles o equilátero?, ¿puedo dibujar un cuadrado que tenga dos vértices sobre un lado del triángulo dado?, etc.

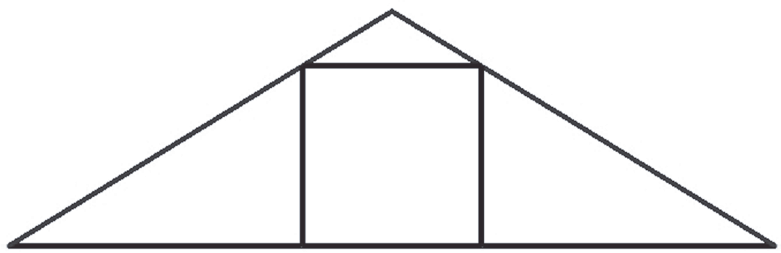


Figura 3.1. Cómo inscribir un cuadrado en un triángulo isósceles (considerar casos particulares).

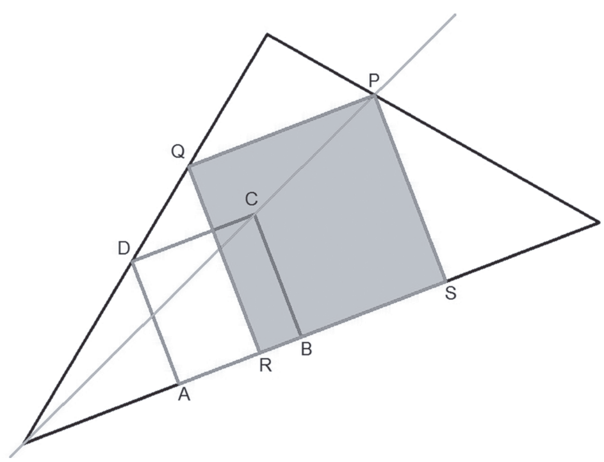


Figura 3.2. El uso de estrategias heurísticas (considerar el problema como resuelto y trabajar hacia atrás).

El análisis del desempeño de los estudiantes basado en la consideración de las dimensiones identificadas por Schoenfeld también ha sido de utilidad para detectar defectos o concepciones erróneas y se han desarrollado marcos similares de análisis para explicar el origen y las formas de examinar los comportamientos matemáticos de los estudiantes. Especialmente Perkins y Simmons (1988) se propusieron discutir el desempeño en resolución de problemas a través de lo que ellos llamaron marcos de conocimiento, que incluyen: el marco de contenido (definiciones, hechos y algoritmos junto con las estrategias metacognitivas relacionadas con su uso), el marco de resolución de problemas (estrategias específicas y generales de resolución de problemas, creencias y procesos de autorregulación), el marco epistémico (estrategias y criterios para validar el conocimiento); y el marco de investigación (estrategias específicas y generales para generar, criticar y extender el conocimiento). Así, las competencias de resolución de problemas y los defectos en las competencias de los estudiantes se explican en términos del grado de robustez que han desarrollado en sus experiencias de resolución de problemas. En particular, la falta de desarrollo de esos marcos proporciona información útil para explicar las dificultades de los estudiantes para tratar con problemas matemáticos. Por ejemplo, un estudiante. al responder que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ con a, $b \in \mathbb{R}$, no ha desarrollado un medio o criterio para validar este tipo de afirmaciones (marco epistémico).

La resolución de problemas ha sido el centro de atención de investigación en educación matemática durante las últimas tres décadas, por lo que ha influido notablemente en el diseño de diferentes propuestas curriculares que sugieren no solamente una reorganización de los contenidos del currículum en términos de líneas de pensamiento matemático (números y operaciones, álgebra, patrones y funciones, geometría y relaciones espaciales, medida y análisis de datos y probabilidad), sino también el desarrollo de procesos matemáticos o acciones cognitivas asociadas con la práctica de la disciplina (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones) [NCTM, 2000].

3.4. Representaciones y visualización

Las representaciones y la visualización no solamente juegan un papel crucial en la comprensión de las matemáticas; el desarrollo de una forma matemática de pensar de los estudiantes también puede explicarse en términos del uso de varias representaciones. La evolución de conocimiento matemático y el aprendizaje pueden trazarse en términos del tipo de representaciones usadas para pensar las matemáticas, ya que una parte importante de la historia de las matemáticas es acerca de la creación y el refinamiento de sistemas de representación, y mucha de la enseñanza de las matemáticas se relaciona con el manejo de las representaciones y la resolución de problemas con ellas (Lesh, Landau y Hamilton, 1993, citado en Goldin y Shteingold, 2000). Los matemáticos apoyan sus razonamientos en los sistemas simbólicos, pues éstos son herramientas que favorecen los procesos de pensamiento y razonamiento. Entonces, una parte importante del trabajo de los matemáticos consiste en la creación y el refinamiento de sistemas simbólicos (reglas y convenciones para utilizar símbolos) que capturen aspectos esenciales de su entendimiento intuitivo y medios de operación (Thompson y Saldanha, 2003).

Dado que el objeto de estudio de las matemáticas son entes ideales, el conocimiento acerca de ellos solamente se puede obtener mediante sus representaciones, es decir, mediante signos, palabras, símbolos o dibujos, a diferencia de otras ciencias en las que los objetos de estudio (plantas, rocas, estrellas, células, calor, sonido, etcétera) se pueden percibir directamente con los sentidos (la vista, el tacto, el gusto, el oído) o indirectamente mediante el uso de instrumentos como el microscopio o el telescopio. En matemáticas, las representaciones son esenciales porque a través de las operaciones que se realizan sobre ellas es posible obtener un conocimiento de los objetos matemáticos que representan.

La historia de las matemáticas muestra que los avances de la disciplina se relacionan con la creación y disponibilidad de diversos sistemas de representación; por ejemplo, el desarrollo del álgebra se llevó a cabo hasta que se contó con sistemas simbólicos útiles para plasmar y procesar relaciones entre cantidades desconocidas. Pero, ¿qué es una representación? De acuerdo con Duval (1995), una representación es algo que representa[1] otra cosa más que a sí mismo, es decir, algo que se utiliza para hacer referencia a otro algo diferente del primer objeto; además, el uso de varios registros de representación (lenguaje natural, expresiones simbólicas, gráficas, diagramas) de objetos matemáticos y la coordinación de esos registros son importantes en el desarrollo de la comprensión de las matemáticas de los estudiantes (Duval, 1999). Entonces es natural preguntar: ¿qué significa la "coordinación" de esos registros?, ¿qué preguntas es importante elaborar para pensar y representar los objetos matemáticos a través de diferentes representaciones?, ¿cómo puede evaluarse esa coordinación entre los diferentes registros? Esas preguntas parecen ser el centro o base del marco de representaciones y visualización.

Cuando se habla de representaciones, resulta relevante considerar algunos aspectos.

El sistema mediante el cual se produce la representación. El contenido de la representación cambiará en función del sistema utilizado para producirla; por ejemplo, imaginemos las representaciones de un triángulo producidas con papel y lápiz, con un *software* dinámico o como imagen mental; cada una de ellas posee algunas características específicas que se deben al sistema con que se crearon y que son adicionales a las propiedades del objeto representado.

---

1 De acuerdo con el *Diccionario de la Lengua Española* (22ª ed.), la palabra *representar* tiene entre sus acepciones a las siguientes: *a)* sustituir a alguien o hacer sus veces, desempeñar su función o la de una entidad, empresa, etc., *b)* ser imagen o símbolo de algo, o imitarlo perfectamente.

La relación entre la representación y el objeto representado. En el caso de las matemáticas esta relación es esencialmente denotativa.

La posibilidad de acceso al objeto representado aparte de la representación semiótica. Hay que realizar una diferencia entre las representaciones de objetos que pertenecen al mundo material y que podemos percibir directa o indirectamente mediante los sentidos, y las representaciones de objetos que son únicamente ideales.

Las razones por las cuales el uso de la representación es necesario. Éstas pueden ser de comunicación (expresar ideas acerca del objeto representado) o de procesamiento (operar la representación para obtener información del objeto representado) [Duval, 2000].

Muchas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deben en gran medida al sistema en el que se produce la representación, ya que el estudiante muchas veces es incapaz de aprovechar las ventajas de los diferentes registros de representación, y la capacidad de articular esos diferentes registros para lograr una compresión conceptual de las matemáticas. Un factor importante en matemáticas en relación con las representaciones se refiere a la transformación u operación de éstas. Existen esencialmente dos tipos de transformaciones que se pueden realizar con las representaciones, el procesamiento y la conversión (Duval, 2000; 2006).

El procesamiento se lleva a cabo cuando se transforma u opera una representación dentro de un mismo registro. Por ejemplo, considérese la representación en nuestro sistema decimal del número siete mil ochocientos sesenta y tres (7 863). Esta representación se puede procesar dentro del registro aritmético para obtener la representación $7(10^3)+8(10^2)+6(10)+3$, y procesar nuevamente en el mismo registro aritmético para obtener $7(10^3-1)+8(10^2-1)+6(10-1)+24$, representación en la cual se puede observar fácilmente que el número es divisible entre 3. También se puede mencionar, como ejemplo, la operación que se lleva a cabo en el registro geométrico al reorganizar figuras para observar relaciones e invariantes. Considérese una estrella formada por triángulos equiláteros; la figura se puede procesar en el registro geométrico para concluir que el área de la estrella es el doble del área de un hexágono cuyo lado mide un tercio del lado del triángulo equilátero original (Figura 3.3).

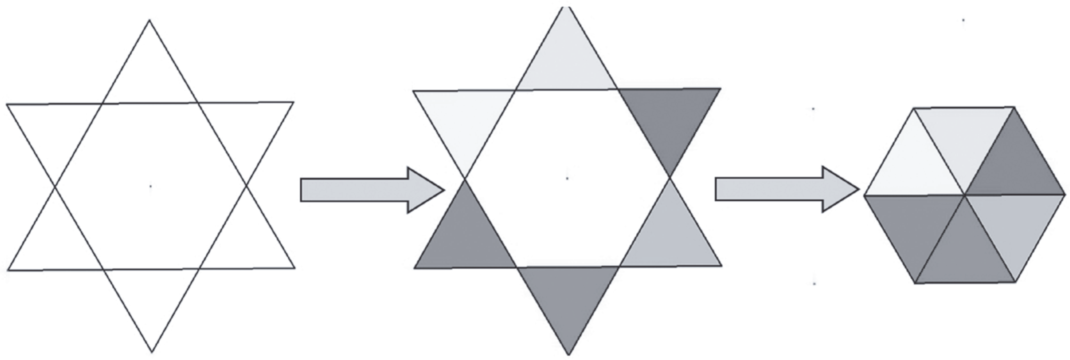


Figura 3.3. Procesamiento de representaciones en el registro geométrico.

Se puede proporcionar un ejemplo más de procesamiento, al considerar un palíndromo[2] general de cuatro cifras $abba$, el cual puede procesarse para obtener las siguientes representaciones:

$$\mathrm{a}(1000) + \mathrm{b}(100) + \mathrm{b}(10) + \mathrm{a} = \mathrm{a}(1001) + \mathrm{b}(110) = 11(91\mathrm{a} + 10\mathrm{b});$$

de la representación anterior se deduce fácilmente que un palíndromo de cuatro cifras es divisible entre 11.

Por otra parte, la conversión entre representaciones se lleva a cabo al transformar la representación en un registro dado por una representación equivalente en otro registro, por ejemplo, cuando, a partir de la representación algebraica de una función, se obtiene el bosquejo de la gráfica. Cuando se trabaja en un ambiente de papel y lápiz esta conversión puede requerir de una conversión intermedia del registro algebraico en una representación numérica organizada en una tabla.

En matemáticas, las representaciones se convierten en objetos de estudio por sí mismas, ya que son fuente de nuevas abstracciones que sirven como modelos útiles de patrones no anticipados (Fey, 1990). Entender ideas matemáticas y resolver problemas matemáticos son procesos que involucran el uso de distintos tipos de representaciones y el aprovechamiento de las fortalezas de las diversas representaciones para ofrecer información diferenciada sobre los objetos matemáticos (Lesh, Behr y Post, 1987). Por ejemplo, cuando se resuelve la ecuación cuadrática $4x^2 + 45x - 225 = 0$, usando la fórmula general, el discriminante puede expresarse como $45^2 + (16)(225)$. Éste también puede representarse como $(5^2)(3^4) + (2^4)(3^2)(5^2)$; además, como $(3^2)(5^2)(9 + 16)$ o como $(3^2)(5^4)$. Esta última representación conduce inmediatamente a la solución, que es $x = -15$ y $x = 15/4$. De forma similar, la función cuadrática asociada con esa ecuación cuadrática puede expresarse como $y = ax^2 + bx + c$

2 Un palíndromo es una palabra, frase o número que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Por ejemplo, la palabra "anilina", la frase "dábale arroz a la zorra el abad" (*Diccionario de la Lengua Española*, 22ª ed.) o el número "1234321".

$(a \neq 0)$, y esta expresión puede escribirse como:

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{y}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{bx}{a} \Rightarrow \frac{y}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \Rightarrow \frac{y}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow y = a\left[x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

y la última forma indica directamente que el vértice $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$es dónde la parábola alcanza un valor extremo (máximo o mínimo). En resumen, “escribir $f(x) = x^2 - 1$ como $f(x) = (x-1)(x+1)$ indica qué entradas producen 0 como resultado” (Cuoco, 2002: 269). Esto es, una representación adecuada de los objetos matemáticos arroja luces sobre las propiedades inmersas en esos objetos.

Las representaciones de objetos matemáticos no son entidades aisladas, por el contrario, forman parte de un sistema que incluye un conjunto de propiedades y reglas (estructura) necesarias para operar con y entre esas representaciones. “Una fórmula específica o ecuación, un arreglo concreto de bloques en base diez, o una gráfica particular en coordenadas cartesianas tiene sentido solamente como parte de un sistema amplio en el cual los significados y convenciones han sido establecidos” (Goldin y Shteingold, 2001: 1). Así, las formas que adoptan los estudiantes para representar y conectar el conocimiento matemático funcionan como un vehículo para entender y estructurar ese conocimiento profundo y así poderlo usar en situaciones de resolución de problemas.

El uso de las calculadoras y la tecnología computacional en general puede ampliar algunas representaciones tradicionales externas cambiando sus características, por ejemplo, de estáticas a dinámicas (Kaput, 1994). En este contexto, hay una interacción global entre las representaciones externas e internas de los estudiantes durante el desarrollo de sus experiencias matemáticas. “Un carácter externo se experimenta como significativo o no, en función de si se conecta con las representaciones internas de caracteres de los individuos en un sistema que para él es operativo” (Goldin y Kaput, 1996: 404). Es decir, “es el nivel interno el que en gran parte determina la utilidad de tales sistemas de representaciones externas, de acuerdo a cómo el individuo los entiende e interactúa con ellos” (Goldin, 2002: 211).

De esta forma, los estudiantes deben centrar su actividad en la construcción de poderosos sistemas de representación, constituyéndose esto en un objetivo importante en la instrucción matemática. Algunas veces se considera lo externo para representar lo interno —cuando un estudiante expresa una relación que él tiene en mente al dibujar una gráfica— mientras que en otras ocasiones, o aun simultáneamente, se puede considerar lo interno para representar lo externo —cuando un estudiante visualiza lo que describe una gráfica o una fórmula algebraica— (Goldin, 2002).

En este contexto, se identifican tres fases importantes que caracterizan el desarrollo de sistemas de representación de los estudiantes: *a)* una fase de invención/semiótica, en la cual nuevas configuraciones internas son construidas basadas en representaciones establecidas previamente, *b)* un periodo de desarrollo estructural, y *c)* una fase autónoma, en la cual los nuevos sistemas de representaciones funcionan flexible y poderosamente con significados nuevos o más generales en nuevos contextos (Goldin, 2002).

Hay una conexión directa entre los marcos de resolución de problemas y de representaciones y visualización, ya que las actividades de resolución de problemas incluyen una atención especial en que los estudiantes analizan los fenómenos matemáticamente en términos de gráficas de funciones, representaciones algebraicas y numéricas entre variables, gráficas de flujo, dibujos a escala y el uso de tablas. Ciertamente, el uso de las representaciones abarca todas las actividades de resolución de problemas. Las representaciones deben tratarse como un elemento esencial para sustentar el entendimiento conceptual de los estudiantes, para comunicar sus aproximaciones matemáticas, argumentos y justificaciones, así como para apoyar el entendimiento de uno mismo y de los otros, para reconocer conexiones entre conceptos matemáticos relacionados, y para aplicar las matemáticas a situaciones problemáticas reales a través del modelado (NCTM, 2000).

3.5. Modelos y modelado

El término *modelo* es un ingrediente clave para explicar el aprendizaje de los estudiantes. Un modelo es un sistema que consiste de elementos, relaciones entre elementos, operaciones que describen o explican cómo interactúan esos elementos y los patrones o reglas que son aplicables a las relaciones y operaciones precedentes. Los modelos son sistemas que se utilizan para describir, interpretar, explicar o realizar predicciones sobre el comportamiento de algún fenómeno (Doerr y Tripp, 1999). En sus intentos por entender o resolver problemas, los estudiantes desarrollan o construyen modelos matemáticos que los ayudan a razonar sobre un sistema (poder explicativo) y también puede usarse para llegar a nuevas inferencias o aprender contenido nuevo (poder de predicción). En este contexto, los estudiantes desarrollan modelos para construir, describir, o explicar sistemas significativos o fenómenos con los que se encuentran, en términos de recursos matemáticos o matemáticamente. También, y de mayor relevancia, los estudiantes desarrollan sistemas conceptuales mediante la construcción de modelos y los usan para construir nuevos conceptos.

Aprender matemáticas involucra el desarrollo de modelos en los que el énfasis está en las características estructurales subyacentes del sistema y en la capacidad para razonar con el modelo acerca del sistema que se estudia. El desarrollo de un nuevo modelo está basado en razonamientos que se extraen de modelos existentes, relacionados de alguna forma con la situación problemática, mediante la realización de analogías de un sistema familiar o al menos parcialmente entendido a un nuevo sistema con una estructura matemática no familiar (Doerr y Tripp, 1999).

Esta perspectiva reconoce la interacción e interdependencias de los modelos mentales o internos (representaciones que se encuentran activas mientras se trabaja en problemas particulares y guían el uso de inferencias y operaciones mentales) y modelos externos (aquéllos que son expresados por el uso de diferentes medios: lenguaje, símbolos, diagramas o metáforas). Las incompatibilidades entre la interpretación del sujeto que aprende y las interpretaciones de otros, así como las incompatibilidades entre una interpretación del sujeto y algunas interpretaciones institucionalizadas de las representaciones externas, pueden crear la necesidad para nuevas interpretaciones o representaciones. Esto puede conducir a modificaciones o cambios en el pensamiento de uno o más sujetos que aprenden, resultando en un modelo refinado, potencialmente más poderoso (Doerr y Tripp, 1999).

En esta perspectiva se reconoce que las actividades de modelado son importantes para que los estudiantes revelen varias formas de pensamiento y favorecer el desarrollo de sus sistemas conceptuales como resultado de resolver las actividades. El modelado es visto como la interacción entre tres tipos de sistemas: *a)* sistemas conceptuales internos, *b)* sistemas de representación que funcionan como una exteriorización de los sistemas conceptuales internos y como una interiorización de sistemas externos, y *c)* sistemas externos que son experimentados por naturaleza o son artefactos que fueron construidos por otros. Esos sistemas se encuentran traslapados, son interdependientes y se encuentran en interacción constante (Doerr yTripp, 1999).

Un objetivo importante en un ambiente de modelos y modelado es que los estudiantes desarrollen sistemas conceptuales o modelos para dar sentido a situaciones de resolución de problemas ricas en matemáticas. En este proceso, los estudiantes necesitan expresar, evaluar, revisar, rechazar o construir sus ideas. En las actividades de modelación, los estudiantes producen herramientas conceptuales que incluyen explícitamente sistemas descriptivos o explicativos que funcionan como modelos, los cuales revelan aspectos importantes acerca de cómo los estudiantes interpretan las situaciones de resolución de problemas (Lesh y Doerr, 2003).

Así, el conocimiento matemático que los estudiantes muestran durante las interacciones con las tareas inicialmente depende del sentido que ellos dan a éstas. Entonces, la misión de los estudiantes al resolver problemas es desarrollar una herramienta que pueda ser útil o transferible en otras situaciones, por lo que los estudiantes se enfocan también en examinar los patrones matemáticos o la estructura involucrada en sus aproximaciones de solución. Los estudiantes van de pensar con un modelo a pensar acerca de éste. Así, la tarea se convierte en un vehículo para acceder y extender el conocimiento matemático de los estudiantes. Para pensar matemáticamente necesariamente se hace uso de los elementos del pensamiento matemático (identificar información, encontrar relaciones entre datos e incógnitas, explorar e identificar patrones, formular conjeturas, justificar y comunicar resultados). En los procesos del pensar matemáticamente, un elemento fundamental lo constituye el empleo y manejo de sistemas de representación relevantes en una variedad de medios escritos, hablados, construidos o seleccionados, así como de fluidez en la representación de ideas y conceptos matemáticos (Lesh y Doerr, 2003).

Se debe notar que hay bases comunes en las perspectivas de representaciones y visualización y de modelos y modelado. En algunos enunciados, cambiar la palabra representación por modelo parece que hace poca diferencia en la descripción de los sistemas conceptuales. En defensa de su elección de términos, Lesh y Doerr (2003) argumentan: "hemos adoptado una terminología simple que la gente ordinaria considera como productiva y no pretenciosa —siempre que esas interpretaciones sean cercanas a lo que pretendemos, sin que lleven mucho bagaje conceptual no intencionado—" (8). Sin embargo, un aspecto clave en una perspectiva de modelos y modelado es el reconocimiento de que la solución a los problemas, en general, involucra varios "ciclos de modelado" en los cuales las descripciones, explicaciones y predicciones gradualmente se refinan, revisan o rechazan —con base en la retroalimentación de ensayos de evaluación—. Además, durante la interacción de los estudiantes con la tarea, los estudiantes por sí mismos deben ser capaces de monitorear sus procesos de resolución de problemas.

Lester (2005) identifica características clave asociadas con la perspectiva de modelos y modelado: *a)* Hace uso de una variedad de medios de representación para expresar los modelos que se han desarrollado, *b)* se dirige hacia la solución de problemas (o la toma de decisiones) que tienen lugar fuera de las teorías mismas (como un resultado, los criterios de éxito también se encuentran fuera de las teorías), *c)* es situada (es decir, los modelos son creados para propósitos específicos en situaciones específicas), y *d)* los modelos se desarrollan de tal forma que puedan modificarse y adaptarse.

El diseño de actividades de *model-eliciting* involucra pensar en una situación en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar y refinar constructos matemáticos para representar y examinar relaciones asociadas con una tarea o problema. Un buen ejemplo es el problema de "pie grande", que se ha usado extensivamente con estudiantes de educación secundaria. Un tema matemático fundamental que guía esta actividad es el uso de razonamiento proporcional. El enunciado de la tarea es:

> Esta mañana temprano, la policía descubrió que, en algún momento de la noche pasada, algunas personas reconstruyeron la vieja fuente de ladrillo utilizada para beber en el parque, donde les agrada jugar a una gran cantidad de niños del vecindario. A las familias en el vecindario les gustaría agradecer a la gente que hizo eso. Todo lo que la policía pudo encontrar fueron montones de huellas de zapatos. Una de las huellas se muestra en la figura. La persona que dejó esta huella parece ser bastante alta. Pero, para encontrar a esta persona y sus amigos, ¿ayudaría si pudiéramos imaginar qué tan alto es?—Tu trabajo es elaborar un conjunto de herramientas sobre "cómo hacerlo", de tal forma que la policía pueda usarlo para elaborar buenas suposiciones sobre qué tan alta es la persona —con tan sólo mirar sus huellas—. El conjunto de herramientas debe funcionar para huellas como la que se muestra en la figura. Pero también debe funcionar para otras huellas (Lesh y Doerr, 2003: 6).

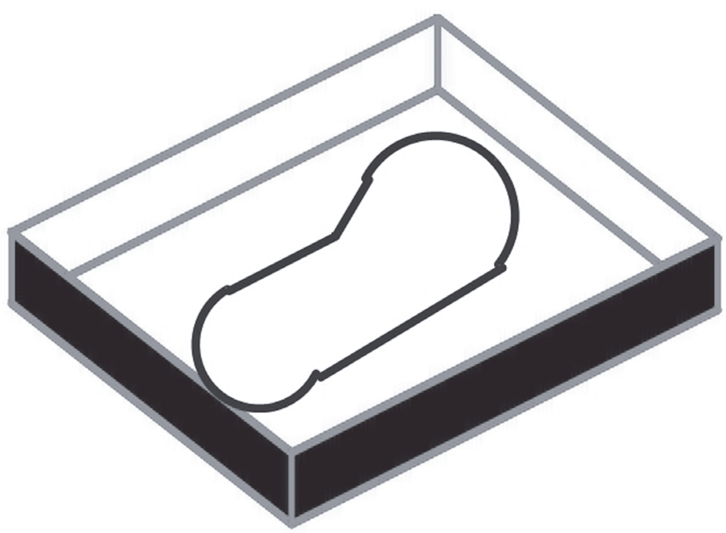


Figura 3.4. Huella del zapato.

Depende de los investigadores y practicantes juzgar la pertinencia de cada marco conforme con lo que se ajusta mejor a sus objetivos educativos y a sus intereses. Sin embargo, como Boaler, Ball y Even (2003) establecen: "Los investigadores deben desarrollar una constelación peculiar de actitudes que incluyen ser escépticos, estar abiertos a la sorpresa, tratar de probar las ideas erróneas de uno y considerar alternativas" (493).

Desde el principio, es conveniente identificar el alcance de cada perspectiva. Esto es, es importante reconocer el foco y tipo de explicaciones favorecidas o asumidas en cada perspectiva para explicar los comportamientos matemáticos de los estudiantes. En particular, hay interés por discutir los procesos de desarrollo o de construcción de conocimiento matemático de los estudiantes. Se identificaron dos principales tendencias: perspectivas o aproximaciones que explican el desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes en términos de la discusión de tendencias globales basadas en la identificación de recursos, estrategias y comportamientos metacognitivos, y aquéllas que centran la atención en los comportamientos microscópicos de los estudiantes, mostrados durante el proceso de entendimiento de ideas matemáticas particulares. Así, el alcance proporciona el contexto para discutir otros temas.

3.6 Alcance de cada perspectiva

Hay evidencia de que las perspectivas de resolución de problemas parecen proporcionar un marco útil para analizar aspectos globales del desempeño matemático de los estudiantes. Por ejemplo, los resultados de la investigación en resolución de problemas frecuentemente reconocen la importancia de que los estudiantes conceptualicen una visión de las matemáticas consistente con la práctica de la disciplina, para monitorear sus procesos de resolución de problemas y para desarrollar el conocimiento base o recursos para comprender y resolver problemas no rutinarios. Sin embargo, esta perspectiva se interesa principalmente en explicar comportamientos generales de resolución de problemas de los estudiantes, pero proporciona poca información explícita y detallada acerca de competencias matemáticas propias de resolución de problemas. Las dimensiones de la resolución de problemas (recursos básicos, estrategias cognitivas y metacognitivas, creencias y componentes afectivos) son importantes para caracterizar el desempeño de los estudiantes en términos generales (el grado en el cual los estudiantes exhiben elementos importantes del pensar matemáticamente), pero son insuficientes para explicar las formas en las cuales los estudiantes desarrollan esas dimensiones en concordancia con la práctica de la disciplina.

Las perspectivas de representaciones y visualización se enfocan en explicar micro-comportamientos alrededor de los procesos de aprendizaje de los estudiantes que involucran descripciones de las formas en que los estudiantes transitan desde el uso de una representación a otra. Aquí se reconoce que las representaciones y la visualización juegan un papel fundamental para pensar y aprender matemáticas. En este marco, el uso de sistemas semióticos y el entendimiento de cómo funcionan durante el aprendizaje de los estudiantes se ha vuelto un aspecto importante para explicar el proceso de aprendizaje y entendimiento de conceptos matemáticos.

La perspectiva de modelos y modelado enfatiza la construcción de sistemas conceptuales (modelos) por parte de los estudiantes pero ofrece poca información sobre cómo los mismos estudiantes desarrollan nuevos conocimientos para construir modelos más robustos. Ciertamente, no hay información explícita acerca del papel del maestro como orientador de los estudiantes hacia la construcción de esos modelos.

Con respecto al tipo de visión matemática apoyada por cada perspectiva, es posible reconocer características asociadas directamente con la práctica o desarrollo de las matemáticas con la perspectiva de resolución de problemas. Esto es, las matemáticas son vistas como una ciencia de los patrones que se desarrolla o se aprende dentro de un ambiente que favorece y estimula procesos de búsqueda o reflexión que conducen al entendimiento de fenómenos a través del uso de recursos matemáticos. La perspectiva de modelos y modelado ve a la disciplina como un sistema de relaciones que pueden ser expresadas a través de modelos. Así, los sistemas conceptuales, los sistemas cognitivos y los modelos son los ingredientes fundamentales para explicar los procesos de entendimiento de las ideas matemáticas de los estudiantes. Las perspectivas de representaciones identifican a las matemáticas como sistemas de representaciones semióticas que tratan con ideas matemáticas y sus transformaciones basadas en el uso de diferentes registros de representación.

3.7. Características de los problemas o tareas en cada perspectiva

¿Qué tipo de tareas o problema se usan, dentro del marco, para explorar, promover, y documentar el aprendizaje de los estudiantes? Esta pregunta es importante para analizar los propósitos y las formas de usar los problemas durante la investigación y la instrucción. En este contexto, las perspectivas de resolución de problemas reconocen a las tareas no rutinarias como un vehículo para que los estudiantes exhiban sus formas de pensamiento y sus comportamientos de resolución de problemas. Esos problemas están inmersos en diferentes contextos y su entendimiento requiere el uso de recursos y estrategias que pueden conducir a los estudiantes a resolverlos y, en algún momento, a proponer nuevas preguntas o problemas. En particular, los problemas no rutinarios proporcionan oportunidades a los estudiantes para que exploren distintas formas de solución, para usar diferentes representaciones, para formular conjeturas, para presentar argumentos y para comunicar resultados (Schoenfeld, 2002). Un ejemplo de un problema no rutinario utilizado para explorar las formas de razonamiento de los estudiantes es:

Da un ejemplo de una función cuyo dominio sean los números reales, sea continua y no negativa, con un valor máximo de 1000 en $x=1$ y tal que el área bajo su gráfica sea menor que $1/1000$.

Aquí los estudiantes tiene la oportunidad de preguntar, por ejemplo, ¿qué significa que una función sea continua y no negativa?, ¿una función puede tomar únicamente el valor cero y llamarse no negativa?, etc., para eventualmente examinar candidatos de funciones como la Figura 3.5:

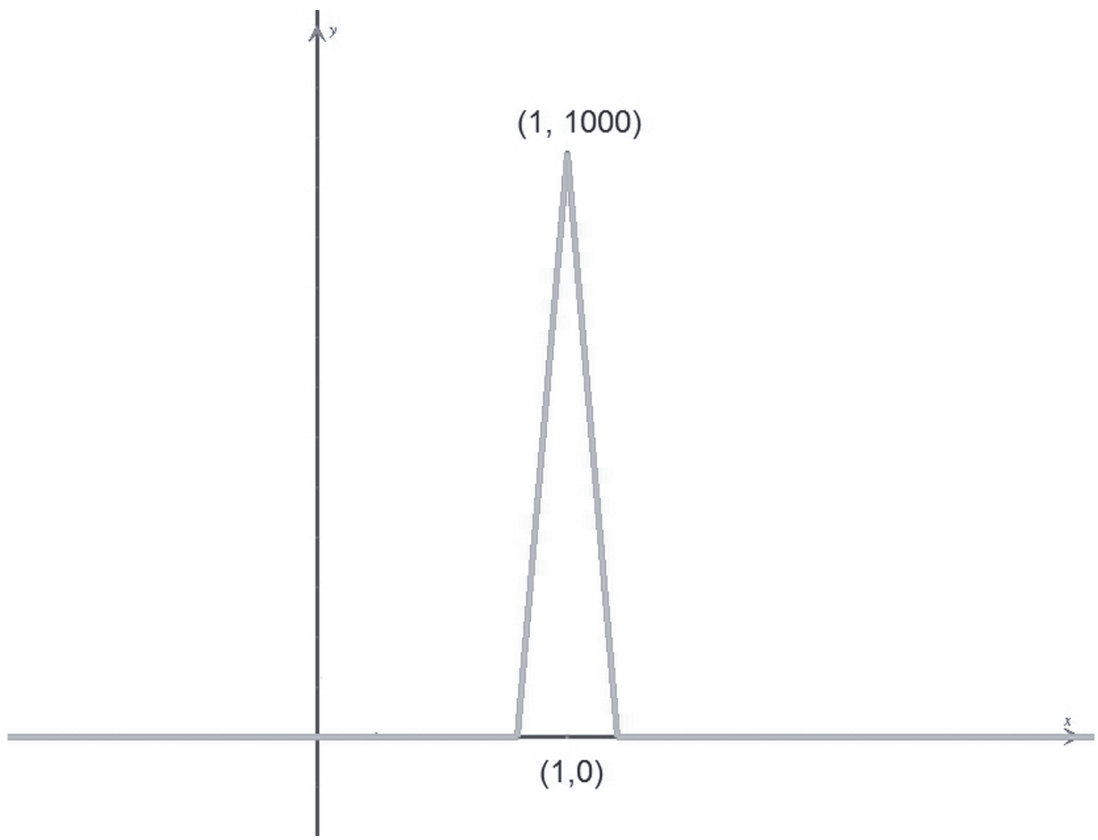


Figura 3.5. Función que satisface las condiciones del problema.

Los problemas o actividades usados en la perspectiva de modelos y modelado involucran tareas sin fin determinado, presentadas en contextos reales y significativos para los estudiantes. Las actividades se encuentran estrechamente relacionadas con las formas en que los estudiantes analizan sus propias formas de pensamiento, sin predeterminar cómo debe lucir su solución final (Lesh y Yoon, 2004). Ciertamente, una característica particular de este tipo de tareas es que no hay una solución particular que todos los estudiantes necesiten conseguir; más bien, los modelos plausibles que solucionan el problema dependen de un conjunto de condiciones que los estudiantes juzgan que es importante considerar mientras abordan la tarea. Un ejemplo de una reflexión que revela la actividad es:

En el problema del aeroplano de papel se pide a los estudiantes que lean un artículo sobre cómo hacer diferentes tipos de aviones de papel. Posteriormente, los estudiantes elaboran sus propios aviones y evalúan sus características de vuelo, mediante intentos de golpear un objetivo siguiendo diferentes tipos de rutas de vuelo. En cada prueba, los estudiantes toman medidas de *a)* la distancia total de vuelo, *b)* la distancia a la que se encuentra del objetivo, y *c)* el tiempo de vuelo. La misión de los estudiantes es escribir una carta a estudiantes de otra clase describiendo cómo tales datos pueden usarse para evaluar a los aviones para cuatro tipos de características: *a)* mejor flotador (va lentamente en el aire por un tiempo largo), *b)* más acertado, *c)* mejor *boomerang*, y *d)* mejor en general (Lesh y Doerr, 2003).

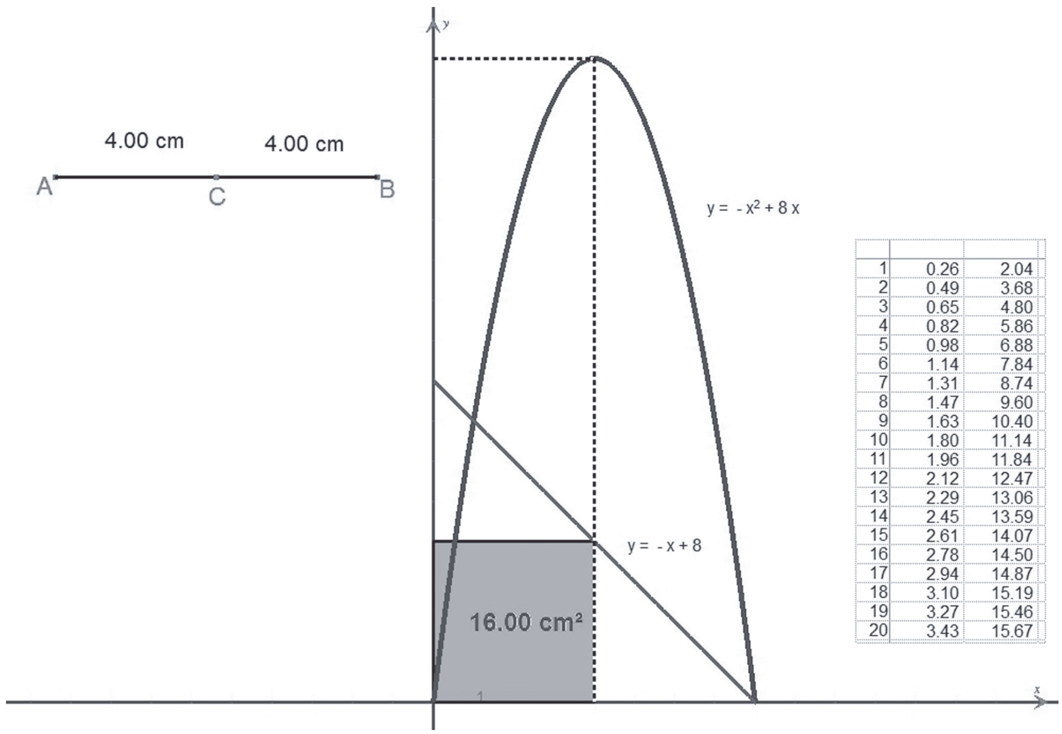
Otro problema similar consiste en crear un indicador que permita medir el desempeño de los diferentes países que asisten a las Olimpiadas. Para llevar a cabo esta tarea, se puede buscar en Internet información acerca del número de medallas que cada uno de los países participantes obtuvo en los últimos Juegos Olímpicos (Tabla 3.1).

Algunas sugerencias de los estudiantes para medir el desempeño de los países en las Olimpiadas podrían ser considerar el total de medallas o crear un índice ponderado que otorgue diferentes valores para cada una de las preseas obtenidas (por ejemplo, se podría crear un índice en el que las medallas de oro tengan un valor de tres puntos, las de plata un valor de dos puntos y las de bronce un valor de un punto; también se podría sugerir establecer una medida basada en el índice anterior y en la población de cada uno de los países, ya que entre dos países que obtuvieran un índice con el mismo valor, podría tener más meritos aquél cuya población sea menor).

	País	Oro	Plata	Bronce	Total
1	Estados Unidos	46	29	29	104
2	China	38	27	22	87
3	Gran bretaña	29	17	19	65
4	Rusia	24	25	33	82
5	Corea	13	8	7	28
6	Alemania	11	19	14	44
7	Francia	11	11	12	34
8	Italia	8	9	11	28
9	Hungría	8	4	5	17
10	Australia	7	16	12	35
11	Japón	7	14	17	38
12	kazajistán	7	1	5	13
13	Holanda	6	6	8	20
14	Ucrania	6	5	9	20
15	Cuba	5	3	6	14
16	Nueva Zelanda	5	3	5	13
17	Irán	4	5	3	12
18	Jamaica	4	4	4	12
19	República Checa	4	3	3	10
20	Corea del Norte	4	0	2	6
21	España	3	10	4	17
22	Brasil	3	5	9	17
23	Bielorrusia	3	5	5	13
24	Sudáfrica	3	2	1	6
25	Etiopía	3	1	3	7
26	Croacia	3	1	2	6
27	Rumania	2	5	2	9
28	Kenia	2	4	5	11
29	Dinamarca	2	4	3	9
30	Azerbaiyán	2	2	6	10
Fuente: http://televisadeportes.esmas.com/tdn/479531/2012-medallero-olmpico-londres-2012/					

Tabla 3.1. Medallas por país obtenidas en los XXX Juegos Olímpicos de Londres 2012.

Las perspectivas de representaciones confían en el uso de problemas en los cuales los estudiantes pueden usar múltiples representaciones para discutir relaciones y propiedades matemáticas. Así, las representaciones numéricas y geométricas frecuentemente son relevantes para analizar y discutir fenómenos matemáticamente. Además, los problemas o fenómenos que pueden analizarse en términos de representaciones algebraicas, numéricas o gráficas son importantes en esta perspectiva para entender conceptos matemáticos fundamentales asociados con la situación en estudio. El problema "dados dos números reales que suman P, encontrar cuándo es máximo el producto de esos números" puede representarse en diversas formas, como se muestra a continuación:



1	0.26	2.04
2	0.49	3.68
3	0.65	4.80
4	0.82	5.86
5	0.98	6.88
6	1.14	7.84
7	1.31	8.74
8	1.47	9.60
9	1.63	10.40
10	1.80	11.14
11	1.96	11.84
12	2.12	12.47
13	2.29	13.06
14	2.45	13.59
15	2.61	14.07
16	2.78	14.50
17	2.94	14.87
18	3.10	15.19
19	3.27	15.46
20	3.43	15.67

Figura 3.6. Un problema con múltiples representaciones.

Otros ejemplos de problemas que son útiles para promover elementos importantes considerados en las perspectivas analizadas son:

1. En algunas notas periodísticas se menciona que a algún concierto o evento político llevado a cabo en el Zócalo de la ciudad de México asistieron 350 mil o 500 mil personas y uno se puede preguntar si tiene sentido o es real esta información. A partir de este tipo de noticias, uno se puede preguntar acerca de un método para estimar la cantidad de personas que pueden caber de pie en el Zócalo del DF. El proceso de solución implica buscar información, por ejemplo, las medidas de esta explanada y posteriormente

diseñar un procedimiento para estimar cuántas personas caben de pie en un metro cuadrado, y a continuación estimar el número de personas que pueden permanecer de pie en un rectángulo que cuente con las dimensiones aproximadas del Zócalo de la ciudad de México.

2. Uno de los problemas que se perciben como de mayor importancia por la población en general es el de la inseguridad. ¿Cómo se podría crear una medida para evaluar los niveles de inseguridad en los diferentes estados de la república mexicana? La elaboración de una medida de este tipo podría elaborarse con base en el número de delitos denunciados ante el Ministerio Público (información que generalmente se encuentra en las páginas de Internet de las procuradurías estatales de justicia), o con base en información de las encuestas de victimización elaboradas por el INEGI.[3] Esta actividad, además de favorecer el desarrollo del pensamiento numérico, permitirá a los estudiantes relacionar a las matemáticas con otras áreas del conocimiento, tales como el derecho, la criminología, la sociología, la política, etcétera. Además, permitirá contrastar las ventajas y desventajas de cada una de las medidas propuestas, así como comparar los niveles de inseguridad entre los estados y entender que se pueden obtener conclusiones diferentes en función del tipo de medida que se haya diseñado para medir la inseguridad.

3. Otro problema de preocupación general es el de la basura. Al respecto, se puede llevar a cabo una actividad en la que los estudiantes diseñen un procedimiento para estimar la cantidad de basura diaria que se produce en su localidad o municipio. Para resolver el problema anterior, los estudiantes podrían integrar equipos y cada uno de los integrantes podría estimar la cantidad de basura diaria que genera cada uno de los habitantes de su familia, y a partir de esa información estimar la cantidad (peso o volumen) de basura que se genera diariamente en la localidad, utilizando información sobre población obtenida de los censos del INEGI.

Para identificar características relevantes asociadas con cada perspectiva, explicamos en detalle los temas que definen nuestro marco (bosquejado previamente) para caracterizar aspectos relacionados con la disciplina (cómo se caracteriza la disciplina), el tipo de tareas (qué tipo de tareas promueven el aprendizaje de las matemáticas), el proceso de aprendizaje (cómo se lleva a cabo el aprendizaje) y la evaluación (cómo se evalúan las competencias matemáticas). La información presentada a continuación muestra las diferencias principales en términos del uso del lenguaje (terminología) y centra la atención alrededor de cada perspectiva. Así, la tabla 3.2 proporciona información útil para contrastar temas comunes en cada perspectiva teórica.

3 Los resultados de la aplicación de estas encuestas se pueden consultar en la siguiente dirección electrónica:
http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/proyectos/encuestas/hogares/regulares/envipe/default.aspx

Perspectiva	Características Matemáticas	Tipo de Tareas	Procesos de Aprendizaje	Ambientes de aprendizaje	Evaluación
Resolución de Problemas	Las matemáticas como una ciencia de patrones Relación directa entre la práctica matemática de los estudiantes y el aprendizaje de los estudiantes El pensamiento matemático involucra la formulación de preguntas, conjeturas, relaciones y el uso de diferentes tipos de argumentos.	Tareas no rutinarias que incluyen problemas por resolver en clase, problemas y proyectos de tarea. Transformar tareas rutinarias en actividades no rutinarias a través de procesos que involucran la formulación de preguntas.	Dimensiones de resolución de problemas: recursos básicos, estrategias cognitivas y metacognitivas (monitoreo y autocontrol), sistemas de creencias (afecto).	El salón de clases como un microcosmos matemático. El salón de clases como comunidades matemáticas. Los estudiantes trabajan en pequeños grupos, y desarrollo de participación grupal. El instructor como proveedor de apoyo.	Procesos de solución de problemas no rutinarios. Competencias de los estudiantes en procesos matemáticos que incluyen: representaciones Comunicación Elaboración de conjeturas Formulación de preguntas Distintos tipos de argumentos Monitoreo
Representaciones	Distinción entre objetos matemáticos y sus representaciones Pensamiento matemático expresado a través de representaciones semióticas.	Tareas que involucran el uso de representaciones múltiples	Coordinación de representaciones Tránsito de una representación a otra (significado). Operaciones dentro del mismo registro; conversión de registros y discriminación de registros.	Ambientes de resolución de problemas para promover la construcción de representaciones de ideas matemáticas y sus conexiones por parte de los estudiantes.	Evidencia de que los estudiantes muestran conexiones entre los registros. Reconocimiento del mismo objeto a través de diferentes representaciones.
Modelos y Modelado	Las matemáticas como un sistema de relaciones útiles para entender y dar sentido a distintos fenómenos. Resolver una situación o tarea conduce a la construcción de herramientas para el pensamiento. Se ve a las matemáticas como un sistema con elementos, operaciones, reglas y relaciones.	Las tareas inmersas en distintos contextos. Las soluciones involucran explicaciones, descripciones, interpretaciones, representaciones, operaciones, algoritmos, argumentos, extensiones, revisiones, ajustes, etc.	El aprendizaje involucra la construcción de modelos o sistemas conceptuales. El aprendizaje se expresa a través de una sucesión de ciclos de modelado que pueden evolucionar de ser modelos no estables a modelos robustos o estables.	Los ambientes de aprendizaje son diseñados alrededor de la discusión de tareas de model-eliciting. Los estudiantes frecuentemente trabajan en parejas o grupos de tres y el maestro funciona como un monitor durante las sesiones.	Desarrollo de herramientas conceptuales de los estudiantes que se usan en la resolución de familias de problemas. Autoevaluación de los estudiantes: El estudiante se transforma en el "cliente" quién revisa y evalúa sus resultados y los de otros.

Tabla 3.2. Características de los marcos que sustentan la visión del aprendizaje y formación docente en matemáticas.

Un aspecto importante que no se aborda directamente en cada perspectiva es el uso sistemático de herramientas computacionales en los procesos de aprendizaje. Esto es, observamos que los principales resultados de la investigación asociados con cada una de las perspectivas se obtuvieron tras examinar el trabajo de los estudiantes que involucra el uso de papel y lápiz (Schoenfeld, 1992; Duval, 1999) y algunos pocos casos de estudiantes que usaron Excel para trabajar en actividades "reveladoras del pensamiento" (Lesh y Doerr, 2001). En este contexto, es importante reflexionar sobre el grado en el cual el uso sistemático de herramientas computacionales en actividades de aprendizaje invita a rexaminar los principios básicos asociados con un marco particular para explicar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Reconocemos que diferentes herramientas computacionales pueden ofrecer distintas posibilidades a los estudiantes para interactuar con las tareas matemáticas. Por ejemplo, el uso de *software* de geometría dinámica puede ser una herramienta importante para identificar invariantes o relaciones asociadas con problemas o fenómenos particulares al construir una representación dinámica del problema, mientras que el uso de la hoja electrónica de cálculo puede resultar útil para detectar patrones o regularidades, así como representar información y relaciones relevantes de un problema. En este contexto, es importante examinar el grado en el cual las preguntas que los estudiantes elaboran, las representaciones que utilizan y los argumentos que usan para sustentar sus resultados con el uso de la tecnología son consistentes con aquéllos que aparecen en las aproximaciones con papel y lápiz. Independientemente de las herramientas particulares que se usen, éstas moldean la forma en que pensamos. La actividad matemática requiere del uso de las herramientas, y las herramientas que usamos influyen sobre la forma en que pensamos acerca de una actividad o problema. El entendimiento se genera al elaborar conexiones o relaciones mediante el uso de diversas herramientas (Hiebert *et al.*, 1997).

Nuestra posición es que es necesario generar y analizar más datos para caracterizar con detalle el tipo de pensamiento matemático que emerge cuando los estudiantes utilizan sistemáticamente las tecnologías digitales en sus procesos de entendimiento de ideas matemáticas. Como consecuencia, los marcos que explican el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes necesitan ajustarse constantemente de acuerdo con lo que los estudiantes obtienen en sus aproximaciones de resolución de problemas que incorporan el uso de distintas herramientas tecnológicas. Además, es importante revisar diferentes posiciones teóricas para identificar bases comunes y formas de reconciliar y unificar los principios fundamentales más que rechazarlos sin presentar argumentos sólidos. Como establece Goldin (2003), el tema de unificar y reconciliar diversas perspectivas teóricas, y un obstáculo para progresar, ha sido la dimisión de constructos de otros sistemas de creencias por los sistemas de creencias prevalecientes, sobre fundamentos *a priori* (pero no científicos). Esas dimisiones, cuando son tomadas seriamente, han tenido consecuencias dañinas para la práctica educativa en matemáticas.

Goldin (2003) proporciona varios ejemplos para ilustrar este punto. Respecto a la posición de algunos científicos cognitivos, se establece que algunos teóricos consideran que todo el pensamiento —y en particular el pensamiento matemático— consiste exclusivamente en metáforas de varios tipos. Si se toma a esta visión seriamente, probablemente veremos una devaluación posterior y un descrédito de los sistemas formales y las matemáticas abstractas como tópicos del salón de clases, nuevamente con consecuencias desafortunadas. Además, las teorías cognitivas prevalecientes en educación matemática han dado poco énfasis al afecto. Así, es importante para la comunidad de educación matemática comunicar y discutir ideas alrededor del trabajo teórico y práctico para evaluar y valorar su potencial ya que "...la falta de comunicación conlleva la imposibilidad de acumular y el hábito de 'reinventar la rueda'" (Sfard, 2005: 399).

¿Qué características son relevantes en el conocimiento matemático? ¿Cómo aprenden los estudiantes nuevo conocimiento matemático? ¿Cómo pueden los estudiantes construir o desarrollar conceptos matemáticos más allá de aquéllos que han aprendido? ¿Qué procesos incluye la capacidad de los estudiantes para articular sus competencias en el aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué tipo de tareas son relevantes para que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático? ¿Qué condiciones de instrucción son importantes para que los estudiantes aprendan? Preguntas de este tipo fueron relevantes y parte de un marco de investigación para examinar el alcance y poder explicativo asociado a cada perspectiva. El grado en el cual cada una dirige temas explícitos involucrados en ese tipo de preguntas fue importante durante el análisis de los recursos relacionados con cada perspectiva. Ciertamente, los aspectos que emergieron durante el análisis, y fueron importantes para estructurar y ponderar la información que fue analizada, involucraron:

Alcance del marco. Aquí fue evidente que las perspectivas de resolución de problemas y modelos y modelado se enfocan en explicar procesos cognitivos generales o macro alrededor del aprendizaje de los estudiantes, mientras que la perspectiva de representaciones parece centrarse en explicar comportamientos de aprendizaje particulares y detallados de los estudiantes.

Recursos y medios de informar. Esto es, la naturaleza en sí misma de cada perspectiva difiere ya que la resolución de problemas, por ejemplo, se ocupa directamente de aspectos relacionados con el conocimiento matemático (¿qué son las matemáticas?) y formas para crear un microcosmos matemático en el salón de clases, mientras que la perspectiva de representaciones solamente trata con esos componentes de forma implícita. La perspectiva de modelos y modelado parece enfatizar la importancia de que los estudiantes apliquen sus recursos matemáticos para entender y resolver problemas que inicialmente son significativos para ellos o su medio.

La necesidad de una herramienta de evaluación. Una dificultad inicial apareció cuando se tuvo que decidir lo que había que observar en cada perspectiva, esto es, la existencia de distintas perspectivas en el campo requiere el desarrollo de formas para examinar y contrastar sus principios y afirmaciones principales, en términos de evaluar las contribuciones que realizan para entender problemas importantes de la disciplina. Las preguntas que ayudaron a enmarcar la discusión representan un punto inicial para pensar en esa herramienta de evaluación.

Formulación de preguntas. Una característica común asociada a las tres perspectivas es que los estudiantes desarrollan, construyen y transforman su propio entendimiento como resultado de elaborar preguntas relevantes, darles seguimiento mediante diferentes medios y llevar a cabo una revisión constante dentro de una comunidad de aprendizaje.

Tecnología y las perspectivas. El uso de la tecnología ha influido notablemente en las formas en que los estudiantes representan y examinan el conocimiento matemático y los marcos necesarios para reajustar sus principios de acuerdo con los tipos de transformaciones que se producen por el uso de artefactos tecnológicos en el aprendizaje de los estudiantes.

La existencia de una variedad de perspectivas para enmarcar los estudios sobre enseñanza y aprendizaje hace necesario y relevante para los investigadores, maestros y estudiantes evaluar el potencial de usar esos marcos. Así, las preguntas que hemos propuesto y usado para explorar dentro de los marcos necesitan examinarse y refinarse para avanzar en la determinación de lo que es importante que incluya un marco que sustente la formación de profesores.

Capítulo IV
Tareas de instrucción en la construcción del conocimiento matemático

¿Cuál es la importancia del diseño de actividades o tareas de instrucción? ¿Cuál es la relación de las tareas con el proceso de aprendizaje? ¿Cuál es la relevancia del diseño de tareas de instrucción en la formación y actualización profesional de los profesores de matemáticas? En una perspectiva de resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas, el conocimiento se construye a través de la acción que los estudiantes ejercen sobre los objetos del conocimiento durante el proceso de resolver problemas. En este contexto, las actividades de instrucción son el vehículo para que los estudiantes aprendan matemáticas. Por lo anterior, las actividades que se implementen en el salón de clase deben diseñarse de forma que den lugar a procesos inquisitivos de discusión, razonamiento, comunicación y reflexión matemática que a su vez apoyen la construcción de un aprendizaje con entendimiento (Hiebert *et al.*, 1997), de un aprendizaje en el que se dé sentido a las ideas o conceptos matemáticos.

De acuerdo con Hiebert, "entendemos algo si podemos ver cómo este algo se relaciona con otras cosas que conocemos" (*op. cit.*: 4). Así, el objetivo de las tareas de aprendizaje es ayudar a que los estudiantes robustezcan su estructura conceptual para quea través de ellas puedan establecer conexiones entre diversos conceptos de una o diversas áreas de las matemáticas o entre conceptos matemáticos y de otras áreas del conocimiento. Una estructura conceptual robusta se manifiesta mediante la exhibición de diversas conexiones entre contenidos al abordar una situación problemática. Por ejemplo, discutir las soluciones enteras de la ecuación $x^2 = 2y^2$ puede llevar a concluir que $\sqrt{2}$ es irracional; por otro lado, modificando ligeramente esta ecuación se obtiene $x^2 - 2y^2 = 1$. Ahora tiene sentido preguntarse si la nueva ecuación tiene solución, conocer la forma de calcular las soluciones y descubrir que éstas pueden utilizarse para aproximar $\sqrt{2}$, lo que lleva a un entendimiento más profundo de la conexión entre diversos conceptos. A la vez, esta ecuación se puede generalizar para estudiar la irracionalidad de la raíz cuadrada de cualquier número primo, p. La discusión de las soluciones de la ecuación $x^2 - py^2 = 1$, con p un primo, también puede llevar a establecer una relación con la teoría de fracciones continuadas, herramienta fundamental en diversas áreas de las matemáticas, tanto puras como aplicadas (Barrera y Reyes, 2010).

Con base en lo expresado con anterioridad, el diseño de tareas de instrucción constituye un elemento clave en la formación docente, ya que estas tareas son el medio para favorecer el proceso de construcción de conocimiento con entendimiento de los estudiantes. ¿Qué es una tarea de aprendizaje matemático? ¿Cuáles son las características de estas tareas? ¿Cómo diseñar tareas de aprendizaje matemático en las que el uso de la tecnología apoye el aprendizaje de las matemáticas? ¿Qué tipo de preguntas o dilemas pueden formular los estudiantes como resultado de utilizar sistemáticamente las herramientas tecnológicas en la ejecución de las tareas? ¿En qué medida las tecnologías digitales funcionan como una herramienta útil para que los estudiantes visualicen, exploren y construyan relaciones matemáticas durante sus experiencias de aprendizaje? ¿Qué tipo de conocimientos deben mostrar los diseñadores de tareas de aprendizaje matemático? ¿Cuáles principios teóricos pueden sustentar el diseño de las tareas de aprendizaje?

Las tareas que promueven el aprendizaje con entendimiento tienen al menos tres características: *a)* las tareas deben ser problemáticas (con esto se quiere decir que los estudiantes vean a la tarea como una actividad interesante, como un reto), *b)* las tareas deben permitir al estudiante conectar lo que conoce con el nuevo conocimiento, es decir, la tarea debe permitir que los estudiantes utilicen sus conocimientos y habilidades para desarrollar un método o procedimiento que les permita abordar la tarea y avanzar en el proceso de solución y *c)* la tarea debe permitir que los estudiantes piensen y reflexionen acerca de ideas matemáticas importantes, además de que lleven a cabo procesos de razonamiento y comunicación de ideas.

Una tarea de aprendizaje matemático debe considerar el conocimiento previo del estudiante y proveer a éste de elementos para el desarrollo de nuevos conceptos que se articulen con los ya existentes en su red conceptual. De forma más específica, una tarea de aprendizaje matemático debe considerar los siguientes elementos: *a)* un objetivo de aprendizaje, *b)* elementos matemáticos estructurados en torno al objetivo de aprendizaje, *c)* escenarios para ejecutar la tarea y *d)* un proceso inquisitivo para desarrollarla (Barrera, 2009).

El objetivo de aprendizaje. Es un enunciado en el que se establecen los elementos conceptuales a ser desarrollados y articulados durante la ejecución de la tarea.

Los elementos matemáticos estructurados por el objetivo de aprendizaje. En esta parte se identifican dos clases de elementos: los externos a la actividad, también llamados recursos matemáticos, así como aquellos específicamente relacionados con el enunciado del problema.

Los escenarios para desarrollar la tarea. Por un escenario para desarrollar la tarea entenderemos un lugar físico provisto de los elementos apropiados para realizarla, así como una comunidad (compañeros, profesor) que permita al estudiante interactuar con sus miembros, con la finalidad de fomentar un proceso inquisitivo y de esta forma desarrollar los elementos que le ayuden a expresar o comunicar ideas matemáticas. Para que los estudiantes vean a la matemática como una actividad con sentido, necesitan aprenderla en un salón de clase que sea un microcosmos de la cultura matemática, es decir, donde los valores de las matemáticas como una disciplina se reflejen en la práctica cotidiana (Schoenfeld, 1988; citado en Santos-Trigo, 1997: 3).

El proceso inquisitivo. Una componente importante al ejecutar una tarea de aprendizaje matemático consiste en formular preguntas o dilemas tendientes a articular los elementos matemáticos iniciales con aquéllos que conduzcan a la consecución de lo planteado en el objetivo de aprendizaje y posibles extensiones. Durante el proceso inquisitivo, el tipo de preguntas o dilemas que se formulen darán lugar al surgimiento de diferentes trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004). Es importante mencionar que el proceso inquisitivo se ve ampliado significativamente con la incorporación de herramientas computacionales, como se ilustra en las tareas matemáticas que se proponen en este documento.

El diseño y puesta en práctica de las tareas de aprendizaje matemático suponen la existencia de un profesor con dos componentes esenciales. Por un lado, que posea conocimientos matemáticos que le permitan satisfacer sus necesidades instruccionales, es decir, que sus conocimientos sean apropiados para dar sentido a los procesos matemáticos involucrados en una tarea y que sea capaz de identificar relaciones matemáticas y apreciar conexiones e interpretaciones así como usar varios tipos de argumentos para validar y sustentar dichas relaciones (Davis y Simmt, 2006). Y, por otro, conocer y reflexionar acerca de los procesos que tienen lugar durante el aprendizaje de las matemáticas.

¿De qué manera puede un profesor de matemáticas adquirir los conocimientos necesarios que le permitan diseñar tareas de aprendizaje matemático? ¿Quiénes deben participar en la formación y actualización de profesores de matemáticas? ¿En qué tipo de programas educativos deben participar los profesores de matemáticas en servicio para revisar y extender sus conocimientos matemáticos e incorporar los resultados de investigación a su práctica docente? ¿Qué experiencias de aprendizaje deben incluir esos programas educativos? Éstas son algunas de las preguntas que deben ser consideradas al diseñar programas de formación y actualización de profesores de matemáticas tendientes a que éstos adquieran conocimientos que les permitan diseñar y poner en práctica tareas de instrucción. Sin lugar a dudas, los educadores matemáticos y los matemáticos deberían jugar un papel central en la formación y actualización de los docentes.

La actividad del profesor y su función durante la implementación de las tareas. El profesor es un elemento clave del proceso de instrucción porque los estudiantes aprenden matemáticas a través de las actividades y experiencias que los profesores les proporcionan (NCTM, 2000), de tal forma que los conocimientos matemáticos que construyan se encuentran moldeados por las formas de enseñanza a las que son expuestos en la escuela. En este contexto, profesores altamente capacitados en los ámbitos disciplinar, epistemológico y didáctico tendrán mejores oportunidades de diseñar tareas y escenarios de instrucción que promuevan el desarrollo de conocimiento matemático con entendimiento en los estudiantes. Contar con conocimientos profundos sobre los contenidos matemáticos es la base para una enseñanza en la que se promueva el desarrollo de una forma matemática de pensar, porque indudablemente no se puede enseñar aquello que no se sabe. Asimismo, el conocimiento de teorías que analizan cómo aprenden los estudiantes, así como los medios para implementar estas ideas teóricas en el salón de clase, son elementos esenciales de la actividad docente. Durante la implementación de las actividades, la función del profesor consiste en guiar y orientar al estudiante: *a)* en la ejecución de la tarea desde el punto de vista puramente matemático, ayudándole a formular preguntas que lo orienten en una ruta de aprendizaje, y *b)* a conceptualizar las matemáticas como un modo de pensar crítico en el proceso de resolver problemas. La formulación de preguntas que orienten las rutas de aprendizaje tiene el objetivo de aportar elementos que lleven al desarrollo de un proceso inquisitivo, entendiéndose por esto la formulación sistemática de preguntas encaminadas a entender y proponer soluciones a una tarea, así como extender o generalizar el problema original para continuar con un nuevo ciclo de resolución de problemas (Santos-Trigo, 2007). Como señalan Ball y Bass (2003), “enseñar matemáticas involucra establecer conexiones a través de diferentes dominios matemáticos, ayudar a los estudiantes a construir ligas y coherencia en su conocimiento” (12).

Uso de la tecnología. La integración de las tecnologías digitales en el aprendizaje es importante porque las herramientas computacionales constituyen medios que ayudan a trascender las limitaciones de la mente (Pea, 1987) e influyen en las características del aprendizaje que construyen los estudiantes. Particularmente, el uso de herramientas computacionales durante la resolución de problemas puede promover que los estudiantes exploren y analicen problemas matemáticos desde perspectivas en las que se favorecen las aproximaciones visuales y empíricas. Las tecnologías digitales permiten a los estudiantes experimentar, observar relaciones matemáticas, formular conjeturas, construir pruebas y comunicar resultados en formas que complementan las aproximaciones con papel y lápiz.

¿De qué forma el uso de las tecnologías digitales puede apoyar el desarrollo de una forma matemática de pensar? Mediante el uso de las tecnologías digitales es posible construir representaciones que son dinámicas, es decir, representaciones que se pueden ligar de forma que el cambio en una de ellas se refleja en un cambio en el resto. Además, son manipulables, lo cual significa que es posible interactuar, operar o modificar las representaciones y sus relaciones de una forma más directa de lo que es posible en ambientes de papel y lápiz, mediante la acción de un *mouse* y el teclado. La conjunción de las características anteriores se traduce en la posibilidad de crear familias de configuraciones que al modificarse permiten a los estudiantes la observación de relaciones e invariantes que son el punto de partida para el desarrollo de una actividad matemática significativa orientada a la exploración, la formulación de conjeturar, el razonamiento matemático y la comunicación de resultados.

Los problemas o tareas. Los problemas son la base para el entendimiento de conceptos y el desarrollo de formas de trabajo y de competencias matemáticas porque los problemas no solamente dirigen la atención de los estudiantes hacia aspectos específicos de los conceptos o contenidos matemáticos, sino también hacia las formas en que procesan la información y conocimientos de los que disponen (Cai, 2003). La literatura en educación matemática aporta evidencia de que los problemas utilizados en el proceso de instrucción definen las características del aprendizaje de los estudiantes (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001; NCTM, 2000; Stein y Smith, 1998).

Utilizar problemas con alta demanda cognitiva (Stein y Smith, 1998), es decir, que requieren más que recordar y aplicar algoritmos o procedimientos rutinarios, ofrece a los estudiantes oportunidades de desarrollar competencias diversas. Por ejemplo, si los problemas se encuentran enmarcados en un contexto del mundo real, el estudiante debe simplificar el problema mediante la formulación de supuestos que facilitarán el modelizar la situación y, una vez formulado el modelo, operar los elementos del mismo en un contexto matemático para obtener conclusiones que a su vez serán interpretadas en términos del fenómeno real. Si el problema se desarrolla en un contexto puramente matemático, el estudiante podrá hacer uso de diferentes representaciones para avanzar en la resolución de un problema, manejar símbolos y formalismos, razonar matemáticamente y elaborar justificaciones y demostraciones. Por su parte, la utilización de problemas en contextos hipotéticos permitirá a los estudiantes evaluar la pertinencia e implicaciones de utilizar suposiciones particulares en la modelización de algún fenómeno.

El ambiente de instrucción. La resolución de problemas es una actividad que involucra "conceptualizar a la disciplina como un conjunto de dilemas o problemas que necesitan explorarse y resolverse en términos de recursos y estrategias matemáticas" (Santos-Trigo, 2007: 523). En este contexto, en las aproximaciones de resolución de problemas se considera que los estudiantes necesitan entender que el estudio de las matemáticas es una actividad en la cual tienen que participar para identificar y comunicar ideas ligadas con situaciones problemáticas, en las que constantemente tienen que formular preguntas que les permitan reconocer información relevante para dar significado a conceptos matemáticos (Moreno-Armella y Sriraman, 2005).

A continuación se presenta un conjunto de tareas que hemos utilizado en diversos talleres o cursos de formación docente y que han mostrado ser útiles para que los profesores de matemáticas de bachillerato y licenciatura desarrollen algunos elementos del pensamiento matemático y que reflexionen sobre su propio proceso de aprendizaje y la forma en que aprenden sus estudiantes.

Es importante resaltar que estas actividades necesitan adaptarse si es que se desea implementarlas para trabajar con los estudiantes. Esto se debe a que las condiciones de aprendizaje en el aula son diferentes de las dadas en un programa de formación docente.

Estas actividades tienen un doble objetivo: por un lado, que los profesores identifiquen los elementos que constituyen a una tarea de aprendizaje matemático (y de este modo caractericen algunos principios que pueden apoyarlos en el diseño de sus propias tareas de instrucción) y, por otro, que al abordar las tareas desarrollen una forma matemática de pensar que les permita "desempacar" ideas matemáticas, procedimientos y principios de la disciplina (Ball y Bass, 2003). Es decir, las tareas se enfocan en la "promoción o construcción de formas particulares de pensamiento, más que en la adquisición de conceptos o habilidades específicas" (Harel, 1997: 117). A través del desarrollo de cada una de las actividades se resalta la importancia del uso de las tecnologías digitales durante el proceso de formulación de conjeturas y de procedimientos para resolver problemas, así como la importancia de elaborar justificaciones deductivas de las conjeturas u observaciones.

4.1. División de áreas de polígonos convexos

El objetivo de esta actividad consiste en fortalecer el pensamiento geométrico de los profesores, entendiendo por éste a la capacidad para visualizar, describir y analizar, a través de técnicas inductivas y deductivas, una diversidad de formas y relaciones entre los atributos de configuraciones geométricas.

Dado un triángulo *ABC*, encontrar un punto *P* en su interior, de tal forma que el área de cada uno de los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* sea la misma (Figura 4.1).

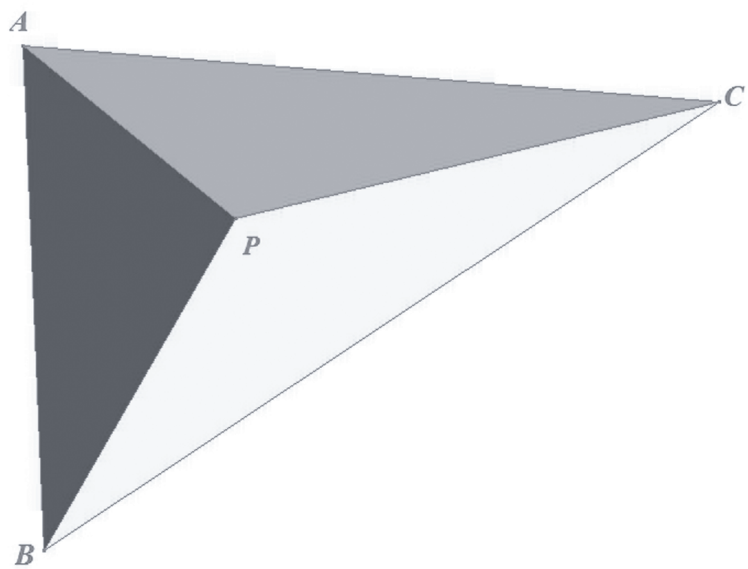


Figura 4.1. Entendimiento del problema.

Una estrategia para abordar el problema general consiste en considerar casos particulares que puedan ser más fáciles de resolver y que a la vez aporten elementos que permitan identificar estrategias generales. Por ejemplo, considerar un triángulo equilátero, un triángulo isósceles o un triángulo rectángulo.

Triángulo equilátero. Se puede conjeturar que el circuncentro del triángulo es el punto *P* que satisface los requerimientos del problema. Se puede obtener evidencia de esta conjetura al utilizar la herramienta para medir áreas del *software* y verificar que los tres triángulos (*ABP*, *BCP* y *CAP*) tienen la misma área (Figura 4.2).

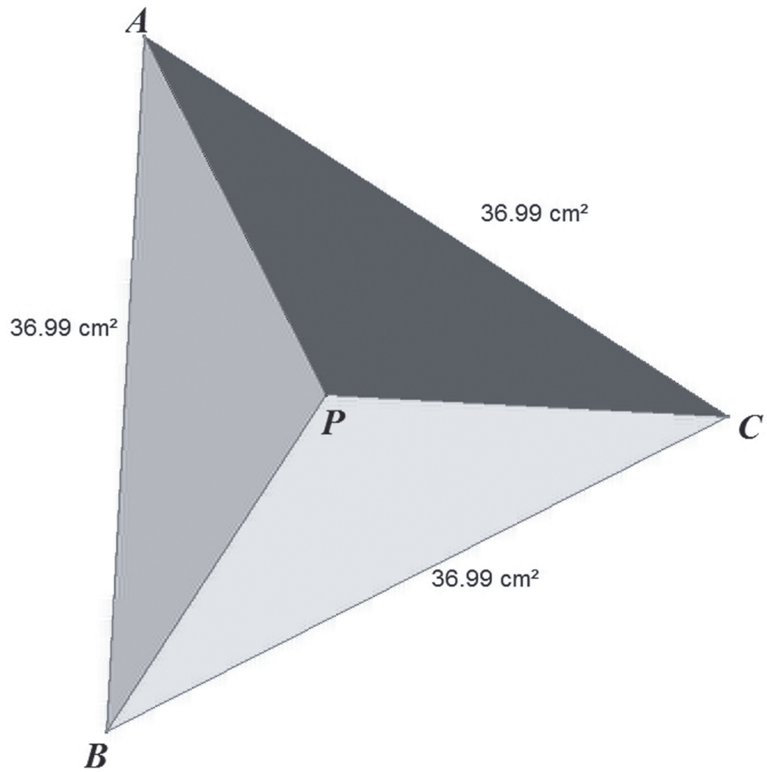


Figura 4.2. Explorando un triángulo equilátero.

En este caso se observa que el punto buscado se encuentra sobre una de las alturas del triángulo. ¿Puede ser de utilidad esta observación para abordar algún otro caso particular? Considérese ahora un triángulo isósceles *ABC*; se traza la altura que pasa por el vértice *A,* al que concurren los lados iguales, y sea *D* el pie de ésta.

Considérese ahora el triángulo *CBP*, con *P* un punto sobre el segmento *AD*. ¿Existe algún punto *P,* sobre *AD,* tal que el área del triángulo *CBP* sea igual a un tercio del área del triángulo *ABC*? Con el uso de un *software* dinámico se puede obtener evidencia de que ese punto existe (Figura 4.3). Además, se puede justificar la existencia de tal punto mediante un argumento de continuidad, pues cuando *P=D*, el área es cero, mientras que cuando *P=A*, las áreas coinciden. Esto, junto con el hecho de que los triángulos PCA y PBA son congruentes, da la respuesta.

Ahora hay que determinar la posición exacta del punto *P* de tal forma que satisfaga las condiciones que se requieren.

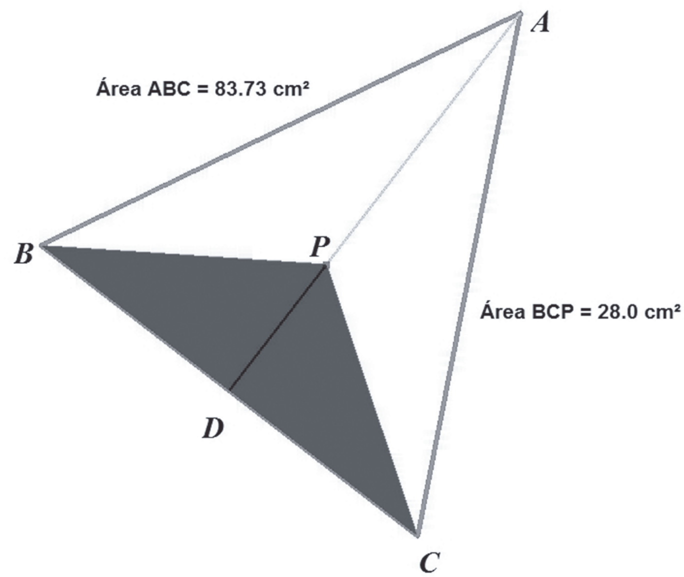


Figura 4.3. Caso particular de un triángulo isósceles.

El área del triángulo *ABC* (Figura 3) se puede calcular usando la fórmula, $\text{Área} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DA}}{2}$; asimismo, el área del triángulo *BCP* es $\text{Êrea} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DP}}{2}$. Por lo tanto, para que el área del triángulo *BCP* sea un tercio del área del triángulo *ABC* se requiere que la altura *DP* sea un tercio de la altura *CA*. Con el uso del *software* se puede obtener evidencia de que los tres triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* tienen la misma área (Figura 4.4).

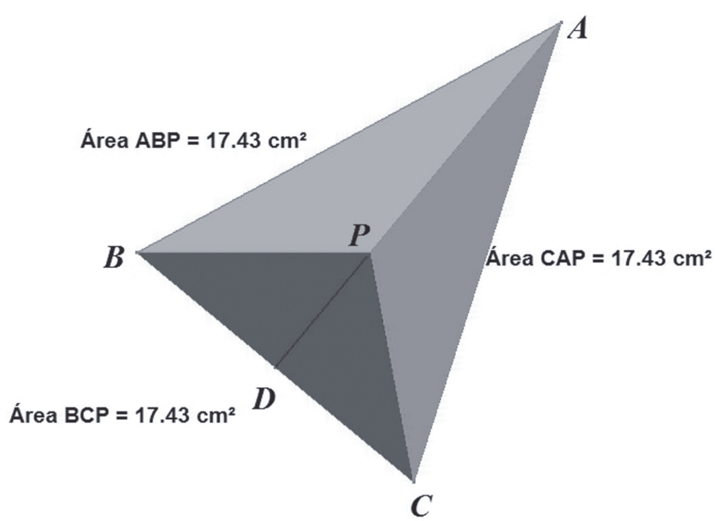


Figura 4.4. Evidencia numérica de la igualdad de áreas.

¿Es posible proporcionar una prueba formal de que el punto *P* satisface la condición requerida sobre los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* en cuanto a tener la misma área? Por construcción, el área del triángulo *BCP* es igual a un tercio del área del triángulo *ABC*. Además, la recta *AD* es eje de simetría del triángulo *ABC*, entonces los triángulos *ABD* y *ACD* son congruentes; asimismo, los triángulos *BDP* y *CPD* también lo son. También, cada uno de los triángulos *BDP* y *CPD* tiene área igual a un sexto del área del triángulo *ABC*. Por lo tanto los triángulos *ABP* y *CAP* tienen la misma área y es igual a $\frac{1}{2}A(ABC)-\frac{1}{6}A(ABC)$, la cual es un tercio del área del triángulo *ABC*.

¿Puede generalizarse el procedimiento empleado con un triángulo isósceles a cualquier tipo de triángulo? Considérese un triángulo rectángulo, y trácese la altura que pasa por el vértice en donde el ángulo es recto (ya que en otro caso las alturas son los catetos y el punto *P* sería un punto en la frontera del triángulo y no en su interior). Localícese un punto *P*' tal que la distancia *DP*' sea igual a un tercio de la distancia *DA*. Este punto satisface que el área del triángulo *BCP*' es un tercio del área del triángulo *ABC*. Con el uso del *software* dinámico se puede obtener evidencia de que *P*' no es solución del problema (Figura 4.5).

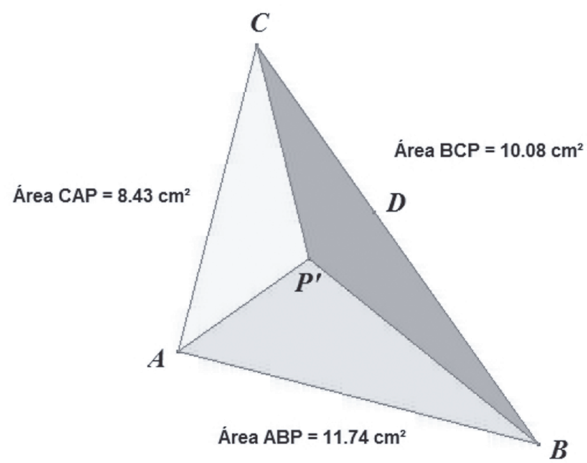


Figura 4.5. Uso del software para refutar una conjetura.

¿Es posible modificar el procedimiento anterior para encontrar un punto *P* que resuelva el problema? En la Figura 4.5, por construcción, se tiene que el área del triángulo *BCP’* es igual a un tercio del área del triángulo *ABC*. ¿Es posible variar la posición del punto P’ de tal forma que el área del triángulo *BCP*’ no cambie? Esto es posible siempre que el punto *P*’ se mueva sobre una recta paralela al lado *BC* del triángulo (Figura 4.6), por lo que de existir un punto que sea solución del problema, debe encontrarse sobre esta recta paralela a *BC*.

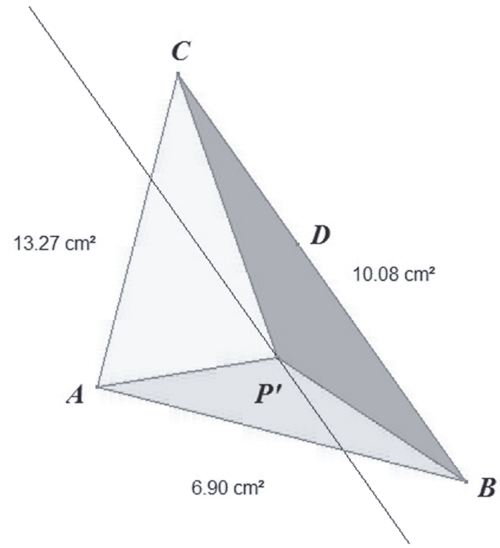


Figura 4.6. Trazo de triángulos de igual área.

El procedimiento empleado para construir el triángulo *BCP'* podría emplearse de forma análoga con algún otro de los lados del triángulo, es decir, trazar una recta paralela al lado *CA* de forma que la distancia entre este lado y la paralela sea igual a un tercio de la altura del triángulo *ABC* que pasa por el vértice *B*. El punto *P*, intersección de las paralelas a los lados *BC* y *CA* es solución al problema, ya que si cada uno de los triángulos *BCP* y *CAP*, por construcción, tiene área igual a un tercio del área del triángulo *ABC*, entonces necesariamente el triángulo *ABP* tendrá también área igual a un tercio del área del triángulo *ABC* (Figura 4.7). El lector puede comprobar que el mismo procedimiento funciona para cualquier tipo de triángulo.

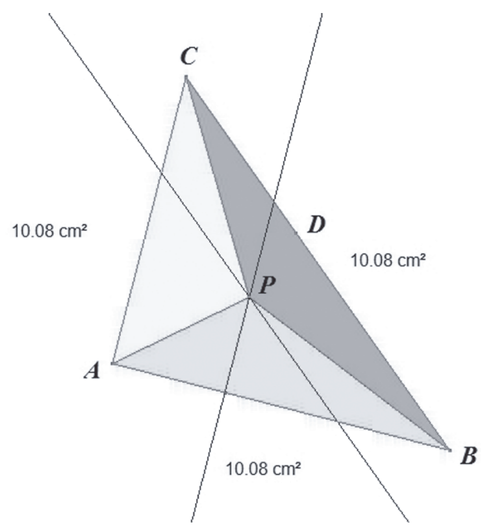


Figura 4.7. Justificando que el baricentro es solución del problema.

Otra forma de abordar el problema puede consistir en verificar si alguno de los puntos notables del triángulo (circuncentro, baricentro, ortocentro, incentro) satisface las condiciones de la solución del problema. Con el uso del *software* dinámico es posible trazar un triángulo cualquiera, encontrar los puntos notables y con el uso de las herramientas de medida del *software* obtener evidencia o refutar la conjetura en la que se establece que alguno de esos puntos es una solución del problema.

En el caso del ortocentro, al arrastrar los vértices del triángulo se puede notar que para algunos triángulos este punto queda fuera de éste, por lo que no es una opción válida para ser solución del problema general; lo mismo ocurre con el circuncentro. Veamos ahora que sucede con el incentro y el baricentro del triángulo.

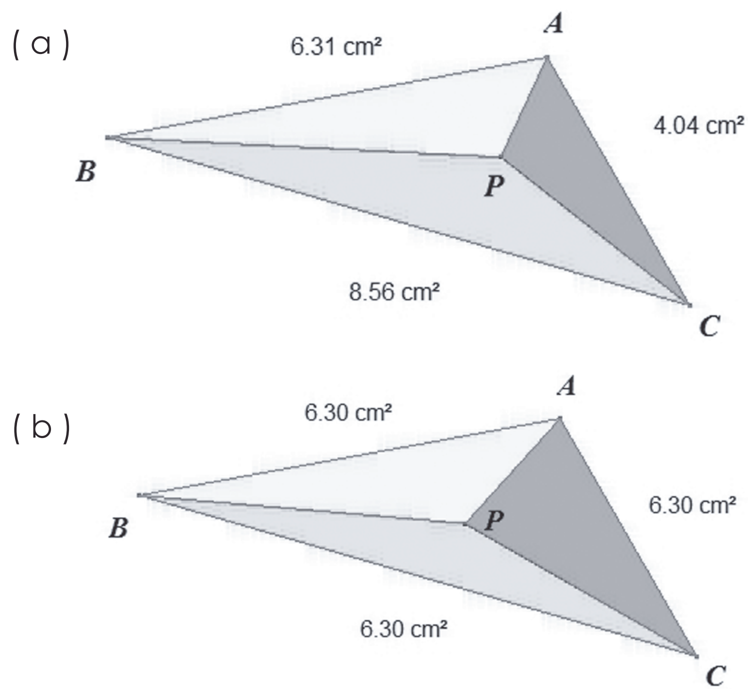


Figura 4.8. Área de los triángulos ABP, BCP y CAP, tales que P es: (a) el incentro del triángulo ABC y (b) el baricentro del triángulo ABC.

Por definición, el incentro es la intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo; las perpendiculares trazadas desde el incentro a cada uno de los lados son las alturas de los triángulos *APC*, *APB* y *BPC*; son todas iguales al radio de la circunferencia inscrita en el triángulo *ABC,* de ahí que tengan la misma área si y sólo si los lados son iguales, es decir, el único caso en que el punto *P*, igual al incentro, es solución, es cuando el triángulo es equilátero.

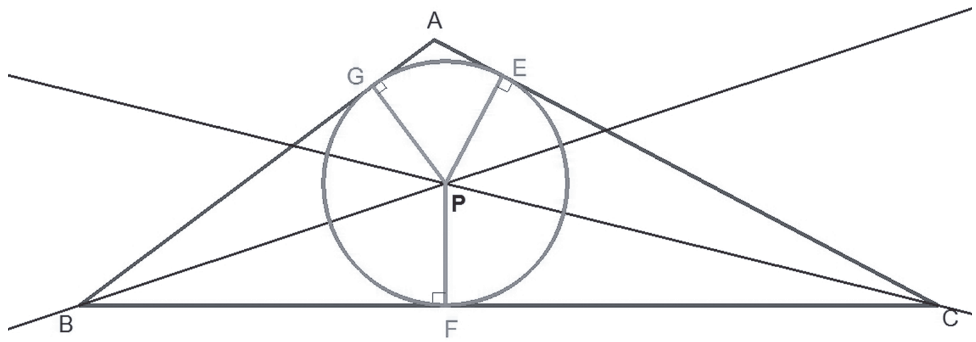


Figura 4.9. El incentro resuelve en el caso de triángulos equiláteros.

Con base en el uso de las herramientas de medida del *software* dinámico se puede conjeturar que el baricentro del triángulo *ABC* es solución del problema. Sin embargo, es necesario presentar una demostración de la conjetura.

Una prueba geométrica se puede construir al considerar que la distancia del baricentro a un vértice del triángulo es el doble de la distancia al punto medio del lado opuesto correspondiente. Se traza una paralela, por ejemplo, al lado *BC* por *P*. Con base en el Teorema de Tales, se justifica que la altura del triángulo *BCP* que pasa por el vértice P es igual a un tercio de la altura del triángulo *ABC* que pasa por el vértice A y de ahí se concluye que el área del triángulo *BCP* es igual a un tercio del área del triángulo *ABC* (Figura 4.10). Aplique un procedimiento análogo a los triángulos *ABP* y *CAP* para concluir que los triángulos *ABP*, *BCP* y *CAP* tienen la misma área.

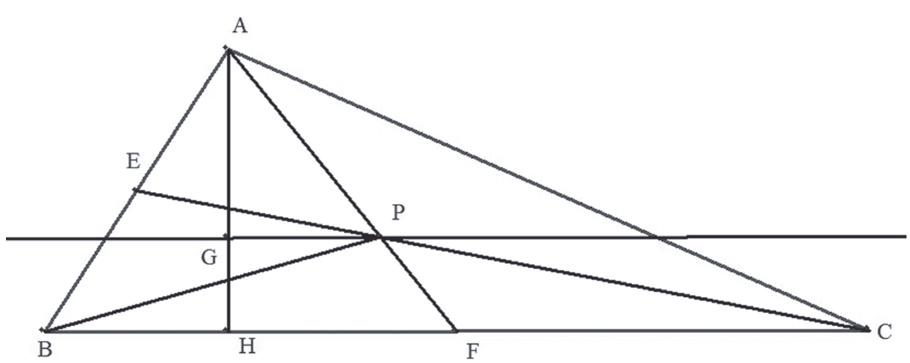


Figura 4.10. Aplicación del Teorema de Tales a los segmentos AH y AF.

Para elaborar una prueba algebraica del mismo resultado se puede utilizar el hecho de que una mediana del triángulo ABC divide a éste en dos triángulos de igual área. En la Figura 4.11, P es el baricentro del triángulo ABC y M1, M2 y

M3 son puntos medios de los lados AB, BC y CA, respectivamente, de ahí que el área del triángulo BCM1 sea igual a la del triángulo CAM1. Con esta notación, el triángulo ABC queda dividido en seis regiones cuyas áreas las denotamos por: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Con base en lo observado antes, se tiene $a_2 + a_3 + a_4 = a_5 + a_6 + a_1$. Al considerar las otras dos medianas, se pueden obtener ecuaciones análogas. Además, hay que notar que $a_1 = a_2$ ya que los triángulos a los que corresponden dichas áreas tienen bases y alturas de la misma longitud, por lo tanto sus áreas son iguales; lo mismo se deduce para a_3 y a_4 así como para a_5 y a_6. Al operar las ecuaciones anteriores, se puede concluir que $a_1 = a_2 = \cdots = a_6$.

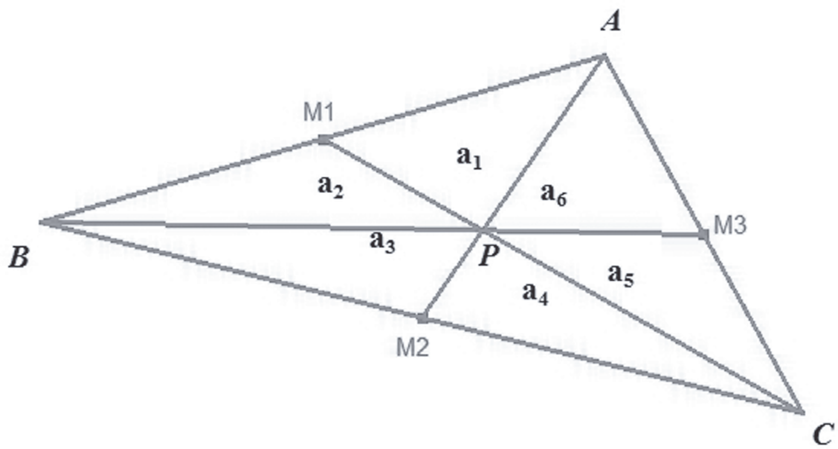


Figura 4.11. Las áreas $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ son iguales.

Un aspecto importante en el desarrollo del pensamiento matemático consiste en extender o generalizar un problema. En este caso, las siguientes preguntas tienen por finalidad estudiar el caso de un cuadrilátero. Dado un cuadrilátero ABCD, ¿existe un punto P en su interior tal que a partir de éste se formen los triángulos ABP, BCP, CDP y DAP, con la misma área? ¿Qué es el baricentro de un cuadrilátero ABCD? ¿Cómo se construye el baricentro de un cuadrilátero ABCD? ¿El baricentro del cuadrilátero ABCD es el punto que soluciona el problema, como en el caso del triángulo? Si el baricentro resuelve el problema del cuadrilátero ¿cuál es la razón? Si no lo resuelve, cabe preguntarse si el problema puede resolverse en general o sólo es posible encontrar una solución para cuadriláteros particulares.

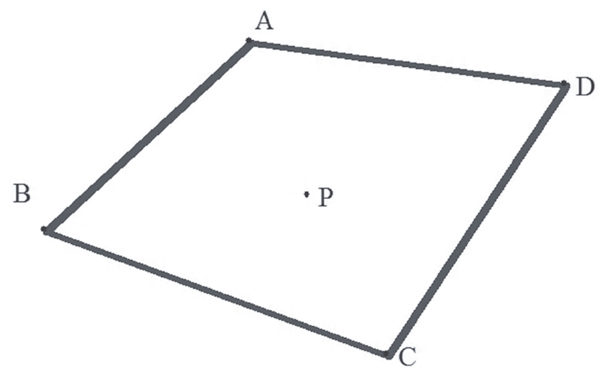


Figura 4.12. Buscando un punto P que divida al cuadrilátero en cuatro triángulos de igual área.

4.2. Criterios de divisibilidad

El objetivo fundamental de esta actividad consiste en aportar elementos que ayuden a los profesores a fortalecer sus conocimientos del sentido numérico, entendido éste como la habilidad para identificar propiedades de divisibilidad entre números enteros, usar propiedades de los números primos para resolver preguntas aritméticas, usar relaciones entre las operaciones en los enteros para resolver problemas, entender y usar la representación en base 10 de los enteros para contestar preguntas de tipo aritmético, estimar, dar sentido a los números y reconocer sus magnitudes relativas y absolutas —esto último de acuerdo con Sowder (1992; citado en NCTM, 2000: 31)—.

En el espíritu del estándar, *números y operaciones* (NCTM, 2000), los estudiantes de nivel medio superior deben desarrollar un entendimiento profundo de los números y sus operaciones, así como contrastar las propiedades de los números y los sistemas numéricos. En esta misma línea de ideas, Silverman (2006) argumenta: "Los años 1990 vieron una oleada con la reforma del cálculo, cuyo propósito es enseñar a los estudiantes a pensar por ellos mismos y a resolver problemas sustanciales, en lugar de solamente memorizar fórmulas y aplicar manipulaciones algebraicas... nuestro tema elegido, *Teoría de Números,* es particularmente apropiado para lograr esos propósitos" (*ibid*.: v).

Tomando como punto de partida los elementos mencionados, hemos elegido hacer una discusión de algunos criterios de divisibilidad con la finalidad de aportar elementos que ayuden a los profesores a construir una estructura conceptual robusta que les permita diseñar actividades de aprendizaje a través de las cuales los estudiantes puedan desarrollar un entendimiento profundo de los números y sus operaciones. Para iniciar la discusión, recordaremos algunos elementos aritméticos relacionados con términos y resultados que usaremos en lo que sigue.

Definición: un entero positivo *p* mayor que 1 se dice primo si sus únicos divisores son 1 y el mismo *p*.

Otro concepto de gran importancia en aritmética es el de máximo común divisor.

Definición: dados dos enteros *a* y *b*, se define un máximo común divisor de *a* y *b* como un entero *d* que satisface las siguientes dos condiciones:

1. *d* divide a *a* y *d* divide a *b,*
2. si otro entero *m* divide a *a* y a *b*, entonces *m* divide a *d*.

Teorema 1: si *a* y *b* son dos enteros con al menos uno de ellos no cero, entonces existe el máximo común divisor de *a* y *b,* y éste es expresable en la forma $d = an + bm$, para algunos enteros *m* y *n*.

Definición: dos enteros se dicen primos relativos si su máximo común divisor es 1.

Teorema 2: sean *a*, *b* y *c* enteros tales que *a* y *b* son primos relativos. Supongamos que *a* divide a *bc*, entonces *a* divide a *c*.

Para analizar problemas de conteo, uno de los principios de gran utilidad es el conocido principio de las casillas o de las pichoneras. Este principio se establece en la forma:

Principio de las pichoneras o de las casillas: si hay *n* objetos que se han de colocar en *m* casillas y *n>m,* entonces al menos dos objetos serán colocados en la misma casilla.

Una de las preguntas más importantes y a la vez de difícil respuesta en teoría de números es: dado un número entero $n \geq 2$, ¿se puede decidir si n es primo o compuesto? Por ejemplo, ¿es primo el número n = 101010101010101010101? Claramente n no es divisible entre dos, pues el dígito de las unidades es impar. ¿Cómo saber si n es divisible entre tres o en general entre algún otro primo menor que n?

Posiblemente se conoce el criterio de divisibilidad entre tres, el cual establece: *un número es divisible entre tres, si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre tres*. Usando este criterio se concluye de manera directa que n no es divisible entre 3.

Un elemento fundamental del pensamiento matemático consiste en proporcionar argumentos en la discusión de un problema; en esta línea de ideas surge la pregunta: "¿cuál es la justificación de este criterio de divisibilidad?" Si el número tiene solamente tres dígitos, digamos $n = abc$, se debe justificar la razón por la cual, si tres divide a $a + b + c$, entonces 3 divide a *n*. En base 10, la representación del número $n = abc$ significa que $n = abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$. Esta representación se puede escribir en la forma:

$$n = abc := a\cdot 10^2 + b\cdot 10 + c = a + 99a + b + 9b + c = (a+b+c) + 99a + 9b$$

Se tiene que $99a + 9b = 9(11a + b)$ y claramente este número es divisible entre 3; ahora, si $a+b+c$ es divisible entre 3, entonces $(a+b+c) + 99a + 9b$ también es divisible entre 3, probando con esto que si 3 divide a la suma de los dígitos de *n*, entonces 3 divide a *n*. Recíprocamente, si 3 divide a $n = abc$, entonces 3 divide a $n - 99a - 9b = a + b + c$, con lo cual queda justificado el criterio de divisibilidad por tres, para números de tres dígitos. Si el número *n* tiene *k* dígitos, digamos:

$$n = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0,$$

entonces *n* se puede representar en la forma:

$$n = (a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots a_1 + a_0) + a_{k-1}\left(10^{k-1} - 1\right) + a_{k-2}\left(10^{k-2} - 1\right) + \cdots + a_1(10-1).$$

Notemos que el factor de a_i es $10^i - 1$ y que este factor es divisible entre 3 para todo $i \geq 0$. Por ejemplo, para $i = 1, 2$, los correspondientes factores son 9 y 99, respectivamente, los cuales son divisibles entre 3 (de hecho, entre 9). La explicación de esto se tiene al factorizar a $10^i - 1$ en la forma $10^i - 1 = (10-1)\left(10^{i-1} + 10^{i-2} + \cdots + 1\right)$. Dado que 9 divide a cada factor $10^i - 1$, entonces 9 divide a $a_{k-1}\left(10^{k-1} - 1\right) + a_{k-2}\left(10^{k-2} - 1\right) + \cdots + a_1(10-1)$. Otra forma de justificar lo anterior es notar que los dígitos de $10^i - 1$ son todos iguales a 9, y esto claramente garantiza que es divisible entre 3. Recíprocamente, si 3 divide al número $(a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_1 + a_0)$, entonces 3 divide a la suma de éste con otro que sea divisible entre 3; como 3 divide a cada sumando de la forma $a_i\left(10^i - 1\right)$, entonces divide a

$$n = (a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots + a_1 + a_0) + a_{k-1}\left(10^{k-1} - 1\right) + a_{k-2}\left(10^{k-2} - 1\right) + \cdots + a_1(10-1).$$

Recíprocamente, si 3 divide a

$$n = (a_{k-1} + a_{k-2} + \cdots a_1 + a_0) + a_{k-1}\left(10^{k-1} - 1\right) + a_{k-2}\left(10^{k-2} - 1\right) + \cdots + a_1(10-1),$$

entonces divide a $n - a_{k-1}\left(10^{k-1} - 1\right) - a_{k-2}\left(10^{k-2} - 1\right) - \cdots - a_1(10-1) = a_{k-1} + \cdots + a_0$.

El criterio de divisibilidad entre 9 es similar al criterio de divisibilidad entre 3: *un número es divisible entre nueve, si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre nueve*. La prueba del resultado es análoga a la desarrollada para divisibilidad entre 3.

Ejercicio. Demuestre el criterio de divisibilidad entre 9.

La representación de un entero en base 10 ha sido de utilidad para justificar el criterio de divisibilidad entre 3; esta misma idea puede ayudar a contestar si *n*=1010101010101010101 es primo o compuesto. Haciendo uso de la representación en base 10, se tiene: . Por otro lado, el numerador de esta última fracción se puede factorizar en la forma $10^{22}-1=\left(10^{11}+1\right)\left(10^{11}-1\right)$; de esto concluimos que el cociente $\frac{10^{22}-1}{10^{2}-1}$ tiene al menos dos factores mayores que 1, por lo que 101010101010101010101 no es primo.

Usando la representación de un número en base 10 se puede intentar obtener otros criterios de divisibilidad. Una pequeña modificación en la discusión anterior proporciona un criterio para divisibilidad entre 11. Para esto notemos que si un entero se representa en la forma

$$n=a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0=a_{k-1}10^{k-1}+a_{k-2}10^{k-2}+\cdots+a_1 10+a_0$$

entonces se puede escribir como

$$\begin{aligned} n &= a_{k-1}10^{k-1}+a_{k-2}10^{k-2}+\cdots+a_1 10+a_0 \\ &= a_0-a_1+a_2+\cdots+\left(-1\right)^{k-1}a_{k-1}+11a_1+99a_2+\cdots \end{aligned}$$

#1: a^3+b^3

#2: $(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)$

#3: a^5+b^5

#4: $(a+b)\cdot(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4)$

#5: a^7+b^7

#6: $(a+b)\cdot(a^6-a^5\cdot b+a^4\cdot b^2-a^3\cdot b^3+a^2\cdot b^4-a\cdot b^5+b^6)$

#7: a^9+b^9

#8: $(a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)\cdot(a^6-a^3\cdot b^3+b^6)$

#9: $(a+b)\cdot(a^8-a^7\cdot b+a^6\cdot b^2-a^5\cdot b^3+a^4\cdot b^4-a^3\cdot b^5+a^2\cdot b^6-a\cdot b^7+b^8)$

#10: $a^{11}+b^{11}$

#11: $(a+b)\cdot(a^{10}-a^9\cdot b+a^8\cdot b^2-a^7\cdot b^3+a^6\cdot b^4-a^5\cdot b^5+a^4\cdot b^6-a^3\cdot b^7+a^2\cdot b^8-a\cdot b^9+b^{10})$

Figura 4.13. Uso de un CAS en la búsqueda de patrones.

Notemos que en la representación anterior, el segundo bloque de sumandos consiste de aquéllos de la forma $a_i\left(10^i\pm1\right)$; de manera más precisa, el signo + aparece exactamente cuando *i* es impar y parece que cada uno de ellos es divisible entre 11. ¿Cómo justificar esta observación? Notemos que el factor $\left(10^i\pm1\right)$ puede ser considerado como suma o diferencia de *k*-ésimas potencias. Dado que nos interesa saber si 11 divide a $\left(10^i\pm1\right)$, es de importancia saber cómo se factoriza $\left(a^k \pm b^k\right)$ y aplicar este conocimiento a la situación particular que nos ocupa. Procederemos al análisis dividiendo en casos: si *k* es impar y si *k* es par.

¿Cuál es el resultado de factorizar la expresión $a^k + b^k$ para *k* un entero positivo impar? Con el uso de un CAS (Computer Algebra System) se pueden considerar varios casos particulares y tratar de identificar algún patrón.

Con base en la información de la Figura 4.13, es posible conjeturar que para *k* impar, la expresión $a^k + b^k$ se puede factorizar como:

$$\left(a^k + b^k\right) = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + (-1)^{k-i}a^{k-i}b^{i-1} + \cdots + b^{k-1}),$$

Esta igualdad se puede verificar desarrollando el producto de la derecha.

De esto se tiene, haciendo y b = 1, que $10^k + 1 = 10^k + 1^k$ se puede factorizar como:

$$\left(10^k + 1\right) = (10+1)(10^{k-1} - 10^{k-2} + \cdots + (-1)^{k-i}10^{k-i} + \cdots + 1)$$

que claramente es divisible entre 11 para *k* impar.

Si *k* es par, podemos factorizarlo en la forma $k = 2^e m$, para algún entero $e \geq 1$ y m entero positivo impar. Mostraremos que $a+b$ divide a $a^k - b^k$, usando la representación de *k*

$$a^k - b^k = a^{2^e m} - b^{2^e m} = \left(a^{2^{e-1}m} + b^{2^{e-1}m}\right)\left(a^{2^{e-1}m} - b^{2^{e-1}m}\right)$$

Si e = 1, el factor de la izquierda se reduce a $a^m + b^m$; como *m* es impar, por lo demostrado antes, $a+b$ es uno de sus factores y de esto se tiene que $a+b$ es factor de $a^k - b^k$. Si $e > 1$, el proceso se repite en el factor $\left(a^{2^{e-1}m} - b^{2^{e-1}m}\right)$ hasta que el exponente de 2 sea uno y nuevamente se invoca el caso *m* impar. Haciendo a = 10 y b = 1 se concluye que 11 divide a $10^k - 1$ para *k* par.

De esta discusión hemos demostrado que 11 divide al segundo bloque de sumandos en

$$\begin{aligned} n &= a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &= a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1}a_{k-1} + 11a_1 + 99a_2 + \cdots \end{aligned}$$

Por lo que 11 divide a *n* si y sólo si 11 divide a $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1}a_{k-1}$.

Ejemplo. Decidir si 11 divide a *n* =1 358 016. Aplicando el criterio, calculamos 6-1+0-8+5-3+1 que es cero, concluyendo que 11 divide a 1 358 016.

El resultado que hemos probado proporciona más información; en caso de que 11 no divida a *n*, el residuo que deja la división es igual al residuo que se obtiene al dividir $a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + (-1)^{k-1}a_{k-1}$ entre 11.

Los criterios de divisibilidad entre 2 y 5 son de los más fáciles de aplicar, lo cual se debe a que, al representar un entero *n* en base 10, digamos

$$n = a_{k-1}a_{k-2}\ldots a_0 = a_{k-1}10^{k-1} + a_{k-2}10^{k-2} + \ldots + a_1 10 + a_0,$$

todos los sumandos, excepto el de las unidades, tienen de factor al 2 y al 5, por lo cual, *n* es divisible entre 2 o 5 si y sólo si el dígito de las unidades es divisible entre 2 o 5.

Tomando esta observación en cuenta, las hipótesis que siguen sobre un entero *m*, son naturales.

Teorema 3: sea *m*>1 un entero que no tiene de factores al 2 y al 5, entonces existe un entero positivo *k* mínimo, tal que *m* divide a $10^k - 1$.

Demostración: como *m* y 10 son primos relativos, entonces para todo *n* entero positivo, al dividir 10^n entre *m* deja residuo diferente de cero. Los posibles residuos de la división por *m* son $1, 2, \ldots, (m-1)$. Por el Principio de las Pichoneras existen *n* y *l* enteros positivos diferentes tales que al dividir 10^n y 10^l por *m* dejan el mismo residuo, es decir, $10^n = qm + r$ y $10^l = q_1 m + r$, para algunos enteros q y q_1. De estas ecuaciones se obtiene $10^n - qm = 10^l - q_1 m$. Como *n* y *l* son diferentes, entonces uno es mayor que el otro; supongamos por ejemplo que *n>l,* entonces de la ecuación anterior se llega a

$10^l(10^{n-l} - 1) = m(q - q_1)$. Como *m* y 10 son primos relativos, entonces el teorema 2 garantiza que *m* divide a $10^{n-l} - 1$. Tome el menor exponente de 10 que cumple la condición establecida.

Teorema 4: sean *m* y *k* como en el teorema 3. Pongamos $r = 10^k$ y representemos a un entero *N* en base *r*, es decir, sea $N = \sum_{i=0}^{l} a_i r^i$, $0 \le a_i < r$ para todo *i* desde 1 hasta *l*.

Entonces *m* divide a *N* si y sólo si *m* divide a $(a_l + a_{l-1} + \ldots + a_1 + a_0)$.

La demostración del Teorema 4 sigue las mismas líneas que la demostración del criterio de divisibilidad entre 9 y usa el hecho de que *m* divide a $10^k - 1$ y éste divide al número $r^i - 1$.

En lo que sigue presentamos otro criterio de divisibilidad que sigue líneas diferentes. Este criterio se justificó cuando un profesor mencionó conocer un procedimiento para establecer la divisibilidad entre 7, pero no sabía por qué funcionaba.

Por ejemplo, deseamos determinar si 8 642 046 es divisible entre 7; para responder usamos el proceso siguiente: la cifra de las unidades del número (en este caso el 6), se multiplica por dos y el resultado se resta del número que se obtiene del original "suprimiendo" las unidades (el resultado que se obtiene al suprimir 6 es 864 204). Traducido a símbolos se tiene 864 204 - 2(6)= 864 192. Ahora el mismo procedimiento se aplica al nuevo número (864 192). Este proceso se repite hasta obtener un número en el que sea "fácil" saber si es divisible o no entre 7 (ver Figura 4.14) y de esto se concluye la divisibilidad por 7 del número inicial. El último resultado que se ha obtenido es cero, el cual es divisible entre 7, por lo que 8 642 046 es divisible entre 7. Notemos que el proceso pudo haberse detenido cuando se obtuvo el 84, que es divisible entre 7.

```
  8   6   4   2   0   4 | 6
                 -(1  2)|
  8   6   4   1   9 | 2
                (-4)|
  8   6   4   1 | 5
          (-1  0)|
  8   6   3 | 1
         (-2)|
  8   6 | 1
    (-2)
  8 | 4
(-8)|
  0
```

Figura 4.14. Aplicación del criterio para divisibilidad entre 7.

La fundamentación de este criterio se aplica a cualquier primo diferente de 2 y 5. En la justificación será necesario el siguiente resultado.

Lema: sea *p* un primo diferente de 2 y 5, entonces existen enteros positivos *l* y *k* tales que $10l+1=kp$.

Demostración: aplicando el algoritmo de la división a *p* y 10 se tiene que existen enteros *q* y *r* tales que $p=10q+r$, con $0 \le r < 10$. Como *p* es primo, los posibles valores de *r* son 1, 3, 7 y 9. Si *r*=1, tomamos *l*=*q* y *k*=1; si *r*=3, entonces $p=10q+3$. Multiplicando esta ecuación por 7 y agrupando se tiene $7p=10(7q+2)+1$; tomamos $l=7q+2$ y *k*=7. Si *r*=7, entonces $p=10q+7$, multiplicando por 3 esta ecuación y agrupando se tiene $3p=10(3q+2)+1$. Tomamos $l=3q+2$ y *k*=3. Si *r*=9, entonces $p=10q+9$; multiplicando por 9 y agrupando se tiene $9p=10(9q+8)+1$. Tomamos $l=9q+8$ y *k*=9. Con esto se ha terminado la prueba del lema.

Dado que el valor de *l* es muy importante en la aplicación del criterio de divisibilidad, y depende de *p*, lo escribimos en la siguiente forma.

$$l_p=\begin{cases}\dfrac{p-1}{10} & \text{si } p\equiv 1 \bmod 10 \\ \dfrac{7p-1}{10} & \text{si } p\equiv 3 \bmod 10 \\ \dfrac{3p-1}{10} & \text{si } p\equiv 7 \bmod 10 \\ \dfrac{9p-1}{10} & \text{si } p\equiv 9 \bmod 10\end{cases} \quad (*)$$

Teorema 5: sea *n* un entero positivo representado en la forma $n = 10r_n + u_n$, con $0 \leq u_n < 10$ y *p* un primo diferente de 2 y 5. Entonces existe un *l* tal que: *a)* el primo *p* divide a $10l + 1$; *b)* *p* divide a *n* sí y solo sí *p* divide a $r_n - lu_n$.

Demostración: el inciso *a)* es justamente el lema anterior; para probar la parte *b*), declaramos $m = r_n - lu_n$, entonces despejando r_n y sustituyendo en la ecuación que expresa a *n*, obtenemos $n = 10(m + lu_n) + u_n = 10m + (10l + 1)u_n$. Por el inciso *a)* sabemos que *p* divide a $10l + 1$, entonces *p* divide a *n* si y sólo si *p* divide a 10m, como *p* y 10 son primos relativos, *p* divide a *n* si y sólo si *p* divide a $m = r_n - lu_n$.

Ejemplo: en la aplicación del criterio se debe determinar el valor de *l* de acuerdo con la ecuación (*). Por ejemplo, si p=13, el valor de l_{13} es: $l_{13} = \frac{7(13) - 1}{10} = \frac{90}{10} = 9$. Si p=13, entonces $l_{23} = \frac{7(23) - 1}{10} = \frac{161 - 1}{10} = 16$.

Decidir si 23 divide a 287 476 123: en primer término se calcula l_{23}, el cual es igual a 16 por lo mencionado en el párrafo previo. La cifra de las unidades del número, en este caso el 3, se multiplica por 16 y el resultado se resta del número que se obtiene del original "suprimiendo" las unidades (el resultado que se obtiene al suprimir 3 es 28 747 612). Traducido a símbolos se tiene 28 747 612-16(3)= 28 747 564. Ahora el mismo procedimiento se aplica al nuevo número (28 747 564). Este proceso se repite hasta obtener un número en el que sea "fácil" decidir si es divisible o no entre 23 (ver Figura 4.15). El último resultado que se ha obtenido es 172, el cual no es divisible entre 23. Por lo tanto, el número original tampoco es divisible entre 23.

2	8	7	4	7	6	1	2	3
						-(4	8)	
2	8	7	4	7	5	6	4	
					-(6	4)		
2	8	7	4	6	9	2		
				-(3	2)			
2	8	7	4	3	7			
		-(1	1	2)				
2	8	6	3	1				
		-(1	6)					
2	8	4	7					
-(1	1	2)						
1	7	2						

Figura 4.15. Aplicación del criterio para divisibilidad entre 23.

Decidir si 602 468 38 037 es divisible entre 11: en primer lugar calculamos $l_{11} = \frac{11 - 1}{10} = \frac{10}{10} = 1$. La cifra de las unidades del número, en este caso el 7, se multiplica por uno y el resultado se resta del número que se obtiene del original "suprimiendo" las unidades (el resultado que se obtiene al suprimir 7 es 6 024 683 803). Traducido a símbolos se tiene 6 024 683 803 - 1(7)= 6 024 683 796. Ahora el mismo procedimiento se aplica al nuevo número (6 024 683 796). Este proceso se repite hasta obtener un número en el que sea "fácil" saber si es divisible o no por 11 (ver Figura 4.16). El último resultado que se ha obtenido es 1, el cual no es divisible entre 11. Notemos que el proceso pudo haberse detenido cuando se obtuvo el número 54, que no es divisible entre 11.

6	0	2	4	6	8	3	8	0	3	7
									-7	
6	0	2	4	6	8	3	7	9	6	
								-6		
6	0	2	4	6	8	3	7	3		
							-3			
6	0	2	4	6	8	3	4			
						-4				
6	0	2	4	6	7	9				
					-9					
6	0	2	4	5	8					
				-8						
6	0	2	3	7						
			-7							
6	0	1	6							
		-6								
5	9	5								
	-5									
5	4									
-4										
1										

Figura 4.16. Aplicación del criterio de divisibilidad entre 11.

Los criterios para divisibilidad entre 9 y 11 son muy fáciles de recordar y de aplicar: además, tienen algunas propiedades interesantes. Por ejemplo, al aplicar el criterio de divisibilidad entre 9 a un número *n*, y posteriormente a la suma de sus dígitos hasta obtener una cifra, esta última es igual al residuo que resulta de dividir *n* entre 9. Por ejemplo, aplicando el criterio de divisibilidad entre 9 al número 47 893 425, la suma de sus dígitos es 42, al sumar 4+2 obtenemos el número 6 que es el residuo de la división $\frac{47893425}{9}$.

Otro ejemplo, la suma de los dígitos del número 5 673 412 856 es 47, al sumar 4+7 obtenemos el número 11, y nuevamente al sumar 1+1 obtenemos el número 2, que es el residuo que resulta del cociente $\frac{5673412856}{9}$.

Algo similar ocurre al aplicar el criterio de divisibilidad entre 11. Por ejemplo, considérese el número 3 475 468 923. Al sumar los dígitos, iniciando por las unidades con signos alternados se tiene como resultado $3-2+9-8+6-4+5-7+4-3=3$, el cual es el residuo de la división $\frac{3475468923}{11}$.

4.3. Cuadratura de la parábola

La actividad se inicia con la construcción de una configuración dinámica simple (empleando el *software* Cabri-Geometry) formada por segmentos, rectas y puntos. Se estudian entonces las propiedades de los objetos que se obtienen al mover o trazar algunos elementos en la configuración. Por ejemplo, se traza una recta l y un punto F fuera de ella. Sobre la recta l se elige un punto M y se traza una perpendicular a l por este punto, llamando l_1 a esta recta; se traza la mediatriz del segmento MF que intersecta a la recta l_1 en el punto Q (Figura 4.17).

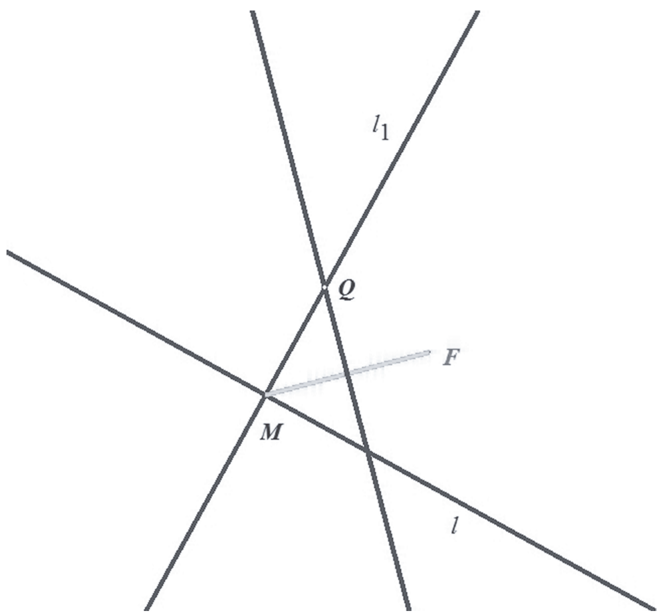


Figura 4.17. Construcción de una configuración simple.

¿Cuál es el lugar geométrico que describe el punto Q al mover el punto M sobre la recta l? En la búsqueda de respuesta a esta pregunta, un estudiante se puede cuestionar acerca de lo que significa trazar la mediatriz de un segmento. Es decir, ¿qué propiedades genera la construcción de una mediatriz en términos de responder, por ejemplo, cómo son las distancias de Q a l y de Q a F? Y seguir o imaginarse la huella que deja Q cuando se mueve el punto M sobre la recta l.

Cuando se formulan problemas o preguntas en el contexto puramente matemático, uno de los aspectos fundamentales al responder las preguntas es la presentación de un argumento, basado o sustentado en los principios de la disciplina, con la finalidad de obtener resultados consistentes y una comprensión más amplia del problema. Por ejemplo, en el planteamiento anterior, el lugar geométrico que describe el punto Q en la configuración es una parábola (Figura 4.18). Una posible forma de justificar este resultado es observar que el punto Q se encuentra en la mediatriz del segmento *MF* y ésta tiene la propiedad de que cualquiera de sus puntos equidista de los extremos del segmento; también se tiene que *QM* es la distancia del punto *Q* a la recta *l*, entonces la distancia de *Q* a *l* y de *Q* a *F* son iguales; por lo tanto, el lugar geométrico que describe *Q* al mover *M* sobre *l* es una parábola.

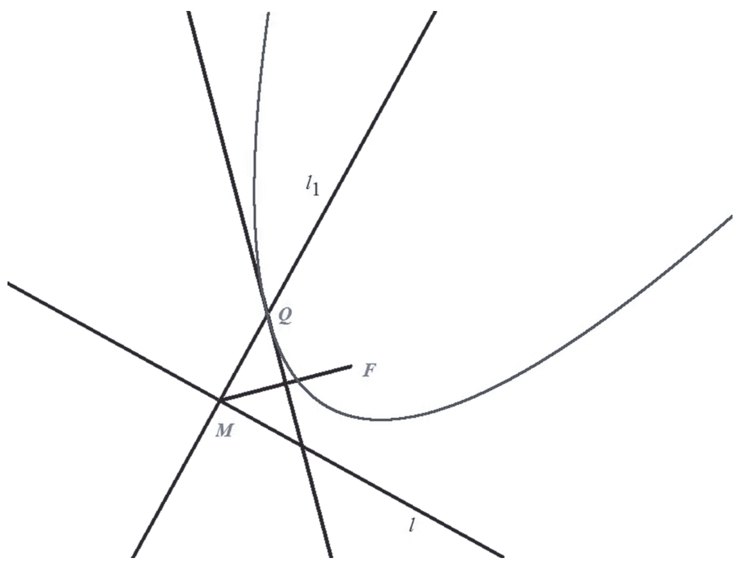


Figura 4.18. Lugar geométrico que describe Q cuando M se mueve sobre l.

Dado un objeto matemático o un conjunto de entidades matemáticas, en el proceso de formular preguntas relacionadas con el comportamiento de esas entidades, puede requerirse de nuevos objetos, con la finalidad de identificar propiedades y relaciones matemáticas. Por ejemplo, a partir de la construcción de una parábola se pueden formular preguntas con la intención de explorar algunas relaciones o propiedades. En la parábola (Figura 4.19) se pueden considerar dos puntos *R* y *S* sobre ella y formular algunas preguntas iniciales:

1. ¿Dónde situar un tercer punto *P* sobre el arco parabólico, determinado por la cuerda *RS*, de tal forma que el triángulo *RPS* tenga área máxima?

2. ¿Qué relación hay entre el área de este triángulo y la del sector parabólico determinado por la cuerda *RS*?

3. Si *P* es el punto que maximiza el área del triángulo *RPS,* ¿cuál es la ecuación de la recta tangente al segmento parabólico en *P*?

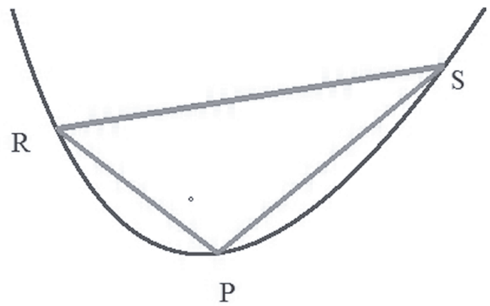


Figura 4.19. Búsqueda de relaciones al mover el punto P sobre el arco parabólico.

Conviene que los estudiantes expliquen en forma verbal y escrita, usando lenguaje común, la información que aparece en el enunciado del problema. En esta fase, unas preguntas que pueden ayudar son: ¿cuáles son los datos y cuáles son las incógnitas del problema?, ¿qué significa que un triángulo tenga sus tres vértices sobre una parábola?, ¿cómo varía el área del triángulo al mover el punto *P* sobre el arco parabólico?, ¿qué significa que un triángulo alcance área máxima?, ¿qué es el área de un sector parabólico?, ¿qué propiedades posee una recta tangente a una curva en un punto dado?

Para contestar las preguntas, se considera la parábola que se muestra en la Figura 4.19, se ubican los dos puntos dados *R*, *S* y se sitúa un tercer punto *P* sobre el arco parabólico, de forma que se tenga el triángulo *RPS*. Con esta construcción se inicia el proceso de búsqueda de respuestas. Al mover el punto *P* se observa que todos los elementos del triángulo, excepto el lado fijo, varían (medida de lados, medida de cada ángulo interior, área, perímetro). Aquí surgen otras preguntas que conviene explorar: ¿qué pasa con el área del triángulo *RPS* cuando *P* "se acerca" a *R* o a *S*? En qué posición del punto *P*: *a)* ¿el triángulo *RPS* es isósceles?, *b)* ¿el triángulo *RPS* es rectángulo?, *c)* ¿el triángulo *RPS* tiene perímetro máximo?

Existen diferentes maneras de organizar y analizar los datos o información relevante que se incluyen en un problema; por ejemplo, se puede hacer uso de tablas, gráficas y expresiones algebraicas. El uso de una tabla puede ayudar a identificar una posible respuesta a la primera pregunta mediante un análisis cuantitativo, ya que al ordenar los datos se puede determinar si existe una posición del punto *P* en la que el área del triángulo *RPS* sea máxima. Con el uso del *software* se puede calcular el área del triángulo *RPS* y observar la forma en que ésta varía al "mover" el punto *P* sobre el arco parabólico. Para analizar el comportamiento numérico del área del triángulo *RPS* se construye una tabla que relaciona el área con la longitud del lado *RP* del triángulo (Figura 4.20).

	RP =	Área RPS=
1	0,52	2,16
2	0,99	4,08
3	1,33	5,47
4	1,75	7,09
5	2,21	8,83
6	2,49	9,85
7	2,82	10,96
8	3,19	12,11
9	3,62	13,24
10	4,01	14,03
11	4,24	14,34
12	4,67	14,51
13	4,86	14,40
14	5,09	14,11
15	5,34	13,60
16	5,67	12,72
17	5,98	11,65
18	6,15	11,04
19	6,31	10,42
20	6,51	9,59
21	6,80	8,40
22	7,02	7,49
23	7,30	6,29
24	7,68	4,66
25	8,36	1,72

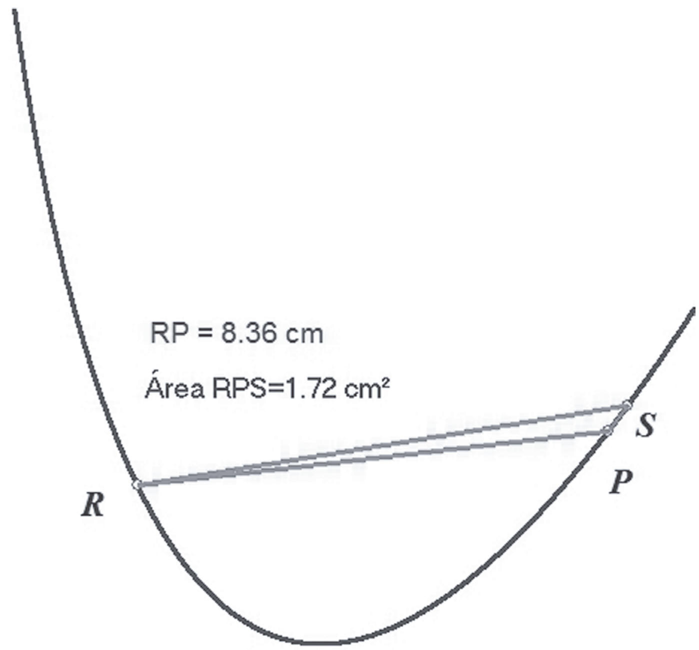


Figura 4.20. Representación numérica de la variación del área del triángulo RPS.

Los valores registrados en la tabla muestran que hay una posición de *P* para la cual el área del triángulo *RPS* es mayor que todas las restantes; en este caso, cuando el lado *RP* mide 4.67 el valor del área es 14.51. Se observa que aunque en la tabla solamente se incluye una cantidad finita de puntos, éstos proporcionan información que permite observar el crecimiento o decrecimiento del área y, a partir de esto, conjeturar que existe una posición de *P* sobre el arco parabólico en la cual el área del triángulo *RPS* alcanza un valor máximo.

La representación de la información puede ayudar a obtener una idea global del problema. Con la ayuda del *software* también se puede representar la variación del área en un sistema coordenado. ¿Cuáles posibles variables se pueden elegir para determinar la función área? ¿Cómo se identifica gráficamente la solución del problema y cuál es su relación con los datos de la tabla?

Para representar el área en un sistema coordenado un primer paso es elegir una variable. En este caso se traza una perpendicular a *RS* por *P*, y se llama *Q* al punto de intersección de esa perpendicular y el segmento *RS*. Así, en el sistema coordenado se sitúan la medida *RQ* en el eje horizontal y el valor del área en el eje vertical. Para obtener la gráfica se utilizará el comando “lugar geométrico” del punto de intersección *V* de la recta perpendicular al eje horizontal por el punto que representa a la longitud *RQ*, y la perpendicular al eje vertical por el punto que representa la medida del área. En la representación gráfica se observa aproximadamente la posición de *P* sobre la parábola que maximiza el área del triángulo (Figura 4.21).

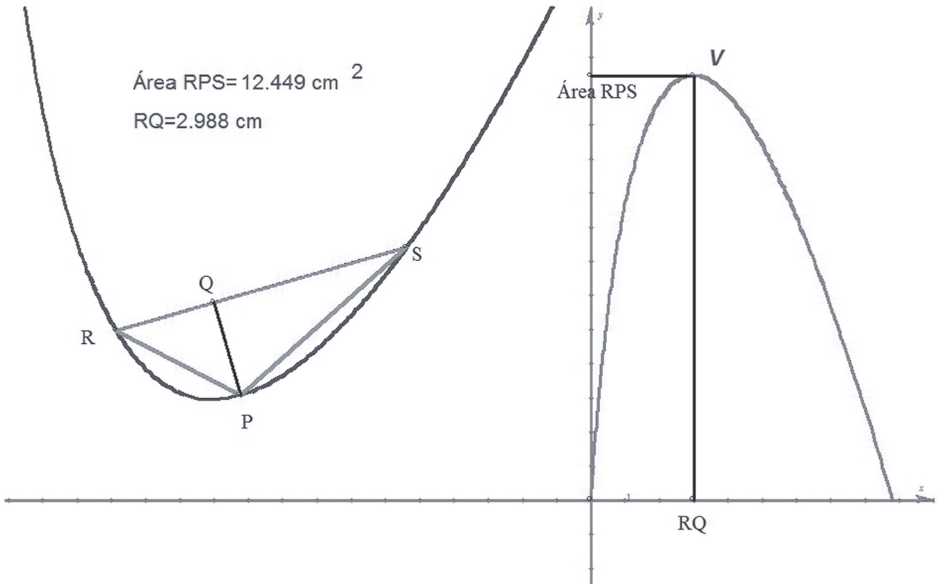
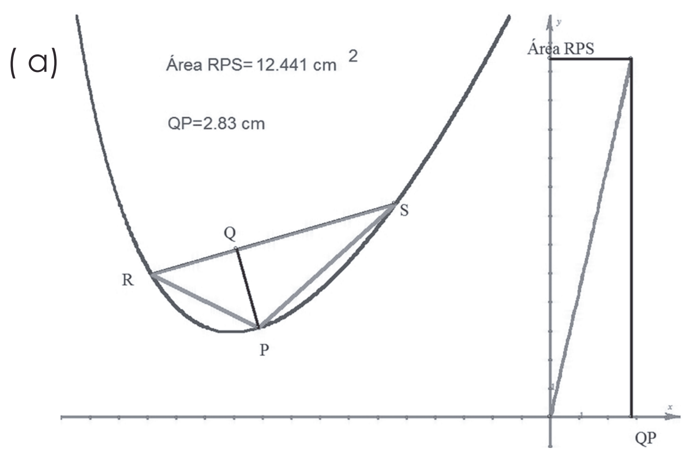


Figura 4.21. Gráfica del área del triángulo RPS como función de la distancia RQ.

Sin embargo, la elección de la variable no es única; por ejemplo, se pudo elegir la distancia *QP*, o la distancia *RP*. En este caso, las gráficas del área como función de cada una de esas distancias se muestran en la figura 4.22. En este proceso, el estudiante tiene la oportunidad de identificar diversas relaciones entre cantidades variables que le permitirán estructurar una red conceptual en torno al concepto de función.



(b)

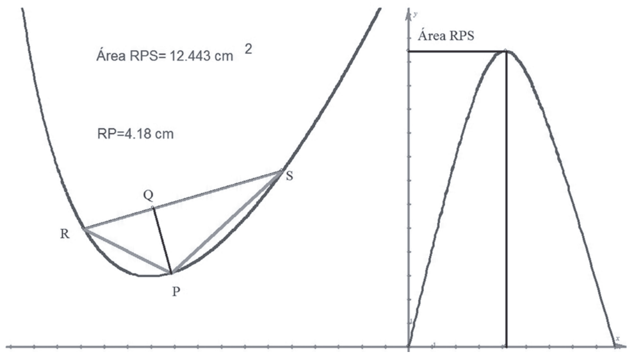


Figura 4.22. Gráficas del área del triángulo RPS como función de: (a) la distancia QP y (b) la distancia RP.

¿Es posible justificar que al elegir como variable a la distancia *QP*, la gráfica de la función área es un segmento de recta? ¿Por qué al elegir otras variables, como la distancia *RP* o la distancia *RQ*, la gráfica del área no es una recta? ¿Cómo se relaciona la variación de las variables en cada uno de los casos y su representación gráfica?

Para contestar a la primera pregunta hay que notar que el segmento *QP* es la altura del triángulo *RPS*. Como el área de un triángulo es un medio de la base por la altura y como la base *RS* es un segmento fijo, entonces el área es una función lineal de la altura.

En el caso en que se eligió como variable a la distancia *RQ* se observa que los valores de ésta van desde cero hasta la longitud del segmento *RS*; además, el valor del área varía iniciando y terminando en cero (en los tres casos, el valor máximo es aproximadamente el mismo).

Con los resultados del análisis de la etapa anterior se puede conjeturar que el problema tiene solución; sin embargo, es necesario dar una argumentación formal de la existencia del triángulo con área máxima.

La consideración de casos particulares es un elemento importante del pensamiento matemático, pues a partir de éstos se pueden formular conjeturas y obtener resultados generales. Por ejemplo, ¿qué ocurre cuando el segmento *RS* es perpendicular al eje focal (Figura 4.23)? Dado que *R* y *S* son fijos, el triángulo de máxima área es aquél que tiene altura máxima, ocurriendo esto cuando el punto *P* coincide con el vértice de la parábola. También se tiene que la tangente en *P* a la parábola es paralela a la cuerda *RS*. La segunda pregunta, ¿qué relación hay entre el área de este triángulo y la del sector parabólico determinado por la cuerda *RS*?, no se puede contestar de manera directa, aún en este caso particular.

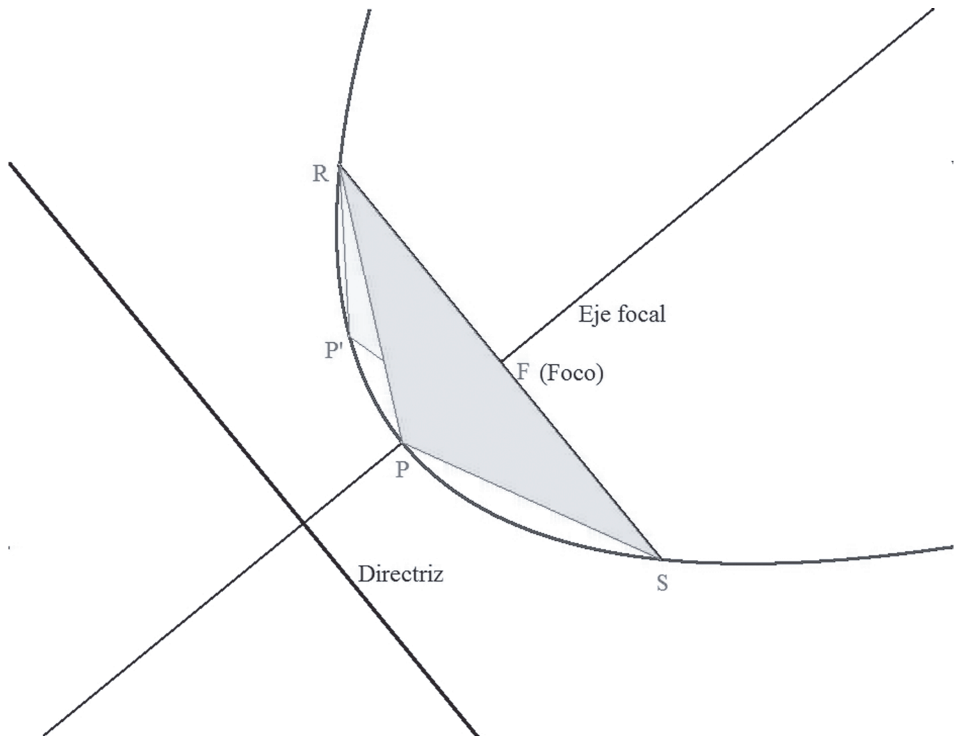


Figura 4.23. Solución de un caso particular.

Un elemento importante en el proceso de resolución de problemas es la justificación y generalización de los resultados que se pueden obtener mediante alguna representación o al resolver casos particulares. En este sentido, una representación algebraica del problema o situación es de gran ayuda para describir y entender las relaciones entre las variables del problema. ¿Cómo representar algebraicamente los resultados obtenidos? El uso de un sistema cartesiano resulta importante en la construcción de una representación simbólica del problema. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la parábola tiene vértice en el origen y su eje de simetría es el eje vertical (Figura 4.24).

¿Cómo determinar el punto sobre el arco parabólico que se encuentra a mayor distancia de la base *RS*? Se puede suponer que la ecuación de la parábola es del tipo $y = kx^2$ ($k > 0$) y que los puntos *R* y *S* tienen coordenadas $R(r, kr^2)$ y $S(s, ks^2)$. Al tomar un tercer punto *T* en la parábola, podemos suponer que sus coordenadas son $T(t, kt^2)$ y que las primeras coordenadas de los puntos *R*, *S* y *T* satisfacen $r < t < s$ (Figura 4.24). Con el empleo del *software* se puede medir la distancia *d* de la recta *RS* al punto *T* y graficarla como función de *t* e incluso obtener la ecuación de la gráfica (Figura 4.25).

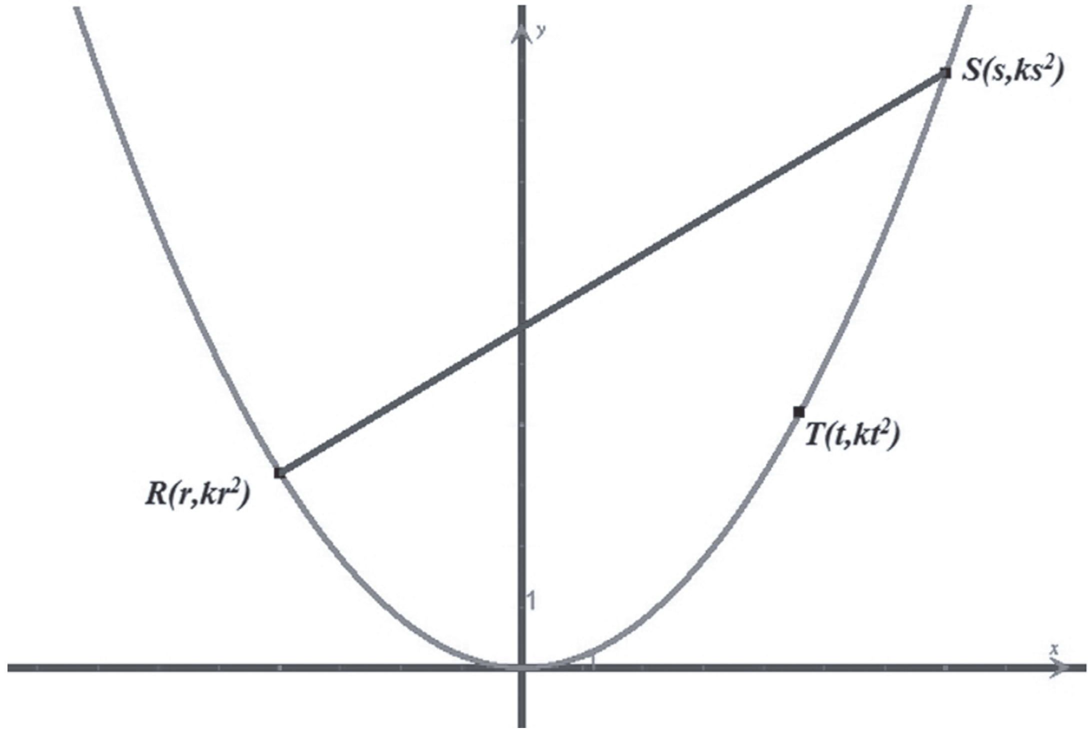


Figura 4.24. Representación de una parábola en un sistema coordenado.

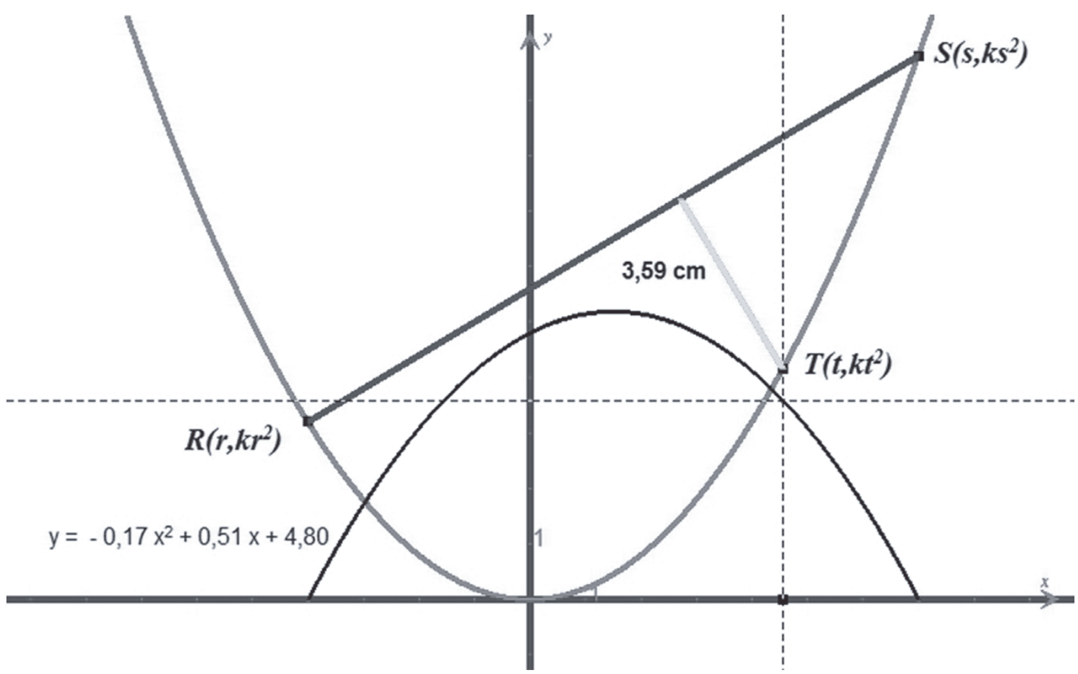


Figura 4.25. Representación gráfica de la distancia d.

Se observa que la gráfica de la función *d* corresponde a una parábola que intersecta al eje horizontal en los puntos de coordenadas $(r,0)$ y $(s,0)$. Esto significa que, en este caso, el punto *T* coincide con *R* y *S* respectivamente, por lo que la distancia de *T* al segmento *RS* es cero. También, con apoyo de la gráfica de *d*, se puede conjeturar, de forma visual, que la primera coordenada del punto sobre el arco parabólico que se encuentra a mayor distancia del segmento *RS* es $\frac{r+s}{2}$. ¿Es posible justificar que *d* es una función cuadrática de la variable *t* y que la primera coordenada del punto en donde se maximiza el área es $\frac{r+s}{2}$?

La distancia *d* de una recta con ecuación $Ax+By+C=0$ a un punto $E(x_1,y_1)$ puede calcularse mediante la fórmula: $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Por otra parte, la ecuación de la recta que pasa por *R* y *S* está dada por: $y=k(r+s)x-krs$, que en la forma general equivale a $k(r+s)x-y-krs=0$. Entonces, aplicando la fórmula anterior a este caso, la distancia del punto *T* a la recta *RS* puede expresarse mediante la ecuación: $d=\frac{|k(r+s)t-kt^2-krs|}{\sqrt{k^2(r+s)^2+1}}$. Factorizando *k* y usando la propiedad multiplicativa del valor absoluto y que *k* >0 se tiene: $d=\frac{k|(r+s)t-t^2-rs|}{\sqrt{k^2(r+s)^2+1}}$. Nótese que la expresión dentro del valor absoluto es $(s+r)t-t^2-rs=(s-t)(t-r)$ y la condición del orden de las coordenadas *s*, *t* y *r* garantiza que cada factor de la derecha en esta última ecuación es no negativo, por lo que su producto también es no negativo, de lo cual se concluye que su valor absoluto satisface: $|(s+r)t-t^2-rs|=(s+r)t-t^2-rs=(s-t)(t-r)=-(t-s)(t-r)$, y de esto se tiene que *d* se representa en la forma:

$$d=-\frac{k}{\sqrt{k^2(r+s)^2+1}}(t-s)(t-r)$$

Como *k*, *r* y *s* son fijos, de esta ecuación se concluye que *d* es una función cuadrática de *t*, cuya gráfica intersecta al eje horizontal en los puntos $(r,0)$ y $(s,0)$. También se observa que el coeficiente de $(t-s)(t-r)$, en la ecuación que define a *d* es negativo, debido a que hemos supuesto que *k* es positivo. De esto se concluye que *d* alcanza un máximo, pues su gráfica es una parábola vertical que abre hacia abajo. Esto, junto con un argumento de simetría de la parábola y el hecho que la intersección de la gráfica de *d* con el eje horizontal son los puntos $(r,0)$ y $(s,0)$, muestra que el máximo de la función *d* se alcanza en $t=\frac{r+s}{2}$.

De los cálculos anteriores se concluye que el punto *P* sobre la parábola que se encuentra a la mayor distancia del segmento *RS* tiene coordenadas $\left(\frac{r+s}{2}, k\frac{(r+s)^2}{4}\right)$.

Una variante para maximizar la distancia. Otro acercamiento que puede utilizarse para encontrar el punto *P* consiste en obtener la ecuación de la recta *RS*, la ecuación de la perpendicular a *RS* que pasa por *T*, encontrar el punto de intersección *U* de la perpendicular y *RS*. Posteriormente, calcular la distancia de *T* a *U* usando la fórmula para calcular la distancia entre *U* y *T* y maximizar esta distancia.

Para obtener el área del triángulo *TSR* como función de *t*, se usará la fórmula que proporciona el área de un triángulo con vértices en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), mediante las coordenadas de éstos, es decir, el área es el valor absoluto de:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Entonces el área del triángulo *TSR* es el valor absoluto de:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} r & kr^2 & 1 \\ s & ks^2 & 1 \\ t & kt^2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-k(s-r)(t-r)(s-t)}{2}.$$

Por las hipótesis $0 < k$ y $r < t < s$, al tomar el valor absoluto del determinante se tiene que el área del triángulo *TSR* es: $A = \frac{k(s-r)(t-r)(s-t)}{2} = -\frac{k(s-r)}{2}(t-r)(t-s)$.

Nótese la similitud que hay entre la función *A* y la función *d* en la discusión anterior. Argumentando como en ese caso, se tiene que *A* alcanza un máximo en $t = \frac{r+s}{2}$. Entonces el punto en el que se maximiza la altura del triángulo también es aquél en el que se maximiza su área, como era de esperarse.

¿Qué relación hay entre el área de este triángulo y la del sector parabólico determinado por la cuerda *RS*? Se calcula el área del sector parabólico haciendo uso de resultados de cálculo integral y se compara con la del triángulo de área máxima.

De la discusión anterior se tiene que el área del triángulo *RPS* es máxima cuando $t = \frac{r+s}{2}$. Sustituyendo este valor de *t* en la expresión $A = \frac{k(s-r)(t-r)(s-t)}{2}$, se obtiene que el área del triángulo *RPS* es:

$$A = \frac{k(s-r)\left(\left(\frac{r+s}{2}\right)-r\right)\left(s-\left(\frac{r+s}{2}\right)\right)}{2} = \frac{k(s-r)^3}{8}$$

El área del segmento parabólico se puede calcular como la diferencia entre el área bajo el segmento *RS* y el área bajo la parábola (Figura 4.26). El área bajo el segmento *RS* se puede calcular tomando en cuenta que esta región es un trapecio, por lo que su área se calcula multiplicando el promedio de las alturas por la base, es decir, el área es: $\frac{(ks^2 + kr^2)(s-r)}{2}$. Otra forma de calcular esta área es considerando que dicha región está formada por el rectángulo *RR'S'V* y el triángulo *RVS* (Figura 4.27). Con esta representación de la región, su área es $(s-r)(kr^2) + \frac{(s-r)(ks^2 - kr^2)}{2} = \frac{k(s-r)(s^2 + r^2)}{2}$, la cual coincide con la expresión anterior, como era de esperarse.

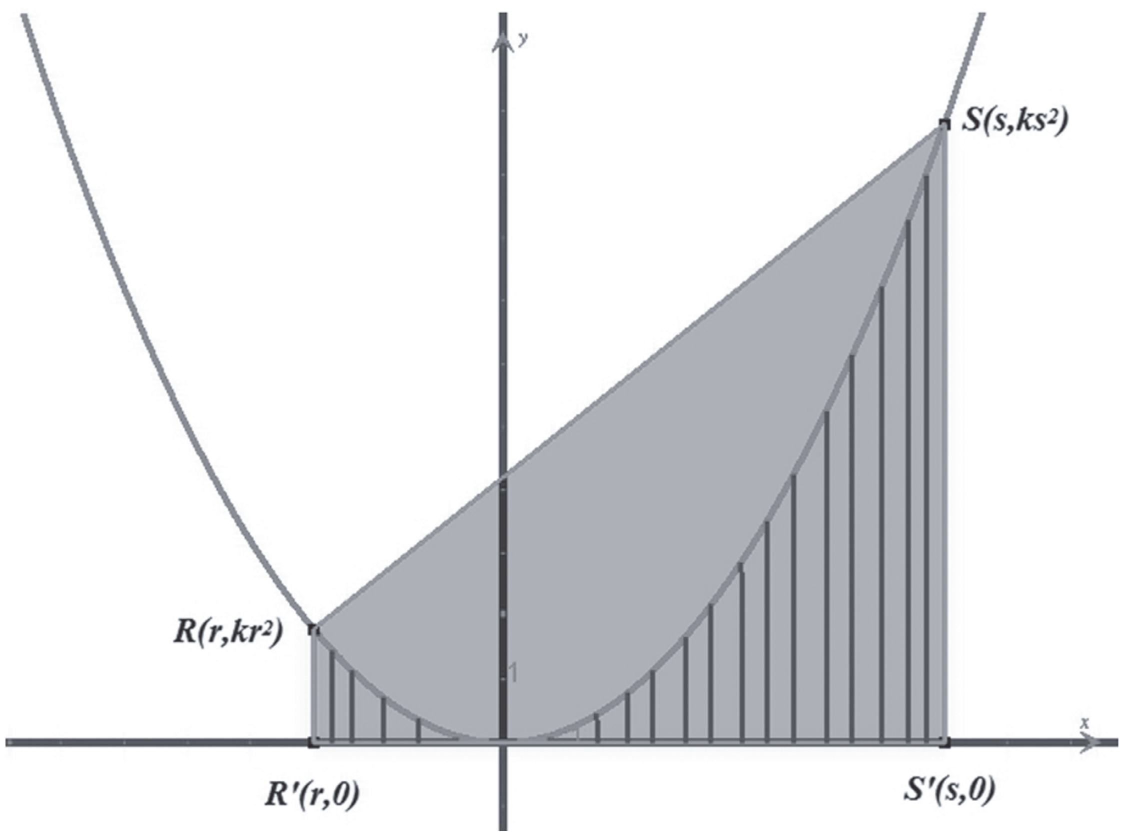


Figura 4.26. Área del sector parabólico.

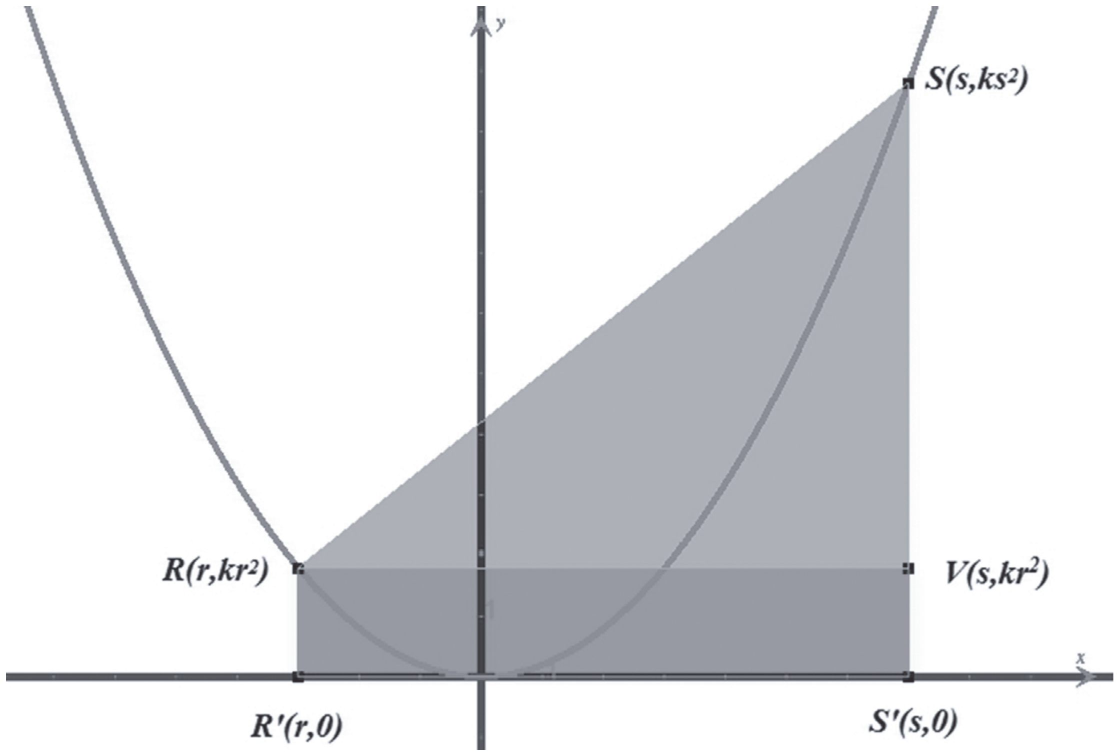


Figura 4.27. Área del trapecio RR'S'S.

Por otra parte, el área bajo la parábola en el intervalo $[r,s]$ es: $\int_r^s kx^2dx = \frac{k(s^3-r^3)}{3}$. También se tiene que el área del segmento parabólico es la diferencia del área del trapecio y el área de la región bajo la parábola, es decir, esta área está dada por: $\frac{k(s-r)(s^2+r^2)}{2} - \frac{k(s^3-r^3)}{3} = \frac{k(s-r)^3}{6}$. Resumiendo, el área del sector parabólico es: $\frac{k(s-r)^3}{6}$ y el área del triángulo de máxima altura es $\frac{k(s-r)^3}{8}$. De estas expresiones se nota una clara relación, es decir, se tiene $\frac{k(s-r)^3}{6} = \frac{4}{3}\frac{k(s-r)^3}{8}$. En palabras: *El área del sector parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo de área máxima inscrito en dicho sector* (Arquímedes, citado en Edwards, 1979: 37).

Otra forma de calcular el área del segmento parabólico consiste en considerar el triángulo *RPS* de máxima área, cuyos lados *RP* y *PS* definen dos nuevos segmentos parabólicos (Figura 4.28).

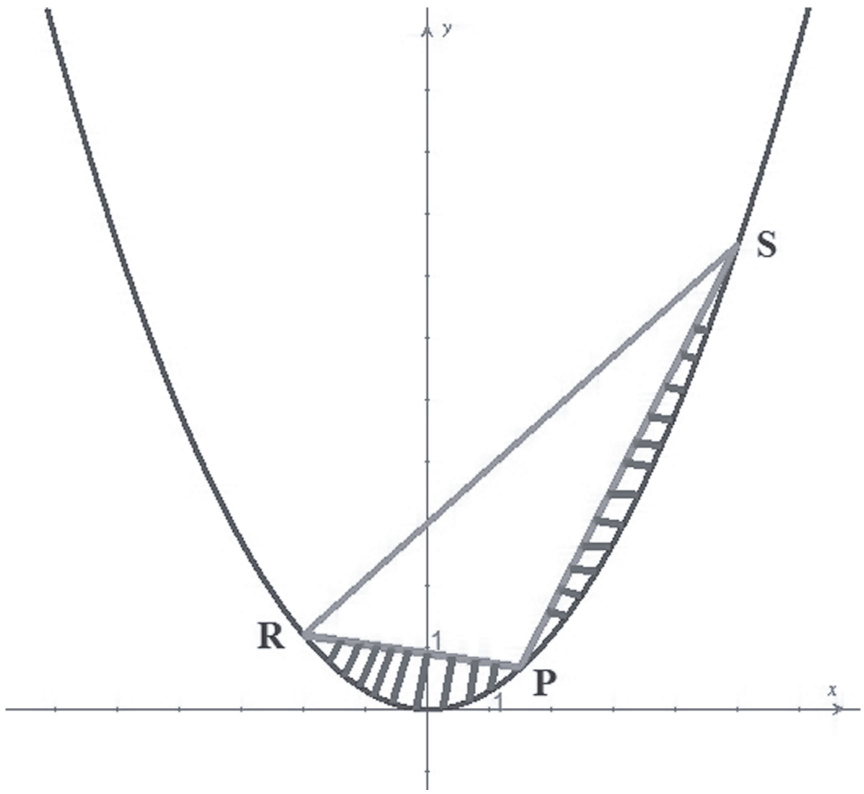


Figura 4.28. Sectores parabólicos definidos por los segmentos RP y PS.

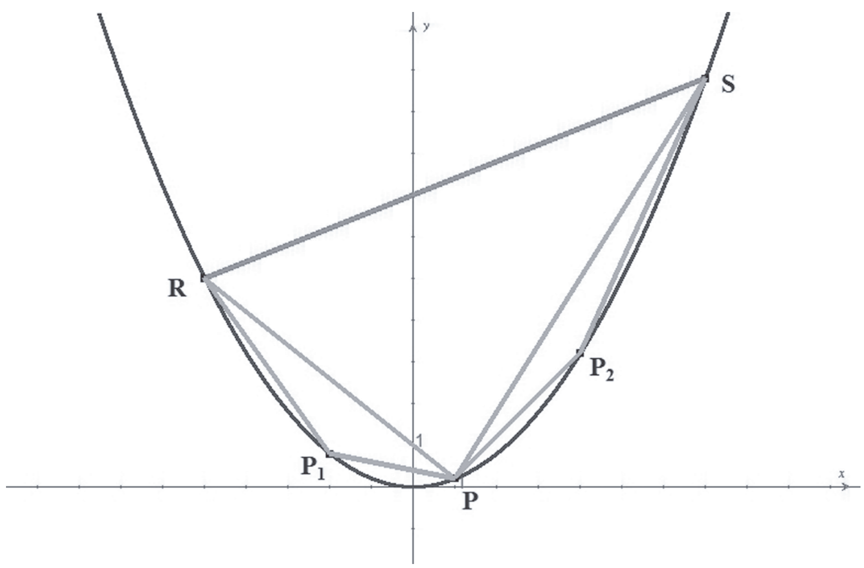


Figura 4.29. Triángulos de área máxima inscritos en los segmentos parabólicos RP y PS.

Usando un sistema coordenado se demostró que si las coordenadas de los extremos de un segmento parabólico son (r, kr^2) y (s, ks^2), entonces el área máxima de los triángulos inscritos es $A = \frac{k(s-r)^3}{8} = k\left(\frac{s-r}{2}\right)^3$ y se alcanza cuando las coordenadas del tercer vértice son $\left(\frac{r+s}{2}, k\frac{(r+s)^2}{4}\right)$. Aplicando este resultado al segmento parabólico *RP* (Figura 4.28), tenemos que el área del triángulo RP_1P es $k\left(\frac{\frac{s+r}{2}-r}{2}\right)^3 = k\left(\frac{\frac{s-r}{2}}{2}\right)^3 = \frac{k}{8}\left(\frac{s-r}{2}\right)^3$. También el área del triángulo PP_2S se calcula de la misma forma y se obtiene $k\left(\frac{s-\frac{s+r}{2}}{2}\right)^3 = k\left(\frac{\frac{s-r}{2}}{2}\right)^3 = \frac{k}{8}\left(\frac{s-r}{2}\right)^3$. Se observa que las áreas de los triángulos RP_1P y PP_2S son iguales e iguales a un octavo del área del triángulo *RPS*, por lo que su suma es igual a una cuarta parte del área de éste.

Con la construcción anterior se ha obtenido el polígono RP_1PP_2S cuya área se encuentra entre el área del sector parabólico y el área del triángulo *RPS* (ver Figura 4.30). Más precisamente, el área de este polígono es $A_1 + \frac{1}{4}A_1$, en donde A_1 es el área del triángulo *RPS*.

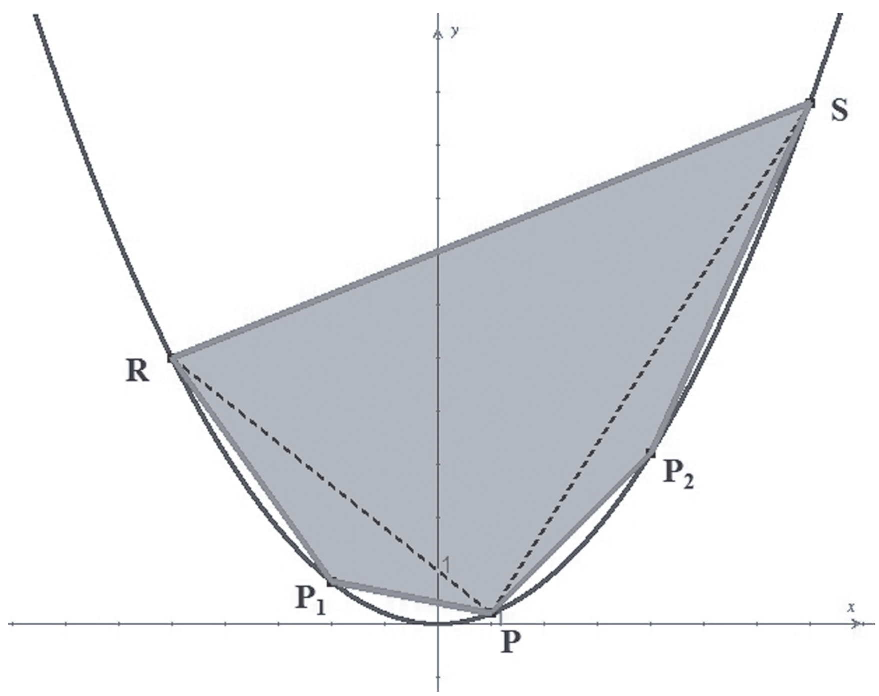


Figura 4.30. Polígono que aproxima el área del segmento parabólico RS.

Continuando este proceso con los segmentos parabólicos determinados por los lados del polígono, construimos otro polígono cuya área es $A_1 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4^2}A_1$. Este proceso se puede continuar al infinito, obteniendo polígonos que en cada paso aproximan mejor al área del sector parabólico; de manera más precisa, el área del polígono en el paso *n* es igual al área del polígono en el paso *n*-1 más $\frac{1}{4^n}A_1$. En el límite, el área de los polígonos que se construyen es igual al área del sector parabólico. Esto se representa mediante la ecuación:

$$\begin{aligned}
\text{Área del sector parabólico} &= A_1 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4^2}A_1 + \cdots + \frac{1}{4^n}A_1 + \cdots \\
&= A_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots\right) \\
&= A_1\frac{1}{1-1/4} \\
&= \frac{4}{3}A_1.
\end{aligned}$$

Con los cálculos anteriores se puede evitar usar las técnicas del cálculo integral para mostrar que el área del segmento parabólico es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo de máxima área.

Conexiones. Una característica fundamental de las matemáticas es la interrelación que existe entre los conceptos de sus diferentes dominios, y con los conceptos de otras disciplinas que los emplean para lograr un entendimiento profundo de los problemas que abordan. En este sentido, las actividades de aprendizaje, diseñadas para discusión dentro y fuera del aula, deberían considerar de manera preponderante situaciones o problemas que ilustren la forma en que pueden interactuar diferentes ideas matemáticas al abordar un problema. Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su entendimiento es profundo y duradero, al entender las conexiones matemáticas es posible apreciar la riqueza que interconecta diferentes temas matemáticos con otros temas de su propio interés y experiencia. A través de la instrucción que enfatiza la interrelación de las ideas matemáticas, los estudiantes no solamente aprenden matemáticas, sino que aprenden la utilidad de las matemáticas (NCTM, 2000).

El problema que se discutió tiene como eje algunas propiedades importantes de una parábola, entre las cuales se tiene que, dados dos puntos *R* y *S* en ella, se determina una región convexa; de hecho, esta propiedad la comparten todos los miembros de una clase importante de curvas, en particular las cónicas. Las preguntas que guiaron la discusión fueron: *a)* ¿dónde situar un tercer punto *P* sobre el arco parabólico, determinado por la cuerda *RS*, de tal forma que el triángulo *RPS* tenga área máxima?, *b)* ¿qué relación hay entre el área de este triángulo y la del sector parabólico determinado por la cuerda *RS*?, y *c)* Si *P* es el punto que maximiza el área del triángulo *RPS,* ¿cuál es la ecuación de la recta tangente al segmento parabólico en *P*? Estas preguntas pueden ser punto de referencia para explorar problemas relacionados en secciones cónicas.

Área de un segmento hiperbólico. Considérese una hipérbola con ecuación $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, en donde *a* y *b* son números reales positivos, y dos puntos fijos *R* y *S* de coordenadas $\left(r,\frac{b}{a}\sqrt{a^2+r^2}\right)$ y $\left(s,\frac{b}{a}\sqrt{a^2+s^2}\right)$, respectivamente. Se toma un tercer punto *T* de coordenadas $\left(t,\frac{b}{a}\sqrt{a^2+t^2}\right)$, tal que $r\le t\le s$. ¿En qué posición de *T*, el triángulo *RST* tiene área máxima?

Una posible forma de abordar el problema puede ser recordando que el área del triángulo *RST* es igual al valor absoluto de:

$$\delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} r & \frac{b}{a}\sqrt{a^2+r^2} & 1 \\ s & \frac{b}{a}\sqrt{a^2+s^2} & 1 \\ t & \frac{b}{a}\sqrt{a^2+t^2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Se puede justificar que $\delta=\frac{b}{2a}\left[(t-s)\sqrt{a^2+r^2}+(s-r)\sqrt{a^2+t^2}+(r-t)\sqrt{a^2+s^2}\right]$. Definiendo $f(t)=(t-s)\sqrt{a^2+r^2}+(s-r)\sqrt{a^2+t^2}+(r-t)\sqrt{a^2+s^2}$, se puede probar que $f(r)=f(s)=0$ y que $f(t)\le 0$, para todo *t* entre *r* y *s* y de esto concluir que el área del triángulo *RTS* es $-\frac{b}{2a}f(t)$, por lo que hay un punto *T* donde es máxima.

Para demostrar que $f(t)$ es negativa, se puede iniciar probando que $f'(t)$ es creciente, lo cual se obtiene observando el signo de $f''(t)=\frac{a^2(s-r)}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Para el caso de una circunferencia de radio *r*, centro *O*, y dos puntos adicionales *R* y *S* en ella; se puede considerar el sector *ROS* tal que el ángulo *ROS* es menor o igual que π radianes y demostrar que el área de dicho sector es igual a $\frac{r^2}{2}\arccos\left(\frac{2r^2-\overline{RS}^2}{2r^2}\right)-\frac{\overline{RS}}{4}\sqrt{4r^2-\overline{RS}^2}$.

4.4. Una aparente parábola

Desde la perspectiva de resolución de problemas, al explorar algunos que involucran objetos geométricos es importante clasificar a éstos en términos de sus propiedades. ¿Qué condiciones determinan un cuadrado? ¿Es posible construir un triángulo conociendo la base, el ángulo que se le opone y la altura determinada por la base? Este tipo de preguntas permiten hacer una discusión en donde es relevante determinar las características de los objetos usando un proceso inquisitivo.

La configuración a partir de la cual se desarrollará la tarea consiste en una recta *L*, un punto *P* sobre la recta, un punto *Q* fuera de la recta y una recta L_2 perpendicular a *L* por *P*. A partir de esta configuración se identificara qué problemas se pueden formular, con la finalidad de explorar algunas de las propiedades subyacentes en ésta.

La construcción del escenario de instrucción incluye la consideración de al menos tres componentes esenciales: *a)* el lugar, en el que se debe disponer de los elementos tecnológicos (computadoras, *software*, pizarrón) y de infraestructura necesarios para la realización de la tarea, *b)* la organización de los individuos para ejecutar la tarea, y *c)* el tiempo disponible para la ejecución de la tarea. Ésta en específico está proyectada para desarrollarse en un laboratorio de cómputo, que cuente con un *software* dinámico (Cabri Geometry); el número de estudiantes se estima entre 20 y 30. En la primera fase se puede organizar el trabajo en grupos de dos a cuatro estudiantes; en ella se identificarán posibles preguntas en torno a la configuración propuesta. En la segunda fase se llevarán a cabo discusiones plenarias con la finalidad de comparar y analizar las preguntas formuladas por cada uno de los equipos.

La formulación de preguntas que orienten las rutas de aprendizaje tiene el objetivo de aportar elementos que lleven al desarrollo de un proceso inquisitivo, entendiéndose por esto el desarrollo de la formulación sistemática de preguntas encaminadas a entender y proponer soluciones a la tarea. Específicamente, ¿qué problemas podemos formular con la configuración? ¿Qué objetos geométricos se pueden agregar para formular preguntas? Estas preguntas dan origen a tres posibles trayectorias hipotéticas de aprendizaje; se ilustra el desarrollo de una de ellas.

Una posible forma de iniciar el proceso inquisitivo consiste en preguntar qué objetos geométricos se pueden agregar a la configuración para formular problemas. Una posible respuesta consiste en trazar el segmento *PQ* y una perpendicular L_1 por Q al segmento *PQ* y preguntar cuál es el lugar geométrico que describe el punto de intersección.

Dada una recta *L*, $P \in L$ y $Q \notin L$, se trazan el segmento *PQ*, la recta L_1

perpendicular a *PQ* en Q y la recta L_2 perpendicular a *L* en *P*. Sea $R \in L_1 \cap L_2$. ¿Qué lugar geométrico describe *R* al moverse *P* en *L*? (figura 4.31).

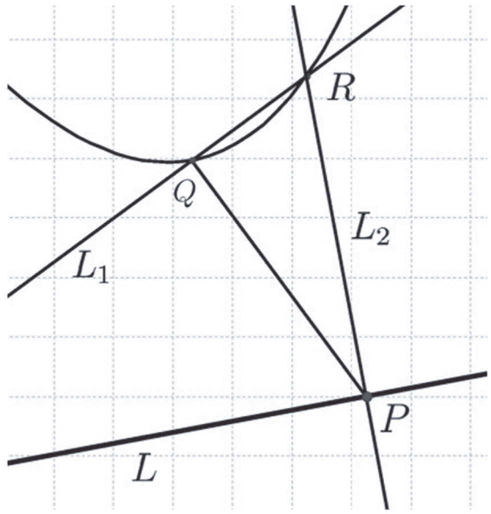


Figura 4.31. Lugar geométrico descrito por el punto R.

Una forma de aproximarse a la respuesta es efectuar la construcción con Cabri y hacer uso de la herramienta Lugar, con la cual se muestra que el lugar geométrico parece una parábola con vértice el punto Q. A partir de esto se puede intentar probar que, en efecto, se trata de una parábola.
Iniciamos considerando un sistema coordenado y, sin perder generalidad, se puede suponer que la recta *L* coincide con el eje x. Adicionalmente, supongamos que el punto *P* tiene coordenadas $p = (t,0)$ y el punto $Q = (a,b)$. Para determinar las coordenadas del punto *R* encontraremos las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 y resolveremos estas ecuaciones simultáneamente.

Como L_1 es perpendicular al segmento *PQ* y pasa por Q, para determinar su ecuación basta conocer la pendiente de tal segmento, la cual está dada por $m = \frac{b}{a-t}$, si $a \neq t$. Bajo esta condición se tiene que la ecuación de L_1 es $y - b = \frac{t-a}{b}(x-a)$ y la de L_2 es. Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones se tiene que las coordenadas de *R* satisfacen $y - b = \frac{(x-a)^2}{b}$, pues $x = t$. Dado que *a* y *b* son fijos, en la ecuación anterior se identifica la ecuación de una parábola con vértice en *(a, b)* y longitud del lado recto igual a *b* . Como la distancia del foco al vértice es una cuarta parte de la longitud del lado recto, se tiene que el foco se localiza en $\left(a, \frac{5b}{4}\right)$ y la directriz está dada por $y = \frac{3b}{4}$, ver figura 4.32.

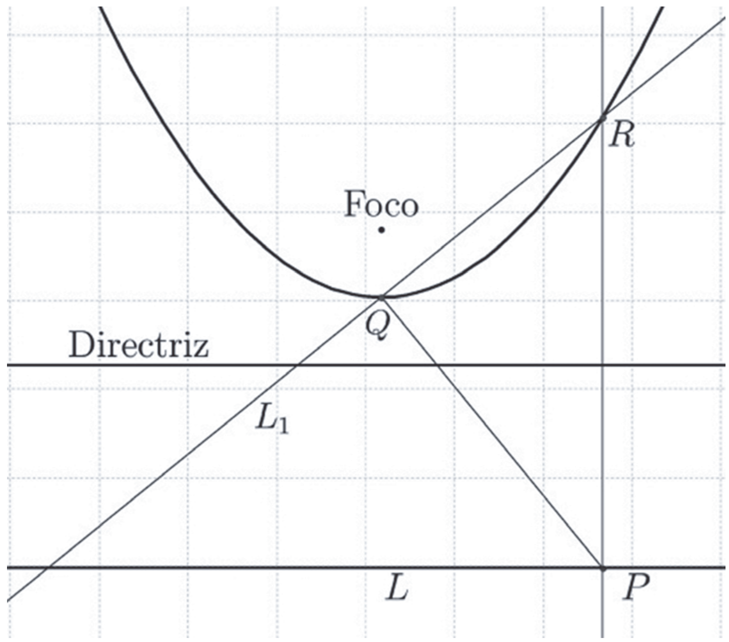


Figura 4.32. Lugar geométrico descrito por el punto R.

Un aspecto interesante del problema anterior es que permite preguntarse por la forma en que Cabri efectúa ciertas transformaciones geométricas en el proceso dinámico. Para tal efecto, generalizamos el problema original de la siguiente forma: sean *L*, *P* y *Q* como antes, tomamos un punto *Q'* en la línea que une a *P* y *Q*, efectuamos una construcción similar a la del problema anterior, salvo que ahora la línea perpendicular al segmento *PQ* pasa por *Q'*; ahora, al mover *P* sobre *L*, el punto *Q'* también se mueve. Experimentando con Cabri se muestra que el lugar geométrico descrito por *R* parece ser una parábola; haciendo uso de las herramientas Coord o Ecuación se verifica que la segunda coordenada del punto *Q'* no cambia al moverse *P*. Esto lleva a conjeturar que bajo esta hipótesis sobre *Q'*, el lugar geométrico descrito por *R* es una parábola. De manera precisa:

Teorema 1: consideremos un sistema cartesiano y *L* una recta que coincide con el eje x (ver Figura 4.33). Sean $P=(t,0)\in L$, $Q=(a,b)\notin L$ y L_1 la recta que pasa por Q y *P*. Tomemos un punto $Q'=(c,d)\in L_1$. Supongamos que al mover P, la segunda coordenada de Q' no cambia. Sea L_2 la recta que pasa por Q' y es perpendicular a L_1. Designemos por *R* al punto de intersección de L_2 y la recta de ecuación *x=t*. Entonces el lugar geométrico descrito por *R*, al moverse *P* en *L*, es una parábola.

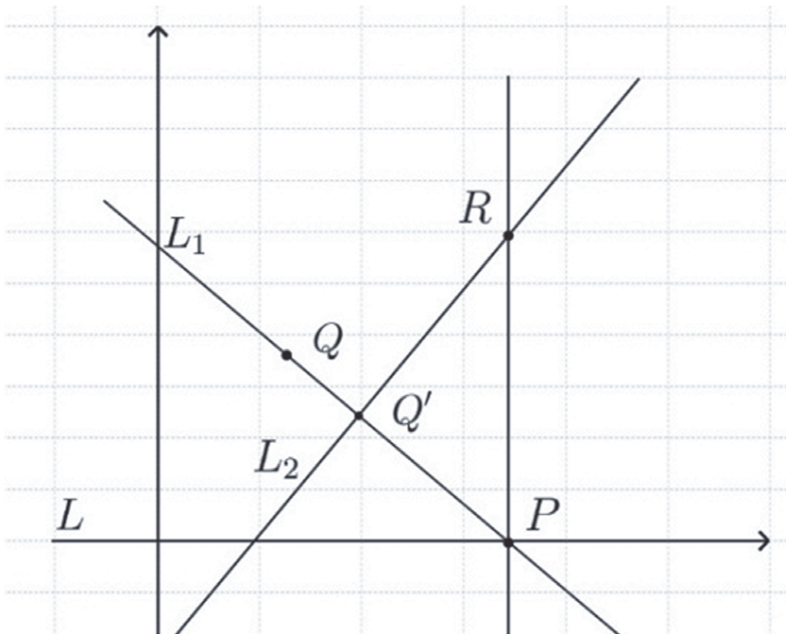


Figura 4.33. ¿Qué lugar geométrico describe R cuando se mueve P?

Demostración: como se hizo antes, encontraremos las coordenadas del punto *R* y su relación. Las rectas L_1 y L_2 tienen por ecuaciones:

$$y - b = \frac{b}{a-t}(x-a) \ldots (1)$$

$$y - d = \frac{t-a}{b}(x-c) \ldots (2),$$

respectivamente. La segunda coordenada de *R* se obtiene sustituyendo *x=t* en la ecuación (2), obteniéndose:

$$\begin{aligned} y - d &= \frac{t-a}{b}(t-c) \\ &= \frac{t-a}{b}(t-a-c+a) \\ &= \frac{(t-a)^2}{b} + \frac{a-c}{b}(t-a) \ldots (3) \end{aligned}$$

Como $Q' \in L_1$, entonces se tiene

$$d - b = \frac{b}{a-t}(c-a) \ldots (4)$$

Despejando *a*-*c* de (4) y sustituyendo en (3) se tiene:

$$\begin{aligned} y-d &= \frac{(t-a)^2}{b}+\frac{a-c}{b}(t-a) \\ &= \frac{(t-a)^2}{b}+\frac{d-b}{b^2}(t-a)^2 \\ &= (t-a)^2\left(\frac{1}{b}+\frac{d-b}{b^2}\right) \\ &= \frac{d}{b^2}(t-a)^2 \ldots (5) \end{aligned}$$

Esta ecuación se puede escribir en forma equivalente:

$$\frac{b^2}{d}(y-d)=(t-a)^2 \ldots (6)$$

que es la ecuación de una parábola con vértice en $\left(a, d+\frac{b^2}{4d}\right)$ y tiene directriz de ecuación $y = d-\frac{b^2}{4d}$.

Una parte interesante del uso de Cabri para formular las conjeturas anteriores es que al haber probado el teorema se obtiene información más precisa de la parábola. Por ejemplo, se conocen el foco y la directriz. Con ayuda de esto, el teorema se puede formular en términos de geometría sintética.

Teorema 2: sean *L* una recta, *Q* un punto fuera de *L*, $P \in L$, L_1 la recta que pasa por Q y *P*. Tome un punto $Q' \in L_1$ y trace la recta perpendicular a L_1 que pasa por *Q'*, llamándole L_2. Por *P*, *Q'* y *Q* trace una perpendicular a *L* llamando a estas rectas L_3, L_4 y L_5 respectivamente. Sean *T*, *S* y *R* los puntos de intersección de las rectas *L* y L_4; L y L_5; L_2 y L_3 respectivamente. Por *Q'* trace una perpendicular a L_4 que intersecte a L_3 y L_5 en *E* y *V* respectivamente. Sean *F* y *W* sobre L_5 tales que $WV = VF = \frac{QS^2}{4Q'T}$. Sea L_6 la perpendicular a L_5 que pasa por *W* e intersecta a L_3 en U. Entonces L_6 y *F* son la directriz y foco de una parábola con vértice en *V* (Ver figura 4.34).

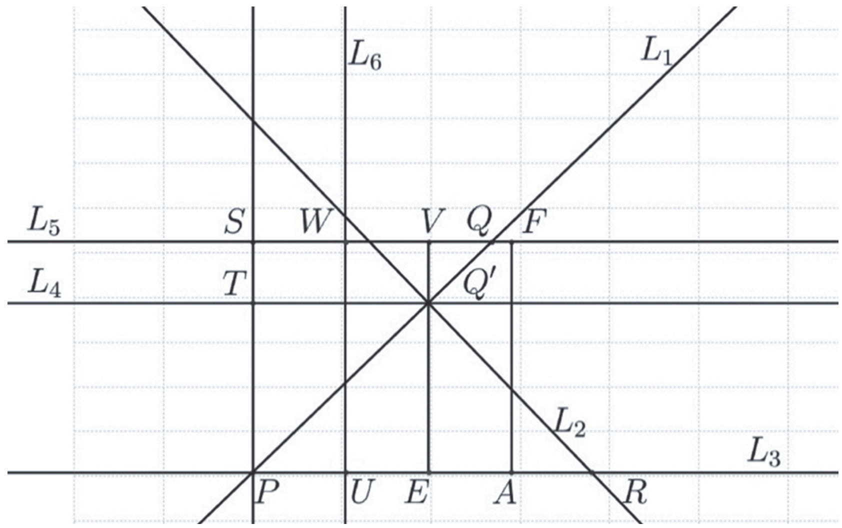


Figura 4.34. Se debe probar que UR = FR.

Demostración: la afirmación equivale a demostrar que *UR=FR*. Tenemos que:
$FR^2 = VE^2 + (UR - 2VF)^2 \ldots$ (7)
De los triángulos semejante *PQ'T* y *PQS* se tiene:
$\frac{QS}{Q'T} = \frac{VE}{Q'E} \ldots$(8)

de lo cual se obtiene,
$VE = \frac{SQ}{TQ'}Q'E \ldots$(9)

Sustituyendo el valor de *VF* y *VE* en la ecuación (7) y desarrollando el binomio se llega a:

$$FR^2 = \frac{SQ^2 QE^2}{Q'T^2} + UR^2 - UR\frac{QS^2}{Q'T} + \frac{QS^4}{4Q'T^2}$$
$$= UR^2 + \frac{SQ^2}{Q'T}\left(\frac{Q'E^2}{Q'T} - UR + FV\right).$$

Del triángulo rectángulo *RQ'P* se tiene $Q'E^2 = (PE)(ER)$ y como *PE=Q'T*, entonces de la ecuación anterior se tiene
$FR^2 = UR^2 + \frac{SQ^2}{Q'T}(ER - UR - FV) \ldots$(10)

Por otro lado, *ER-UR=-EU=-VW=-V*. De esto se concluye lo afirmado por el teorema.

En el teorema anterior se tiene de hipótesis que la segunda coordenada del punto *Q'* no cambia; con esto en mente, surge una pregunta natural: ¿qué ocurre si esta hipótesis se cambia por "la distancia de Q a Q' no cambia"? Con el uso de Cabri Geometry uno tiene la oportunidad de experimentar y observar el comportamiento del lugar geométrico generado por *R*. Una primera aproximación muestra resultados como se ilustra en la figura 4.35, y al parecer se trata de una parábola; incluso la herramienta Ecuación de Cabri Geometry propone como resultado que se trata de una parábola. Sin embargo, examinado más de cerca el comportamiento del lugar geométrico generado por *R*, aparece una gráfica, como se muestra en la figura 4.36, en la cual se tiene un objeto que no parece una parábola. Con estas evidencias es natural preguntar: ¿es una parábola el lugar geométrico que describe *R* cuando se mueve *P* en *L*? Para precisar la respuesta, cambiando un poco la notación, procedemos como sigue.

Dados una recta L, un punto $P \in L$, una circunferencia C de centro $O \notin L$ y radio *r*, se construyen las rectas L_1, que pasa por P y O, y L_3 que pasa por P y es perpendicular a L. Sean $O \in L_1 \cap C$ Q, L_2 la recta tangente a C que pasa por Q, R el punto de intersección de L_2 y L_3. ¿Es una parábola el lugar geométrico que describe R cuando se mueve P en L? (Ver figura 4.35).

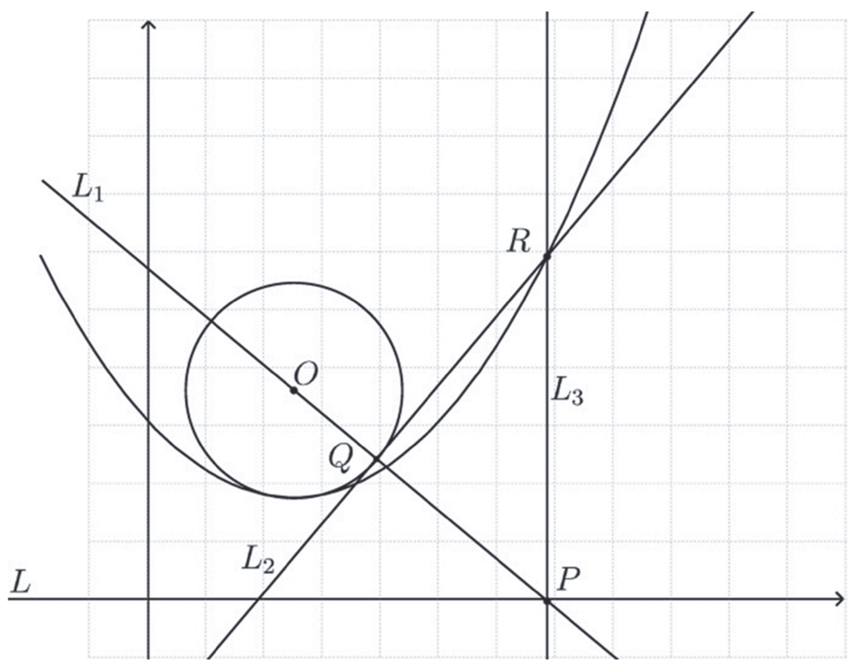


Figura 4.35. Lugar geométrico generado por R.

Para determinar las coordenadas de *R* procedemos a encontrar las ecuaciones de L_1 y *C*, las cuales son:

$$y-k=\frac{k}{h-t}(x-h) \quad ...(11)$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad ...(12),$$

respectivamente. Para determinar la ecuación de L_2, encontramos los puntos de intersección de *C* y L_1 al resolver el sistema formado por las ecuaciones (11) y (12).

Sustituyendo *y-k* de la ecuación (11) en la ecuación (12) y resolviendo para x obtenemos:

$$x=h\pm\frac{r(h-t)}{\sqrt{(h-t)^2+k^2}} \quad ...(13)$$

Sustituyendo este valor de x en (11) y simplificando se tiene:

$$y=k\left(1\pm\frac{r}{\sqrt{(h-t)^2+k^2}}\right) \quad ...(14)$$

Tomando los signos positivos en las ecuaciones anteriores, se tiene que las coordenadas de Q son

$$Q=(x_0,y_0)=\left(h+\frac{r(h-t)}{\sqrt{(h-t)^2+k^2}},k\left(1+\frac{r}{\sqrt{(h-t)^2+k^2}}\right)\right)$$

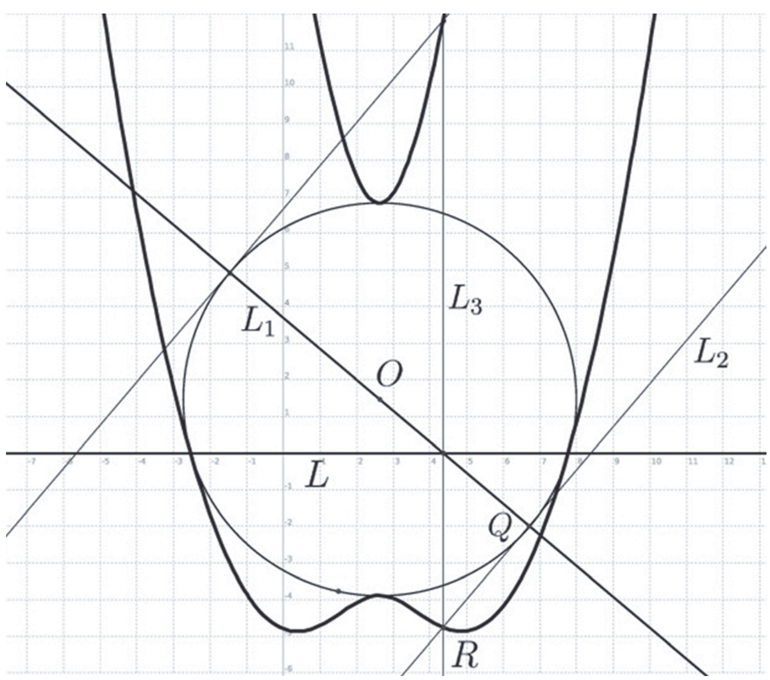


Figura 4.36. ¿Es una parábola el lugar geométrico generado por R?

Como L_2 es perpendicular a L_1, entonces la ecuación de L_2 es:

$$y - y_0 = \frac{t-h}{k}(x - x_0) \ldots (15)$$

de esto se tiene que la coordenada segunda de *R* se obtiene haciendo *x=t* en la ecuación (15), es decir, se tiene:

$$y = \frac{t-h}{k}(x - x_0) + y_0$$

$$= \frac{t-h}{k}\left(t - h - \frac{r(h-t)}{\sqrt{(h-t)^2 + k^2}}\right) + k\left(1 + \frac{r}{\sqrt{(h-t)^2 + k^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{(t-h)^2 + k^2}{k}\right)\left(1 + \frac{r}{\sqrt{(h-t)^2 + k^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{k}\right)\left((t-h)^2 + k^2 + r\sqrt{(h-t)^2 + k^2}\right)$$

Tomando los signos negativos en las expresiones para x y para *y* que se obtuvieron al resolver el sistema de ecuaciones (11) y (12) se tiene:

$$\mathrm{y} = \left(\frac{1}{k}\right)\left((t-h)^2 + k^2 - r\sqrt{(h-t)^2 + k^2}\right)$$

De lo anterior se concluye que las coordenadas del punto *R* son

$$R = \left(t, \frac{1}{k}\left((t-h)^2 + k^2 \pm r\sqrt{(t-h)^2 + k^2}\right)\right)$$

y es claro que no satisfacen la ecuación de una parábola; sin embargo, Cabri Geometry (versión II Plus) reporta que se trata de una parábola.

Un aspecto que es de crucial importancia al usar herramientas computacionales para resolver problemas matemáticos es lo concerniente a los resultados que se obtienen, pues si bien un sistema computacional es una herramienta poderosa, los resultados que se obtengan deben ser sometidos a un examen riguroso y profundo para aceptarlos o rechazarlos. Por ejemplo, el análisis de esta tarea muestra que los resultados de Cabri Geometry II Plus no concuerdan con el análisis algebraico realizado. Esto puede dar origen a una exploración a fondo del problema y preguntarse por la forma en que opera el *software*.

Cada una de las rutas que se trazaron en este ejemplo se desarrolló alrededor de un eje conceptual. Al ejecutar la tarea usando tecnología, estos ejes se articularon en un sistema robusto que permite interconectar diversos conceptos, lo que dio como resultado una comprensión más profunda de éstos. En la primera fase de la trayectoria, el eje conceptual fue la formulación de problemas a partir de una configuración dinámica; posteriormente, el eje de cada una de las rutas que se derivaron de la tarea inicial fue el lugar geométrico en dos de ellas y la optimización en la tercera. En una fase subsiguiente, cuando se formuló la pregunta de cómo Cabri realiza transformaciones geométricas, el eje conceptual fue la relación entre los sistemas axiomáticos del *software* y de la geometría euclidiana. Al respecto, es importante mencionar que el uso de una herramienta computacional para resolver problemas matemáticos lleva implícito el nivel de confiabilidad de dicha herramienta. Dick (2007: 1175) ha introducido el término "fidelidad matemática" y ha identificado tres áreas en las cuales la falta de fidelidad matemática puede surgir: *a)* la sintaxis matemática, *b)* sub-especificación en las estructuras matemáticas y, *c)* limitaciones al representar fenómenos continuos con estructuras discretas y precisión numérica computacional en procesos finitos. En esta línea de ideas, Barrera-Mora y Reyes-Rodríguez (2008) argumentan: "sin embargo, estas áreas pudieran no considerar aspectos relacionados con la confiabilidad... pensamos que los resultados del sistema computacional que no concuerdan con los resultados esperados se relacionan con los procesos internos de la herramienta, en relación con esto, se sugiere realizar un examen más profundo de la estructura matemática de la herramienta".

4.5. Mecanismos articulados: una tarea a desarrollar

La tarea trata sobre un criterio que permite determinar si, en un mecanismo de cuatro barras articuladas, una de ellas puede efectuar revoluciones completas con respecto a alguna de las restantes. Este criterio se denomina Ley de Grashof y se relaciona con propiedades de los cuadriláteros. Los mecanismos que satisfacen la Ley de Grashof tienen importantes aplicaciones porque permiten convertir el movimiento circular en un movimiento oscilatorio o viceversa. Este tipo de conversión de movimiento es útil para el funcionamiento de máquinas como, por ejemplo, la vagoneta manual (Figura 4.37).

Ley de Grashof: Considere un mecanismo plano de cuatro barras articuladas en sus extremos. Sean s la longitud de la barra más corta, l la longitud de la barra más larga y p y q las longitudes de las dos barras restantes. Al menos una de las barras del mecanismo puede dar una revolución completa si y sólo si $l + s \leq p + q$ (Chang, Lu y Wu, 2005).

(a)

(b)

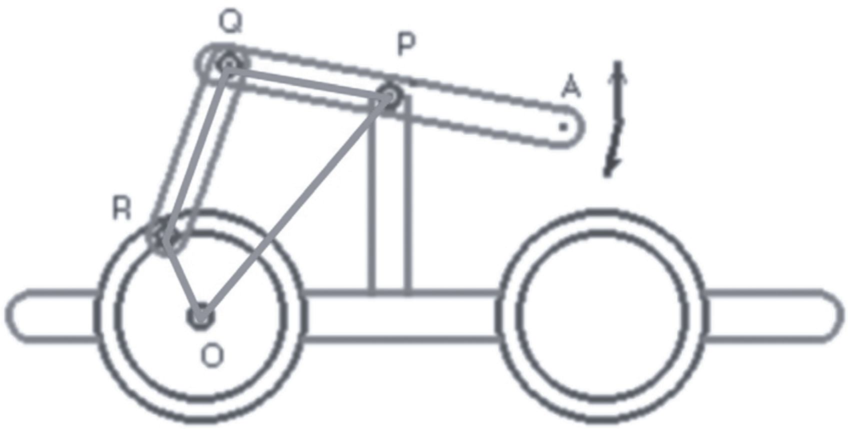


Figura 4.37. Vagoneta manual.

En esta actividad no se analiza el tránsito de la situación real al modelo matemático, sino que se centra la atención en las oportunidades para el desarrollo de aspectos del pensamiento matemático que ofrece el fenómeno ya simplificado y modelado matemáticamente.

La tarea. La tarea se divide en dos fases; la primera de ellas está orientada a que los estudiantes se familiaricen con el uso de algunos de los comandos de Cabri, mediante la construcción de casos particulares de cuadriláteros a partir de cuatro segmentos de longitud dada. En esta fase se formulan preguntas que ayuden a los estudiantes a reconocer que no siempre es posible construir un cuadrilátero dados cuatro segmentos.

En la segunda fase se les da a conocer a los estudiantes que un mecanismo de 4 barras no deformables y articuladas en sus extremos (un cuadrilátero de lados de longitud fija) se llama mecanismo de Grashof si al menos una de las barras pueda dar una revolución completa con relación a alguna otra barra. A continuación se les pedirá construir ejemplos de cuadriláteros que funcionen como mecanismos de Grashof y que formulen un criterio que les permita determinar si un cuadrilátero dado funcionará como mecanismo de Grashof, a partir de conocer alguna relación entre las longitudes de los lados del cuadrilátero.

Algunos casos particulares que se pueden proponer son: *a)* los cuatro lados del cuadrilátero son iguales, *b)* el cuadrilátero tiene dos pares de lados que son iguales, o *c)* un par de lados del cuadrilátero son iguales. Durante la implementación de la tarea es importante que se formulen conjeturas y que proporcionen argumentos para justificarlas. Asimismo, se puede utilizar una animación tridimensional de un mecanismo como apoyo visual para que los estudiantes comprendan el funcionamiento de un mecanismo articulado de cuatro barras tipo Grashof[1] (Figura 4.38). Esta animación también puede ser útil para que los estudiantes identifiquen los nombres de los componentes del mecanismo: la barra que puede dar revoluciones completas se denomina manivela, la barra que presenta un movimiento oscilatorio se denomina balancín, la barra que une dos manivelas o una manivela con un balancín se denomina acoplador y la barra fija se denomina bastidor.

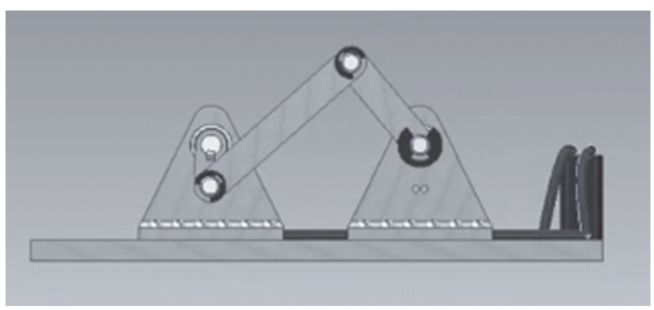


Figura 4.38. Simulación tridimensional de un mecanismo de Grashof.

Esta tarea posee un alta demanda cognitiva porque los estudiantes no disponen de un procedimiento o algoritmo que puedan aplicar de forma inmediata para obtener el criterio solicitado. Además, no hay una ruta explícita o bien determinada para obtener una solución. La tarea requiere que los estudiantes exploren y entiendan conceptos, procesos y relaciones matemáticas, que accedan a sus recursos y que los utilicen para avanzar en el proceso de solución; en resumen, la tarea requiere que los estudiantes “hagan matemáticas” (Smith y Stein, 1998).

1 Una animación de este tipo se puede ver en el enlace http://www.youtube.com/watch?v=aW0Zy72BLyA

Primer episodio: entendimiento y exploración de la tarea. En esta fase, los estudiantes iniciarán el proceso de exploración de la situación tratando de construir un cuadrilátero a partir de cuatro segmentos (Figura 4.39). Un aspecto que se debe considerar es la importancia de que los estudiantes se den cuenta de que no siempre es posible construir un cuadrilátero dados cuatro segmentos. Se puede proponer, por ejemplo, que traten de construir un cuadrilátero de lados de 2, 3, 4 y 11 centímetros. Lo anterior los puede llevar a conjeturar un resultado análogo a la desigualdad del triángulo. El profesor deberá estar atento a las dificultades que muestren los estudiantes y a las contrucciones erróneas que elaboren, ya que es común que construyan el cuadrilátero de forma que uno de los lados no permanece constante. Como ya se ha mencionado con anterioridad es importante promover que los estudiantes justifiquen sus afirmaciones u observaciones y que las discutan con el profesor y con sus compañeros.

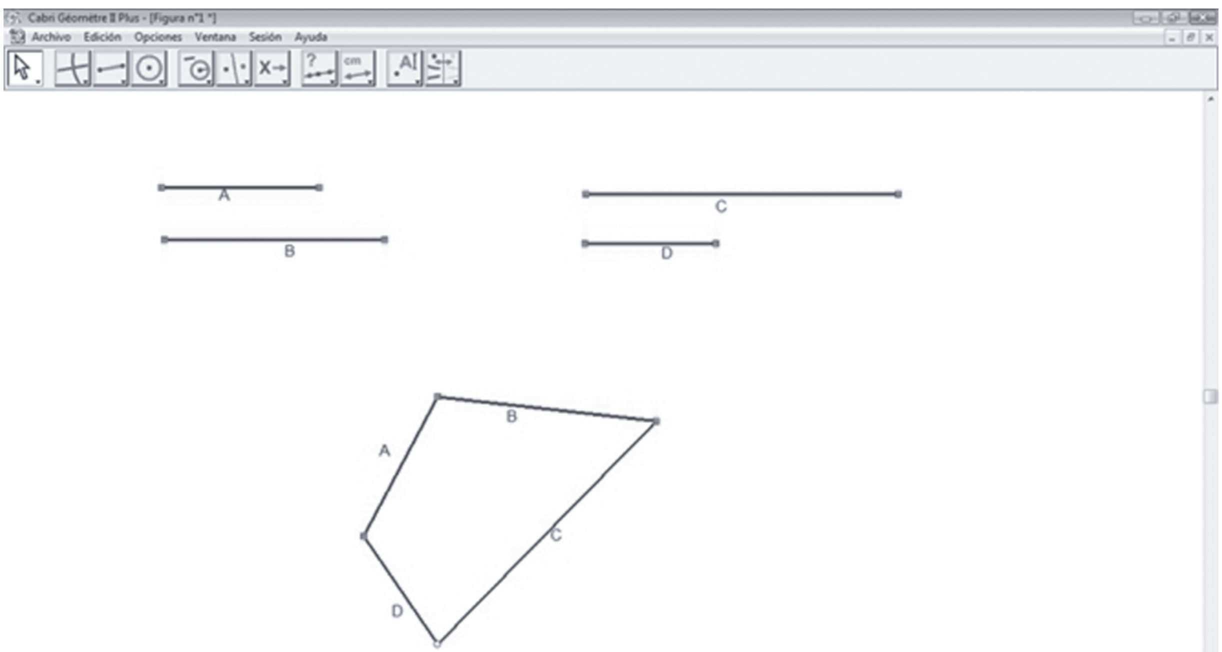


Figura 4.39. Construcción dinámica de un cuadrilátero a partir de cuatro segmentos dados.

Posteriormente, los estudiantes tienen que construir un cuadrilátero que funcione como mecanismo tipo Grashof; en el caso de que se demoren para encontrar un ejemplo de tal cuadrilátero se les puede sugerir que intenten con un cuadrilátero de lados 2, 4, 5 y 6, el cual es un mecanismo de Grashof con un comportamiento del tipo manivela-balancín,[2] como el ejemplificado en la animación tridimensional mostrada a los estudiantes.

2 En un mecanismo de este tipo, una de las barras funciona como manivela y otra funciona como balancín que efectúa un movimiento oscilatorio en una trayectoria circular pero sin dar vueltas completas.

Segundo episodio: elaboración y justificación de conjeturas. Una conjetura general que podrían sugerir los estudiantes es que el hecho de que la manivela gire revoluciones completas tiene que ver con la suma de longitudes de dos de las barras y su comparación con la suma de las longitudes de las otras dos. El uso del comando Animación y la posibilidad de construir fácilmente diversos casos particulares permitirá a los estudiantes formular diversas conjeturas, las cuales es importante compartir y discutir en sesiones plenarias.

Algunos estudiantes pueden sugerir explorar el comportamiento de los ángulos para encontrar relaciones entre las longitudes de los lados, los ángulos y el hecho de que el cuadrilátero funcione como mecanismo de Grashof. Los estudiantes también podrían agregar trazos auxiliares, tales como las diagonales del cuadrilátero, y formular conjeturas a partir de las longitudes de esas diagonales. Algunas conjeturas formuladas por estudiantes con los que se ha llevado a cabo la actividad se muestran en la tabla 4.1.

Entre todas las barras, la barra móvil debe ser más pequeña que las otras
La suma de 2 lados debe ser igual a la suma de los otros dos
La medida del lado fijo y el que gira debe ser mayor que la del lado acoplador
La suma de las barras consecutivas debe ser igual a las otras dos, o que el de la manivela y la de soporte sea igual que las otras dos
El lado más grande es la base, la suma del lado base y la manivela tiene que ser menor que la suma de los otros 2 lados
Que la suma de los lados A+B = C + D (Figura 4.39)

Tabla 4.1. Algunas conjeturas formuladas por estudiantes de primer semestre de una licenciatura en física.

Es importante notar que muchas de las conjeturas pueden no ser correctas, pero es importante que los estudiantes las formulen y que las pongan a prueba durante la discusión plenaria. Así, los estudiantes podrán desarrollar habilidad para buscar contraejemplos.

El dinamismo de las representaciones que es posible construir con el *software* de geometría dinámica puede permitir a los estudiantes construir familias de configuraciones a partir de las cuales formulen diversas conjeturas, mediante aproximaciones empíricas y visuales. Trabajar en parejas o en grupos de tres o cuatro personas favorecerá la discusión y el desarrollo de competencias matemáticas específicamente relacionadas con la formulación de justificaciones.

4.6. Triadas pitagóricas

Es bien conocido que el Teorema de Pitágoras es uno de los resultados más discutidos y utilizados en diferentes ámbitos, sobre todo en la instrucción matemática en los niveles básicos. Este resultado caracteriza a los triángulos rectángulos y por este hecho su uso y aplicación concierne de manera natural a la geometría. El enunciado del teorema en términos geométricos es: *en un triángulo de lados a, b y c con ángulos opuestos A, B y C respectivamante, el ángulo en C es recto* $\Leftrightarrow a^2+b^2=c^2$.

No obstantes las características geométricas del resultado, las conexiones con aspectos aritméticos son sobresalientes y pueden ser un punto importante para establecer vínculos con problemas aritméticos profundos. Un punto de partida para iniciar la discusión aritmética de la ecuación $a^2+b^2=c^2$ consiste en suponer que los valores que toman las variables *a*, *b* y *c* son enteros positivos. Con esto tenemos la definición.

Definición: una triada de enteros positivos (a, b, *c)* se llama triada pitagórica (TP) si $a^2+b^2=c^2$. Si una triada pitagórica satisface que el máximo común divisor de *a*, *b* y *c* es uno, se le llama primitiva y la denotaremos TPP. Posiblemente el ejemplo más conocido de TP es la triada (3, 4, 5). Esta triada tiene propiedades importantes. Una de ellas es que sus componentes son enteros consecutivos. Con esto en mente, surge la pregunta: "¿cuántas TP hay cuyos componentes sean enteros consecutivos?" En términos algebraicos, la pregunta se traduce a: ¿cuántos enteros positivos *a* existen tales que $a^2+(a+1)^2=(a+2)^2$? Desarrollando los binomios y simplificando se llega a la ecuación $a^2-2a-3=0$, cuyas soluciones son -1 y 3; esto se traduce diciendo que las únicas TP de enteros consecutivos son (-1, 0, 1) y (3, 4, 5). Otra pregunta de importancia es: ¿cómo se obtienen todas las triadas pitagóricas? Para abordar esta pregunta le cambiaremos de nombre a las variables y transformaremos la ecuación $X^2+Y^2=Z^2$ en $x^2+y^2=1$, al dividir entre Z, suponiendo que $Z\neq 0$. En la nueva ecuación se tiene $x=\frac{X}{Z}$ y $y=\frac{Y}{Z}$. La ventaja de la nueva ecuación es que la podemos considerar como la ecuación de una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas. Entonces, encontrar soluciones enteras de la ecuación $X^2+Y^2=Z^2$ es equivalente a encontrar soluciones racionales de la ecuación $x^2+y^2=1$. El método que proponemos para encontrar las soluciones racionales de la ecuación $x^2+y^2=1$ nos permitirá encontrar conexiones con geometría, aritmética y trigonometría.

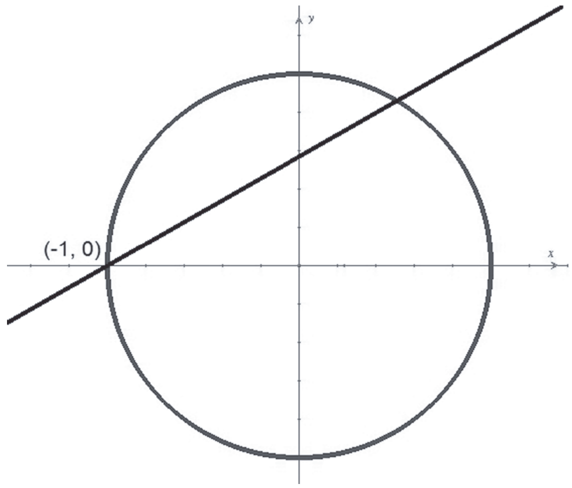


Figura 4.40. Círculo unitario.

Consideremos la recta que pasa por el punto (-1,0) y tiene pendiente *t*. Esta recta intersecta a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$ en dos puntos; uno de ellos es (-1,0) y el otro puede ser encontrado resolviendo el sistema $x^2+y^2=1,\ y=t(x+1)$. Sustituyendo la segunda ecuación en la primera se obtiene $x^2+t^2(x+1)^2=1$; esta última ecuación se transforma en:

$$\begin{aligned} x^2-1+t^2(x+1)^2 &= (x+1)\left(x-1+t^2(x+1)\right) \\ &= (x+1)\left(x\left(1+t^2\right)+t^2-1\right), \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que las soluciones son $x=-1$ y $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Sustituyendo el último valor de x en $y=t(x+1)$ y simplificando se tiene $y=\frac{2t}{1+t^2}$. Dado que buscamos valores racionales de x y *y*, de las expresiones para x e *y* en términos de *t*, se tiene que esto ocurre $\Leftrightarrow$ *t* es racional. Supongamos que $t=\frac{m}{n}$ es un racional, con *m* y *n* primos relativos, entonces $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{1+\frac{m^2}{n^2}}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$, $y=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}=\frac{2nm}{n^2+m^2}$.

Recordando que x e *y* están dados por $x=\frac{X}{Z}$, $y=\frac{Y}{Z}$ se tiene que $\frac{X}{Z}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$ y $\frac{Y}{Z}=\frac{2nm}{n^2+m^2}$. Estas ecuaciones equivalen a:

$$X^2\left(n^2+m^2\right)=Z\left(n^2-m^2\right)\ (*)\ \text{y}\ Y\left(n^2+m^2\right)=2mnZ\quad (**)$$

Dado que *m* y *n* son primos relativos, el máximo común divisor de m^2+n^2 y n^2-m^2 es 1 o 2. Para determinar los valores de X, Y, Z, analizaremos los dos casos posibles. Iniciamos con el caso en que el máximo común divisor de m^2+n^2 y n^2-m^2 es 2, entonces $n^2-m^2=2D$ y $n^2+m^2=2D_1$ con D y D_1 primos relativos. De la ecuación (*) se tiene $2XD_1=2DZ \Rightarrow XD_1=DZ$. Como X, Z y D y D_1 son primos relativos, entonces $X=D$ y $Z=D_1$. De esto se obtiene $n^2-m^2=2X$ y $n^2+m^2=2Z$.

Usando (**) y $n^2+m^2=2Z$ se tiene $Y(n^2+m^2)=2mnZ=mn(n^2+m^2) \Rightarrow Y=mn$.

También se tiene que $n^2-m^2=2X$ implica que 2 divide a *n-m* o 2 divide a *n+m*. Si por ejemplo, 2 divide a *n-m*, entonces $n-m=2q$ y de esto $n+m=2(q+m)$, probando que *n-m* y *n+m* son pares. Definiendo $n_1=\frac{n-m}{2}$ y $m_1=\frac{n+m}{2}$ se tiene $4n_1m_1=n^2-m^2$. Esto último junto con $n^2-m^2=2X$ lleva a $X=2m_1n_1$. De las definiciones de n_1 y m_1 se llega a $n=n_1+m_1$ y $m=m_1-n_1$, de lo que se obtiene $n^2+m^2=2(n_1+m_1)$. Esto último, combinado con $n^2+m^2=2Z$, lleva a $Z=n_1^2+m_1^2$. De $n=n_1+m_1$ y $m=m_1-n_1$ se tiene que $Y=mn=m_1^2-n_1^2$.

Resumiendo, en el caso que el máximo común divisor de m^2+n^2 y n^2-m^2 sea 2, se tiene que existen enteros n_1 y m_1 tales que $X=2m_1n_1, Y=m_1^2-n_1^2$ y $Z=m_1^2-n_1^2$ (***). Si el máximo común divisor de m^2+n^2 y n^2-m^2 es 1, entonces de manera directa se obtiene que $X=n^2-m^2$, $Y=2mn$ y $Z=n^2+m^2$ (****). Es importante notar la analogía entre las ecuaciones (***) y (****). De esto se concluye que las triadas pitagóricas son de la forma $(2mn, m^2-n^2, m^2+n^2)$ o $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$.

Una consecuencia del método que hemos utilizado para encontrar las triadas pitagóricas usando una parametrización del círculo unitario por medio de funciones racionales, tiene aplicaciones en el cálculo de primitvas de funciones racionales del seno y coseno de un ángulo. De manera más precisa, calcular una integral de la forma $\int R(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))d\theta$, en donde $R(\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$ es una función racional, se puede reducir a calcular una integral de una función racional en una variable.

Si en la figura 4.40, consideramos el segmento definido por el origen y el punto de coordenadas (x, y), considerando el ángulo definido por tal segmento y el eje horizonta,l se tiene: $y=\text{sen}(\theta)$ e $x=\cos(\theta)$ y $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=t$. De la última igualdad $\theta=2\tan^{-1}(t)$. Derivando a θ respecto de *t* se tiene $d\theta=\frac{2dt}{1+t^2}$. Usando $y=\frac{2t}{1+t^2}$ y $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ y las ecuaciones anteriores se llega a

$$\int R(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))d\theta = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Note que el integrando es una función racional en *t* y calcularla se reduce a descomponerla en fracciones parciales e integrar con las técnicas de fracciones parciales.

Ejemplo: calcular la integral $I = \int \frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}d\theta$. Notemos que I se puede descomponer como la suma de dos integrales: $I = \int \frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}d\theta = \int \frac{\operatorname{sen}(\theta)d\theta}{1+\cos(\theta)} + \int \frac{d\theta}{1+\cos(\theta)}$. La primera integral se calcula directamente y la segunda la calculamos usando las ecuaciones $d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$ y $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. En detalle:

$$\int \frac{d\theta}{1+\cos(\theta)} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1+t^2+1-t^2} = \int dt = t,$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(\theta)d\theta}{1+\cos(\theta)} = -\ln(1+\cos(\theta)).$$

De las igualdades anteriores se tiene que $\int \frac{1+\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}d\theta = -\ln(1+\cos(\theta)) + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

4.7. Irracionalidad de $\sqrt{2}$

En teoría de números, las extensiones cuadráticas de los números racionales han jugado un papel central desde la época de Gauss, particularmente, conocer las unidades del anillo de enteros de una extensión cuadrática es un problema central. Para los campos reales, este problema se resuelve mediante las soluciones de la Ecuación de Pell: $x^2 - dy^2 = \pm 1$. En esta actividad se hace una discusión de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, y su conexión con las soluciones de la ecuación de Pell, desde un punto de vista didáctico. De manera más precisa, se resalta la importancia de la estructura conceptual del profesor[3] y del uso sistemático de herramientas computacionales en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes.

Uno de los principales temas en el estudio del cálculo de una variable real es la discusión de los diferentes sistemas numéricos y sus propiedades.

3 Por la estructura conceptual del profesor se entenderá la forma en que los conceptos disciplinares, la concepción del aprendizaje, de una comunidad de aprendizaje y de los estudiantes como individuos que construyen conocimiento se organizan en la mente del profesor.

En esa discusión, uno de los aspectos que resulta difícil de comprender para los estudiantes es el hecho de que existen números que no son racionales; es decir, que no pueden expresarse como un cociente de dos números enteros. Uno de los más importantes de estos ejemplos es $\sqrt{2}$, cuyo descubrimiento, de acuerdo con los historiadores, causó desconcierto entre los miembros de la Escuela Pitagórica, pues uno de sus principios establece que "Todo es número"; esto, por supuesto, tiene su origen en las concepciones filosóficas que sostenía dicha escuela.

En diversos textos en los que se analiza la irracionalidad de $\sqrt{2}$, su justificación se lleva a cabo mediante un argumento por contradicción (Spivak, 1996; Courant y Robbins, 2006), que, de acuerdo con algunos historiadores, fue empleado por los griegos. Sin embargo, consideramos que esta aproximación no ilustra algunos aspectos aritméticos importantes relacionados con la irracionalidad de $\sqrt{2}$, entendiéndose por esto que el hecho de que $\sqrt{2}$ sea irracional es equivalente a que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tenga soluciones enteras no triviales (es decir $x = 0$, $y = 0$). Es interesante notar que también este problema es equivalente a la inexistencia de triángulos rectángulos isósceles con lados enteros.

Con las ideas anteriores en mente y desde una perspectiva didáctica, se puede preguntar: ¿es posible desarrollar rutas de instrucción que estructuren las ideas anteriores para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y que conecten diversos conceptos matemáticos?, ¿en qué medida esas posibles conexiones permiten al estudiante construir una red conceptual acorde con los principios de la disciplina?, ¿en qué forma la discusión en el aula puede ayudar al estudiante a construir conocimiento matemático?

La tarea: se propone a los estudiantes construir una tabla de tres columnas, en una de las cuales se colocan los cuadrados y en la otra el doble de los cuadrados de los números naturales (Figura 4.41). Mediante la observación de la tabla, se buscó que los estudiantes identificaran que la segunda y tercera columnas no tienen elementos comunes, es decir, que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras. Se puede sugerir que los estudiantes construyan la tabla en Excel y observen que no hay números en común en las columnas B y C, es decir, no hay números enteros x y y tales que $x^2 - 2y^2 = 0$.

A continuación se puede observar que, a pesar de que no hay números comunes en ambas columnas, "hay números que son casi iguales", es decir, números cuya diferencia es 1; por ejemplo, 1 y 2, 9 y 8, 49 y 50, 289 y 288, etcétera. Lo anterior significa que existen números enteros x y y que satisfacen las ecuaciones $x^2 - 2y^2 = 1$ o $x^2 - 2y^2 = -1$.

	A	B	C
1	n	x^2	$2y^2$
2	1	1	2
3	2	4	8
4	3	9	18
5	4	16	32
6	5	25	50
7	6	36	72
8	7	49	98
9	8	64	128
10	9	81	162
11	10	100	200
12	11	121	242
13	12	144	288
14	13	169	338
15	14	196	392
16	15	225	450
17	16	256	512
18	17	289	578
19	18	324	648
20	19	361	722
21	20	400	800
22	21	441	882
23	22	484	968
24	23	529	1058
25	24	576	1152
26	25	625	1250
27	26	676	1352
28	27	729	1458

Figura 4.41: Tabla de cuadrados y dobles de cuadrados.

¿Qué elementos, en el sentido del pensamiento matemático, emergen al discutir la tarea con el uso de ésta herramienta? Aunado a que Excel facilita los cálculos, puede fomentar el que los estudiantes centren la atención en la búsqueda de patrones aritméticos (Borwein y Bailey, 2003). Mediante la observación de la tabla se puede conjeturar que la ecuación $x^2 - 2y^2 = 0$ no tiene soluciones enteras, lo cual equivale a decir que no existen números enteros x y y tales que $\frac{x^2}{y^2} = 2$ o que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Adicionalmente, la herramienta puede ayudar a explorar las soluciones enteras de la ecuación $x^2 - 2y^2 = 1$ (ecuación de Pell), la cual puede ser una plataforma que puede conducir a una discusión de fracciones continuadas, tema de gran interés desde el punto de vista práctico y teórico en diversas ramas de las matemáticas.

Con base en la tabla 1 se puede determinar que $x=3$ y $y=2$; así como $x=17$ y $y=12$, son soluciones de la ecuación $x^2-2y^2=1$. Con esto como punto de partida se puede preguntar: ¿existen otras soluciones?, ¿cómo se pueden calcular?, ¿qué tipo de estructura tienen las soluciones?

Conexiones: para responder a las preguntas anteriores y establecer conexiones se puede sugerir a los estudiantes desarrollar la expresión $\left(3+2\sqrt{2}\right)^2$, obteniéndose como resultado $17+12\sqrt{2}$ y a partir de esto observar que $\left(17+12\sqrt{2}\right)\left(17-12\sqrt{2}\right)=1$, es decir, $17^2-2(12)^2=1$. Este resultado a su vez puede conducir a plantearse preguntas del tipo: ¿es cierto que toda potencia entera positiva de $3+2\sqrt{2}$ se puede expresar como $x_n+y_n\sqrt{2}$, con x_n y y_n enteros positivos?, ¿cuál es el menor número positivo de la forma $x+y\sqrt{2}$ tal que x y y sean enteros positivos y que $x^2-2y^2=1$?, ¿cuál es el comportamiento de los cocientes $a_n=\frac{x_n}{y_n}$ cuando n crece?

Ejercicio. Usando el binomio de Newton, explique por qué $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$ se puede escribir en la forma $x_n+y_n\sqrt{2}$, con x_n y y_n enteros positivos. Justifique que la pareja (x_n, y_n) es solución de la ecuación $x^2-2y^2=1$.

Para conocer el comportamiento de los cocientes $a_n=\frac{x_n}{y_n}$ cuando n crece se puede hacer uso de un CAS y una hoja electrónica de cálculo.

(a)

A	B	C	D
n	x_n	y_n	$a_n = x_n/y_n$
1	1	1	1
2	3	2	1.5
3	7	5	1.4
4	17	12	1.416666666666670
5	41	29	1.413793103448280
6	99	70	1.414285714285710
7	239	169	1.414201183431950
8	577	408	1.414215686274510
9	1,393	985	1.414213197969540
10	3,363	2,378	1.414213624894870
11	8,119	5,741	1.414213551646050
12	19,601	13,860	1.414213564213560
13	47,321	33,461	1.414213562057320
14	114,243	80,782	1.414213562427270
15	275,807	195,025	1.414213562363800
16	665,857	470,832	1.414213562374690
17	1,607,521	1,136,689	1.414213562372820
18	3,880,899	2,744,210	1.414213562373140
19	9,369,319	6,625,109	1.414213562373090
20	22,619,537	15,994,428	1.414213562373100

(b)

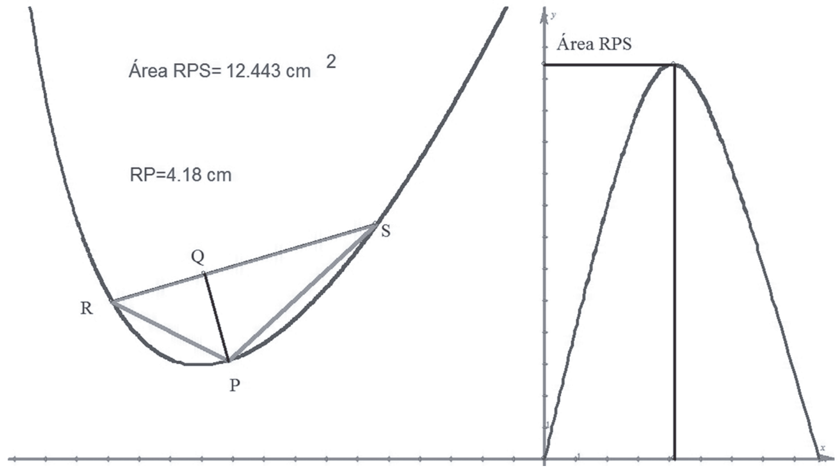


Figura 4.42. Integración del uso de dos herramientas digitales para determinar el comportamiento de los cocientes $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.

Con base en la figura 4.42, los estudiantes pueden observar que los cocientes $a_n = \frac{x_n}{y_n}$ se aproximan a $\sqrt{2}$ cuando *n* crece. Estas evidencias pueden emplearse como motivación para exhibir argumentos formales que justifiquen el comportamiento numérico observado en la figura 2.

Presentación de argumentos formales. Existen diferentes pruebas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$; una de ellas se basa en el principio del descenso infinito propuesta por Fermat (Edwards, 1977: 8). Sin embargo, existe una prueba cuyos argumentos pueden ser reconstruidos con relativa facilidad por los estudiantes y que hace uso del teorema fundamental de la aritmética. El desarrollo del procecso de argumentación puede iniciar con la pregunta "¿por qué la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras diferentes de cero?"

El teorema fundamental de la aritmética establece que todo número entero x se puede factorizar de forma única (salvo el orden) como producto de primos. Posteriormente se puede orientar a los estudiantes para que justifiquen que el cuadrado de todo número entero x distinto de cero y ± 1 tiene un número par de factores primos. Si x tiene *k* factores primos, entonces x^2 tiene 2*k* factores primos y dado que 2 es primo, entonces $2x^2$ tiene 2*k*+1 factores primos; en otras palabras, el cuadrado de un entero distinto de 0 y de ± 1 siempre tiene un número par de factores primos, mientras que el doble de un cuadrado tiene un número impar de factores primos, de lo que se concluye que la ecuación $x^2 = 2y^2$ no tiene soluciones enteras distintas de cero. Con estas ideas en mente, el resultado se puede generalizar, esto es, se puede probar que la raíz cuadrada de un entero mayor que uno, libre de cuadrado, es irracional; más aún, se puede demostrar que la raíz n-ésima de un entero mayor que uno libre de potencia n-ésima es irracional.

Visión retrospectiva, generalización y extensión de resultados. Regresando al problema original, ¿qué quiere decir que hay números en las dos columnas que "casi son iguales"? Esto se puede interpretar diciendo que el cociente de la posición de esos números en la tabla es casi $\sqrt{2}$, como se observa en la figura 4.42. La justificación del resultado es la siguiente: x_n y y_n satisfacen la ecuación ${x_n}^2 - 2{y_n}^2 = 1$, de donde se tiene $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)^2 - 2 = \frac{1}{{y_n}^2}$; además, como x_n y y_n crecen conforme n crece, $\frac{1}{{y_n}^2}$ converge a cero, por lo que $\frac{x_n}{y_n}$ converge a $\sqrt{2}$.

En este momento de la discusión puede aparecer la sugerencia de cambiar el primo 2, por el primo 3 y encontrar soluciones enteras a la ecuación $x^2 - 3y^2 = 1$; en general se puede considerar discutir la ecuación $x^2 - py^2 = 1$ (Ecuación de Pell). Dada la generalidad del problema y las características aritméticas de la ecuación se puede considerar el uso de un *software* como SAGE (Software for Algebra and Geometry Experimentation) para llevar a cabo el análisis de la ecuación de forma más eficiente (Stein, 2006), debido a sus facilidades para abordar problemas aritméticos.

En este *software* es posible elaborar un programa que tenga por entrada un número primo *p* y un entero positivo *n,* y por salida: *a)* la menor solución (x_0, y_0) de la ecuación $x^2 - py^2 = 1$, en el sentido de que si (x, y) es otra solución, entonces $x_0 + y_0\sqrt{p} < x + y\sqrt{p}$, *b)* las parejas (x_n, y_n) que se obtienen de $(x_0 + y_0\sqrt{p})^n = x_n + y_n\sqrt{p}$, *c)* el cociente $a_n = \frac{x_n}{y_n}$ y *d)* una aproximación de $\sqrt{p}$.

Con el uso del programa en SAGE, los estudiantes pueden conjeturar que la ecuación de Pell tiene solución para cada primo, además de que las soluciones se obtienen tomado potencias de la menor solución (x_0, y_0) y que el cociente $a_n = \frac{x_n}{y_n}$ converge a $\sqrt{p}$. Estas observaciones pueden motivar una segunda etapa de justificación de resultados, la cual es el punto de partida para discutir conceptos tales como fracciones continuadas, unidades en un campo cuadrático real y soluciones de la ecuación de Pell.

4.8. Teselaciones

Entre las expresiones artísticas de diversos pueblos de la antigüedad ha destacado la utilización de patrones geométricos en la decoración de pisos, paredes, alfombras, cerámica, etcétera. Una de estas expresiones son los mosaicos, que, de acuerdo con el diccionario de María Moliner, son un “trabajo artístico hecho acoplando sobre una superficie trozos de piedra, vidrio, cerámica, etc., de distintos colores, de modo que forman figuras”.

Figura 4.43. Algunos ejemplos de mosaicos.

Un mosaico o teselación, en términos geométricos, es un recubrimiento de una región plana con un conjunto de piezas, también planas, llamadas teselas (del latín *tessella*) las cuales no se sobreponen, además de que no existen espacios vacíos entre ellas. Analizar desde un punto de vista matemático a las teselaciones puede dar lugar a la formulación y resolución de problemas relacionados con polígonos y transformaciones del plano tales como rotaciones, traslaciones y reflexiones, ya que la simetría en un diseño geométrico generalmente se traduce en armonía visual.

¿Por qué es relevante el estudio de teselaciones en términos del desarrollo de competencias geométricas? De acuerdo con el NCTM (2000), en el nivel bachillerato los estudiantes deben tener oportunidades para explorar y descubrir relaciones entre figuras geométricas. Particularmente, al analizar las propiedades de diversos polígonos adquirirán la habilidad para comparar y clasificar formas. Además, se propone que los estudiantes lleven a cabo exploraciones cada vez más independientes en actividades que les permitan desarrollar un entendimiento profundo de ideas tales como transformaciones y simetría. Por otra parte, se considera que para que el profesor pueda ofrecer estas oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes, él mismo debe haberse enfrentado en algún momento a experiencias similares (Ball y Bass, 2003), las cuales le permitan reflexionar sobre su propio proceso de aprendizaje y así poder entender cómo aprenden sus estudiantes.

Teselaciones del plano con polígonos regulares. De acuerdo con algunos historiadores, la primera investigación matemática, históricamente documentada, sobre teselaciones se debe a Johannes Kepler en su libro *Harmonices Mundi* (1619, Libro II, proposición XVIII), en el que muestra que los únicos polígonos regulares con los que se puede teselar el plano son el triángulo, el cuadrado y el hexágono (Figura 4.44).

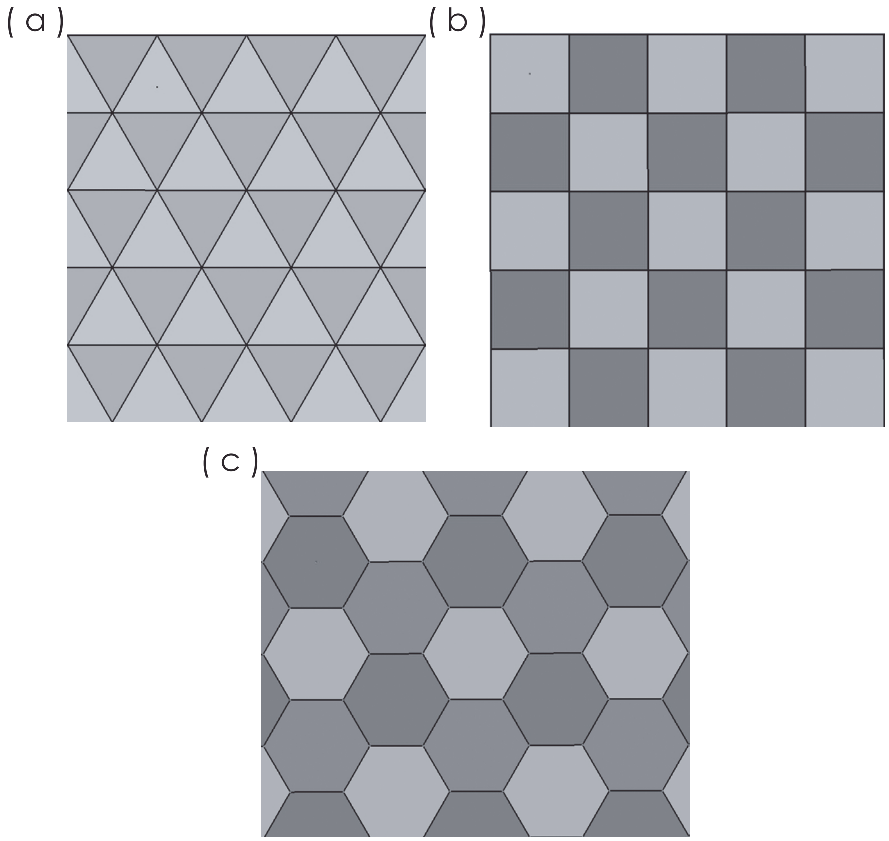


Figura 4.44. Teselaciones regulares con polígonos regulares.

Ejercicio: explique por qué no es posible teselar el plano con pentágonos regulares.

Dado un perímetro fijo, ¿cuál de los tres polígonos regulares que teselan el plano y tiene ese perímetro abarca la mayor área? A partir de algunos cálculos algebraicos se puede concluir que el hexágono es el polígono regular que abarca la mayor área (realice los cálculos). ¿El resultado anterior tiene alguna relación con la forma de los panales que construyen las abejas? (Figura 4.45). Se considera que esto es así: las abejas construyen celdas hexagonales porque, dado un perímetro fijo, el hexágono es la figura que deja un mayor espacio para la colocación de la miel. Papus de Alejandría fue un matemático que se interesó por este problema y demostró que entre los polígonos regulares que poseen el mismo perímetro se logra encerrar más área en aquéllos con mayor número de lados. Entonces, al construir las celdas de forma hexagonal, con la misma cantidad de cera, logran una mayor superficie que si construyeran celdas cuadradas o triangulares (Academia de Ciencias de Morelos, 2008).

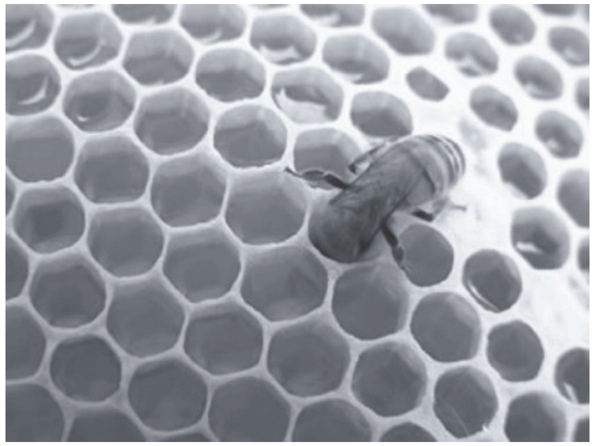


Figura 4.45. Celdas hexagonales de un panal.

Las teselaciones con polígonos regulares no son las únicas teselaciones posibles a partir de una sola tesela. Si se elimina la restricción de que las teselas sean polígonos regulares, sin mucho esfuerzo, uno puede darse cuenta de que es posible teselar el plano utilizando rectángulos o paralelogramos. ¿Por qué es posible teselar el plano con cualquier paralelogramo?

¿Qué polígonos teselan el plano? Se ha demostrado que ningún polígono convexo[4] de más de seis lados tesela el plano (Gardner, 1988; Schattschneider, 2007), por lo que sólo resta investigar la pregunta para los polígonos de 3, 4, 5 y 6 lados. Se puede demostrar que cualquier triángulo y cuadrilátero, incluso cuadriláteros cóncavos, teselan el plano (Sugimoto y Ogawa, 2006). El caso del hexágono lo resolvió en 1981 K. Reinhardt en su tesis doctoral elaborada en la universidad de Frankfurt (Gardner, 1988: 165).

Ejercicio: explique por qué es posible teselar el plano con cualquier triángulo

Ejercicio: explique por qué es posible teselar el plano con cualquier cuadrilátero convexo.

La *teselación dual* de una teselación dada es aquélla que se forma conectando los centros de los polígonos que rodean a cada vértice. ¿Cuáles son los duales de las teselaciones con polígonos regulares? Si ahora se permite usar más de un polígono regular para teselar el plano, ¿cuántas posibles teselaciones diferentes se pueden formar? Explore esta pregunta utilizando el manipulativo virtual que puede encontrar en la dirección electrónica http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_163_g_1_t_3.html?open=activities, yfrom=topic_t_3.html

4 Un polígono convexo es un polígono que no tiene ángulos mayores de 180°.

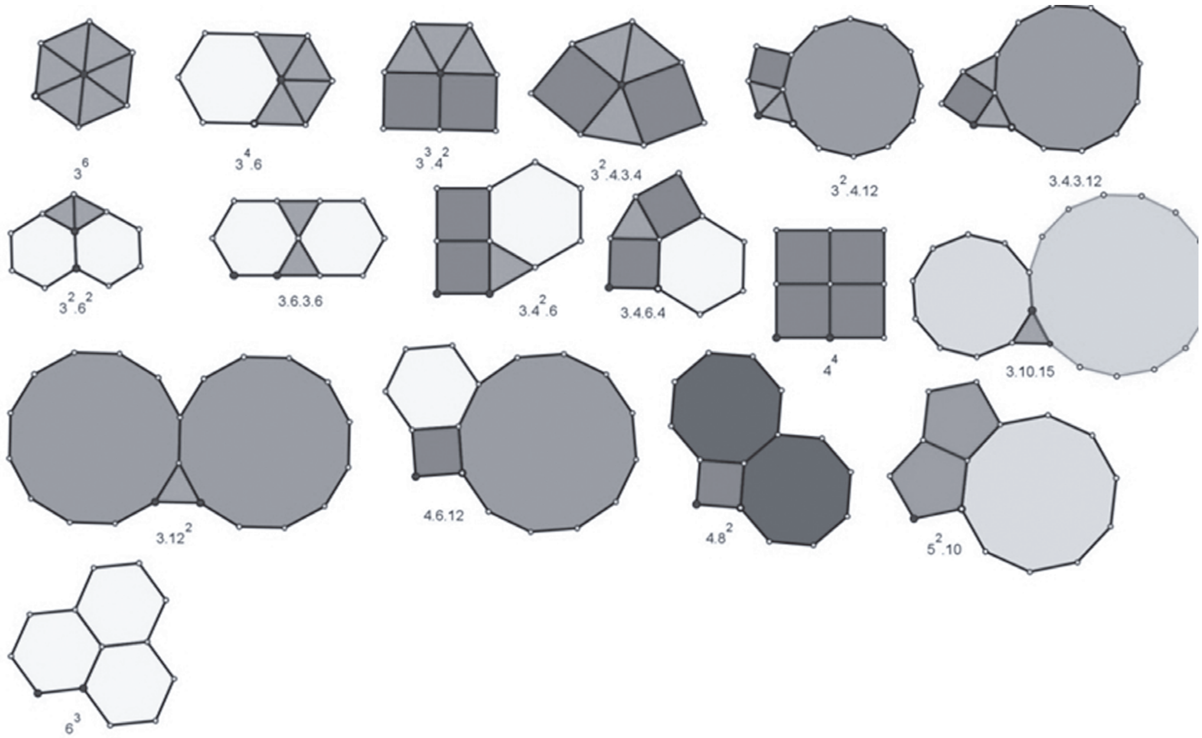


Figura 4.46. Posibles formas de colocar polígonos regulares alrededor de un vértice (parte 1).

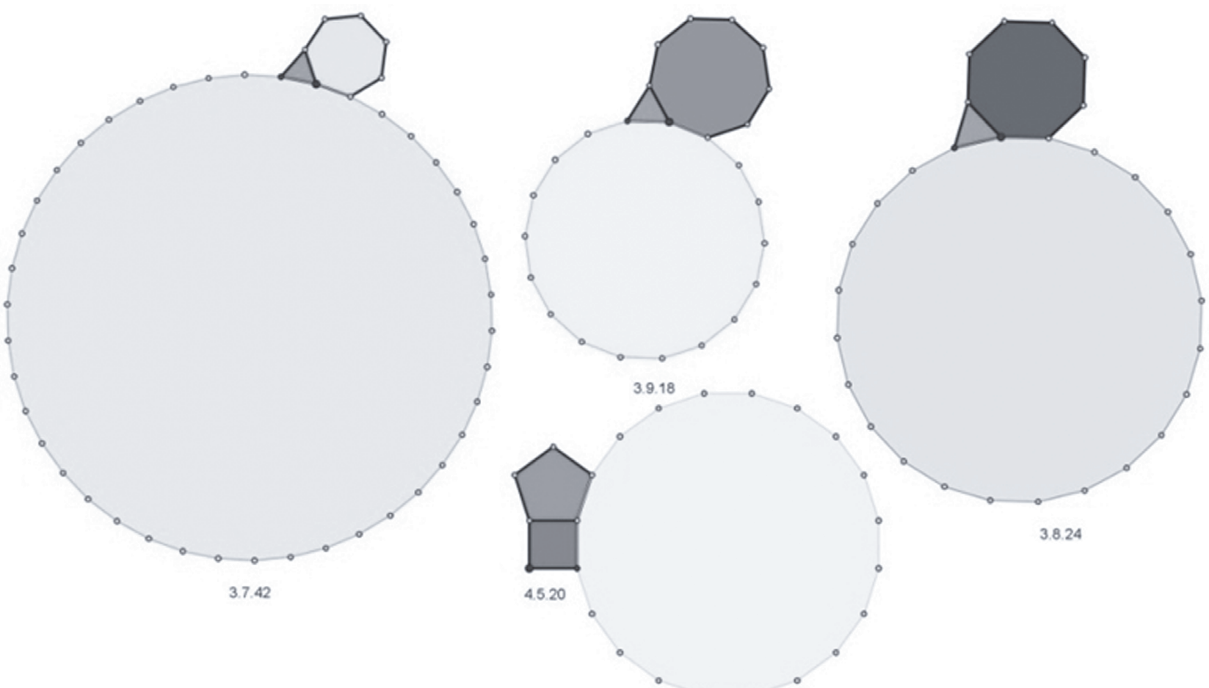


Figura 4.47. Posibles formas de colocar polígonos regulares alrededor de un vértice (parte 2).

Se dice que una teselación es semirregular si está formada por distintos tipos de polígonos, pero en cada vértice inciden los mismos polígonos, en el mismo número y en la misma disposición. Se puede verificar que existen 21 formas de colocar polígonos regulares alrededor de un vértice (Ling, 2004: 19-20), tres de las cuales corresponden a las teselaciones regulares (Figuras 4.46 y 4.47). Sin embargo, sólo es posible extender 8 de estas configuraciones (además de las teselaciones regulares) de forma que cubran el plano. Las 8 teselaciones semirregulares corresponden a las disposiciones: *a)* 4.8^2, *b)* $3^2.4.3.4$, *c)* 3.6.3.6, *d)* $3^4.6$, *e)* 4.6.12.6, *f)* 3.4.6.4, *g)* 3.12.12 y *h)* $3^3.4^2$.

Como en el caso regular, puede obtenerse de cada teselación su dual. Por ejemplo, si se obtiene el dual de la configuración $3^2.4.3.4$ se obtiene una teselación con pentágonos; sin embargo, los pentágonos no son regulares ni la teselación es regular, ya que en algunos vértices inciden tres pentágonos y en otros vértices inciden cuatro (Figura 4.48).

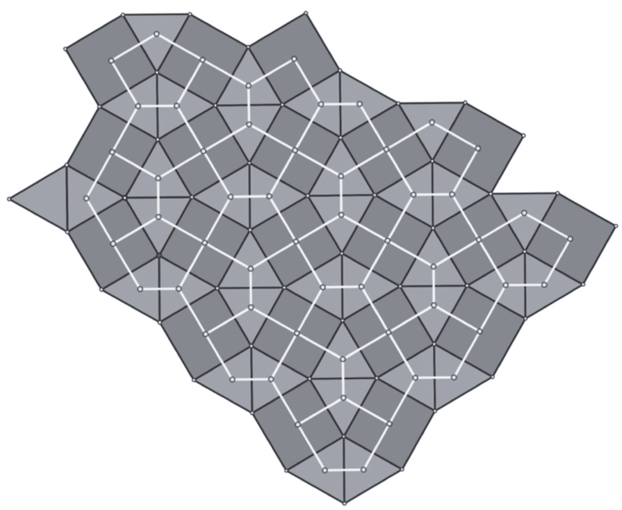


Figura 4.48: Teselación $3^2.4.3.4$ y su dual.

El problema de caracterizar a todos los pentágonos convexos que teselan el plano es un problema aún no resuelto (Schattschneider, 2007; Sugimoto y Ogawa, 2000).

Capítulo V
Evaluación del aprendizaje

La evaluación constituye un elemento fundamental en el proceso educativo, ya que es un medio para favorecer el aprendizaje de los estudiantes (NCTM, 2000). Las tareas, actividades o problemas utilizados en la evaluación pueden transmitir un mensaje a los estudiantes acerca de los conocimientos y habilidades que el profesor considera relevantes y, en consecuencia, afectar el nivel de esfuerzo, el tiempo y las acciones que dediquen al estudio de un tema o materia. Es importante que en el proceso de evaluación se utilicen actividades similares a las empleadas durante el proceso de instrucción, mediante las cuales se pueda determinar el nivel en que los estudiantes desarrollaron procesos relevantes del pensamiento matemático. Para llevar a cabo la evaluación resulta importante el uso de técnicas tales como observación, entrevistas o conversaciones con los estudiantes mediante las cuales se favorezca la interacción personal entre los estudiantes y el profesor, para que éste tenga oportunidad de conocer la forma en que los estudiantes llevan a cabo procesos fundamentales del pensamiento matemático, entre los que se encuentra el razonamiento, la organización de información, la implementación de procedimientos rutinarios o algorítmicos, la resolución de problemas o la formulación de problemas nuevos, entre otros.

Para determinar qué es lo que ha comprendido un estudiante es preciso entender profundamente el material que se va a enseñar (matemáticas) y los procesos de aprendizaje (epistemología). Esta comprensión deberá estar directamente relacionada con los conceptos específicos que se enseñan (Shulman, 1987). Así, es importante hacer una distinción entre calificación y evaluación. Calificar consiste en asignar un número, cantidad o letra que se considera una medida de cuánto ha aprendido un estudiante, mientras que evaluar implica analizar el desempeño y los avances de un estudiante, reflexionar sobre este desempeño e interpretarlo en función de los factores o variables que pudieron haber incidido en el desarrollo intelectual del estudiante. La evaluación es fundamentalmente un acto de reflexión que permite al profesor ofrecer recomendaciones y sugerencias a los estudiantes. Por otra parte, la evaluación también puede apoyar el análisis de la propia práctica docente del profesor.

La evaluación, más que las tareas o métodos utilizados para recolectar información acerca de los estudiantes, consiste en elaborar inferencias sobre su nivel de aprendizaje, tomar decisiones e implementar acciones didácticas con base en esa información. El foco de la evaluación puede ser obtener una instantánea del desempeño de los estudiantes en un momento determinado (evaluación sumativa), pero también puede ser utilizar la información obtenida y el proceso de reflexión con el objetivo de modificar las aproximaciones de enseñanza (evaluación formativa) [Callingham, 2010]. Algunas de las herramientas que pueden ser de utilidad durante el proceso de recolección de información para llevar a cabo la evaluación son las guías de desempeño, rúbricas, bitácoras, portafolios de evidencia o la grabación (en audio o video) de las discusiones realizadas por los estudiantes durante las clases o sesiones de trabajo.

Para asegurar que el aprendizaje de los estudiantes favorezca el desarrollo del pensamiento matemático, la instrucción y la evaluación deben integrarse de tal forma que esta última sea un componente integral de las actividades de la clase. Cuando se dispone de información útil acerca de los avances en el aprendizaje de los estudiantes, se tienen mejores condiciones para establecer objetivos o metas de instrucción fundamentadas. Además, las decisiones didácticas que lleve a cabo el profesor (cuándo abordar determinado concepto o qué tipo de tareas resultan apropiadas para promover el aprendizaje de los estudiantes) estarán basadas en lo que conocen los estudiantes y en aquello que necesitan aprender (NCTM, 2000).

5.1. Actividades realizadas por el profesor durante la evaluación

El proceso de evaluación puede requerir que el profesor lleve a cabo diversos tipos de actividades, las cuales van desde la toma de notas a partir de observaciones realizadas durante el transcurso de la clase hasta entrevistas en las que los estudiantes proporcionen una opinión libre sobre algún tema o resuelven problemas. Como un elemento central de estas actividades, el profesor debe proporcionar retroalimentación, consejos y recomendaciones para la mejora del desempeño de los estudiantes. Algunos autores clasifican a las actividades que se llevan a cabo con fines de evaluación en formales e informales (Clarke, 1992); otros denominan a las actividades formales actividades *organizadas* (Ginsburg, 2009). Entre las actividades formales (u organizadas) se incluyen aquéllas en las que se detiene o interrumpe el proceso de instrucción para todo el grupo mientras se lleva a cabo la actividad de evaluación. Las actividades informales son aquéllas que se llevan a cabo de forma paralela al proceso de instrucción, por ejemplo, cuando el profesor pregunta de forma espontánea al estudiante acerca de las razones de utilizar un procedimiento o dar una respuesta.

Función de las actividades informales de evaluación. De acuerdo con Clarke, Clarke y Lovitt (1990), las actividades informales de evaluación, principalmente las observaciones que el profesor realiza directamente durante la clase, ofrecen información valiosa que puede emplearse para sustentar las actividades formales de evaluación tales como las pruebas escritas o las entrevistas con los estudiantes. Una característica de las actividades informales es que no se llevan a cabo de forma estructurada y la información que se obtiene a partir de ellas no se registra de forma sistemática. Algunas de las actividades, formales e informales, que el profesor puede utilizar con motivos de evaluación son (Grimison, 1992):

Observación del trabajo de los estudiantes durante la clase. Se lleva a cabo durante las tareas de resolución de problemas. Este tipo de actividad puede proporcionar información valiosa relativa a las habilidades de los estudiantes, acerca de sus formas de razonamiento, actitudes y creencias. Se puede complementar la información de esta actividad mediante la realización de preguntas por parte del profesor que permitan clarificar las formas en cómo los estudiantes piensan o razonan. El registro de estas observaciones se puede llevar a cabo mediante la escritura de notas de campo al final de cada una de las clases.

Registro de eventos relevantes. Consiste en que el profesor tome notas en las que identifique situaciones significativas ocurridas durante la clase. Se puede tener una lista de habilidades, comportamientos o actitudes que se desea promover en los estudiantes y registrar aquellas ocasiones en que las actividades de instrucción favorecieron el desarrollo de esas habilidades o actitudes. Las rúbricas o listas de cotejo son herramientas que pueden ser útiles para llevar a cabo el registro de estos eventos relevantes.

Preguntas de exploración. Las preguntas formuladas durante la clase representan una de las mejores oportunidades para conocer si el estudiante está desarrollando un aprendizaje con entendimiento. Las preguntas además apoyarán a que el estudiante problematice su aprendizaje, al formularse a sí mismo preguntas similares a las planteadas por el profesor. Lo anterior favorecerá una actitud inquisitiva que a su vez promueva el aprendizaje independiente.

Entrevistas. Permiten analizar el grado de entendimiento del estudiante acerca de un concepto o idea matemática. Las entrevistas permiten determinar si el estudiante únicamente ha memorizado algoritmos o procedimientos o si ha desarrollado un entendimiento conceptual. Durante la entrevista, el profesor formula hipótesis e interpretaciones relativas al desempeño del estudiante o nivel de comprensión que ha alcanzado, a partir de analizar su actividad de resolución de problemas; además, tiene la oportunidad de realizar preguntas para obtener información que le permita sustentar o refutar esas hipótesis. Las entrevistas pueden llevarse a cabo de forma individual o en pequeños grupos. Esta última forma de trabajo tiene la ventaja de que los estudiantes pueden socializar diversos puntos de vista para abordar un problema o las estrategias para resolverlo.

Portafolios del trabajo de los estudiantes. Consiste en una colección representativa del trabajo llevado a cabo por cada uno de los estudiantes. Es importante que el tipo de materiales que se colecten en el portafolio incluyan los sugeridos por el profesor y por los estudiantes.

Bitácora. Es un registro escrito, que se lleva periódicamente, de las ideas o impresiones de los estudiantes respecto de una actividad o de sus avances en el aprendizaje de un tema o concepto; se realiza una vez finalizada la actividad y permite deasollar una actividad reflexiva.

Revistas. Material elaborado a partir de artículos escritos por los estudiantes de forma individual o en pequeños grupos. En cada uno de los artículos se busca capturar las reflexiones de los estudiantes después de haber llevado a cabo un proceso de investigación.

Actividades de descubrimiento e investigación matemática. Se propone un problema o actividad a los estudiantes en la que se les proporcionan oportunidades para poner en práctica sus habilidades de resolución de problemas. Los estudiantes tienen que identificar patrones, formular conjeturas, proporcionar justificaciones, proponer modelos, etcétera. Este tipo de actividades puede llevarse a cabo de forma individual o en pequeños grupos; su duranción puede ser de una o varias sesiones de clase.

Pruebas de desempeño. Se propone una tarea no rutinaria al estudiante, la cual puede completarse en una o dos horas. Se puede videograbar la actividad que desarrolla el estudiante con la finalidad de identificar aspectos relevantes de su labor matemática.

Autoevaluación. Consiste en una entrevista en la que el estudiante explica al profesor cuáles considera que son sus fortalezas y debilidades en cuando a conocimientos y habilidades que se consideran relevantes en el salón de clase.

5.2. Tipos de evaluación

En la literatura se hace una distinción entre diferentes tipos de evaluación. Comúnmente se habla de evaluación para el aprendizaje, evaluación como aprendizaje y evaluación del aprendizaje (Callingham, 2010).

Evaluación para el aprendizaje. Como parte de las actividades que lleva a cabo el profesor durante el proceso de instrucción se encuentran la selección o diseño de tareas, la determinación de posibles rutas de aprendizaje y de niveles de entendimiento basados en las posibles actividades, justificaciones y argumentaciones que los estudiantes desarrollen al resolver los problemas o tareas. Otra actividad de suma importancia consiste en el diseño de estrategias didácticas orientadas a incrementar niveles particulares de entendimiento alcanzados por los estudiantes. La evaluación para el aprendizaje se refiere a la reflexión que el profesor lleva a cabo para responder a la pregunta "¿qué debo hacer para incrementar el nivel de entendimiento de los estudiantes?"

Por ejemplo, durante el proceso de resolución de problemas, los estudiantes podrían cometer alguno de los errores que se observan en la siguiente tabla, cada uno de los cuales es reflejo de niveles bajos de entendimiento conceptual. ¿Qué tipo de intervención debería llevar a cabo el profesor para superar cada una de las dificultades mostradas por los estudiantes?

$\begin{array}{r} 123 \\ \times\, 645 \\ \hline 615 \\ 492 \\ 738 \\ \hline 1845 \end{array}$	$\frac{2}{3}+\frac{8}{5}=\frac{2+8}{3+5}=\frac{10}{8}$	$\frac{1-r^2}{1-r}=\frac{1-r\cdot r}{1-r}=r$
(a)	(b)	(c)

Evaluación como aprendizaje. Este tipo de evaluación generalmente involucra momentos en que el profesor se da cuenta de la existencia de oportunidades de enseñanza e implementa las acciones didácticas pertinentes. Por ejemplo, si un profesor se percata de que un estudiante, durante la resolución de un problema, comete el error que se muestra en el recuadro (b) de la tabla anterior, puede sugerir que el estudiante estime el resultado de la operación y que compare éste con el resultado obtenido de aplicar el proceso algorítmico. El primer sumando (2/3) es mayor que un medio, mientras que el segundo sumando (8/5) es mayor que uno; en consecuencia, el resultado deberá ser mayor que un entero y un medio, pero el resultado obtenido (10/8) es equivalente a un entero y un cuarto, por lo que debe haber algo erróneo en el procedimiento. Además, el profesor puede aprovechar la oportunidad para que los estudiantes determinen en qué casos, al efectuar una suma de fracciones con el procedimiento "incorrecto", es posible obtener un resultado correcto. En la situación anterior, el profesor realiza una evaluación del desempeño del estudiante y proporciona retroalimentación de forma que el estudiante modifique sus acciones y pueda establecer relaciones significativas que se traduzcan en un incremento del nivel de entendimiento.

Evaluación del aprendizaje. Es la evaluación que tiene como objetivo determinar el nivel de entendimiento de los estudiantes, es decir, de lo que han aprendido. Este tipo de evaluación se basa en evidencias del trabajo desarrollado por los estudiantes, las cuales pueden ser materiales escritos, grabaciones en audio o video del trabajo de los estudiantes. Las evidencias utilizadas en este tipo de evaluación pueden tener dos funciones: *a)* sumativa, si se colectan al final de las actividades con el objetivo de obtener una instantánea del aprendizaje de los estudiantes en un momento dado, o *b)* formativa, si se obtiene durante el transcurso de la clase para fundamentar decisiones didácticas del profesor.

La evaluación del aprendizaje, desde una perspectiva de resolución de problemas, debe enfocarse en la identificación de procesos de razonamiento, comunicación y reflexión, por lo que el tipo de actividades utilizadas con fines de evaluación debe promover que los estudiantes lleven a cabo un aprendizaje con entendimiento, es decir, que las actividades permitan al estudiante establecer conexiones, crear, imaginar, conjeturar, buscar ejemplos o construir contraejemplos, justificar conjeturas, utilizar sus conocimientos previos, razonar y comunicar ideas. Para lograr lo anterior, el profesor deberá contar con un conocimiento matemático profundo para poder interpretar las acciones de los estudiantes en términos de operaciones o procesos importantes del pensamiento matemático. Contar con este conocimiento permitirá a un profesor entender las ideas fundamentales sobre el valor posicional de los números y las propiedades del sistema decimal que un estudiante utiliza, por ejemplo, al sumar mentalmente los números 23 y 46 sumando primero 20 + 40, en segundo lugar 3+6 y finalmente adicionando las sumas parciales para obtener como resultado 69 (Ginsburg, 2009).

De lo expuesto, se concluye que una mejora sustancial en el aprendizaje de los estudiantes requiere la incorporación de diversos elementos de evaluación con la finalidad de mejorar el entendimiento matemático. Para que esto se dé en el aula, es necesario que los profesores de matemáticas se conviertan en verdaderos profesionales de la enseñanza, lo cual implica que dispongan de mejores condiciones para desarrollar sus actividades docentes.

Epílogo

Con base en la información de las pruebas estandarizadas mostrada en el primer capítulo se identificaron diversas deficiencias en la formación matemática que reciben los estudiantes de nuestro país. Esta problemática no tiene un origen único, sino que representa un problema multifactorial en el que se incluyen aspectos tales como la formación inicial de los profesores, las condiciones socioeconómicas en las que laboran los docentes o los programas de estudio que privilegian la memorización de contenidos más que el desarrollo de actividades y procesos centrales del pensamiento matemático, entre las que se encuentra la capacidad o habilidad para razonar, justificar y comunicar ideas.

La cultura escolar predominante en México tiene como objetivo aprender para aprobar los exámenes y enseñar para que los estudiantes obtengan buenos resultados en pruebas estandarizadas como PISA o ENLACE. Sin embargo, habría que reflexionar si este objetivo de la educación en general, y de la educación matemática en particular, en nuestro país, es apropiado para lograr que los estudiantes adquieran una formación que les permita enfrentar los retos de la vida social, laboral y escolar, y desenvolverse como ciudadanos críticos y reflexivos en una sociedad del conocimiento. Nuestra posición es que los resultados de pruebas escritas no son suficientes, e incluso ni siquiera necesarios, para determinar si los estudiantes son capaces de llevar a cabo procesos de pensamiento relevantes, y tampoco son apropiados como indicadores del desempeño de los profesores. En el ámbito laboral es importante contar con habilidades para investigar, reflexionar, razonar y justificar, así como fluidez para comunicarse de forma oral y escrita, más que poseer trozos de información disciplinar.

Consideramos que una mejora en la educación matemática de los estudiantes no puede lograrse a través de soluciones simplistas —como las enfocadas únicamente en los cambios curriculares, que en muchos casos ni siquiera están fundamentados—; por el contrario, consideramos de gran importancia centrar la atención en la formación y actualización del profesorado en su conjunto. También se requieren cambios estructurales que incluyen modificar incluso la forma de concebir las matemáticas y el aprendizaje de la disciplina. La enseñanza es una tarea compleja, dado que es un proceso de interacción entre seres humanos y, por tal motivo, requiere que sea llevada a cabo por profesionales que cuenten con un conjunto sólido y profundo de conocimientos matemáticos, epistemológicos y didácticos.

En el salón de clase, el profesor se enfrenta a una gran diversidad de formas de ser, formas de aprender, formas de concebir a las matemáticas y su aprendizaje, por lo que su formación debe ser amplia e incluir un entendimiento profundo del contenido discilinar, el estudio de diversas perspectivas teóricas que le permitan entender cómo aprenden sus estudiantes y las formas en que puede actuar para abordar esos problemas de aprendizaje. Como consecuencia de la complejidad del salón de clase se puede concluir que un único modelo didáctico no es suficiente para abarcar o dar respuesta a todas las problemáticas de aprendizaje de una disciplina y, mucho menos, a las problemáticas educativas en general.

Un primer paso para abordar el problema del aprendizaje de las matemáticas consiste en atender la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas y el desarrollo profesional de quienes se encuentran en servicio. Se debe poner especial atención a la profesionalización de los profesores de nivel básico, ya que ahí se localiza un periodo crucial para el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Si al terminar la educación básica un estudiante no está interesado por las ciencias será muy difícil que se forme como profesional de física, matemáticas o ingeniería. También se debe poner particular atención en el desarrollo profesional de los profesores que imparten cursos en bachillerato o en licenciatura, ya que al no existir programas de formación específicos, la mayor parte de lo que conocen acerca de la enseñanza proviene de sus experiencias como estudiantes.

Este proceso de profesionalización de los docentes debe ir acompañado de una dignificación de sus condiciones de trabajo, las cuales incluyen salarios justos, así como instalaciones y equipos apropiados que les permitan aprovechar los avances tecnológicos más recientes para favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Asimismo, es importante atender las necesidades económicas de muchos estudiantes quienes, más por motivos económicos y no por falta de entusiasmo o capacidad, se ven en la necesidad de abandonar sus estudios.

Los cambios curriculades son importantes, pero sostenemos que deben orientarse a promover el desarrollo de procesos tales como la comunicación, la reflexión y el razonamiento, más que la memorización de contenidos desarticulados entre sí. Los profesores deben ser promotores y actores activos del cambio curricular, ya que son ellos quienes enfrentan la problemática diaria del aprendizaje de las matemáticas en los salones de clase, y no únicamente implementadores de decisiones verticales. En relación con lo anterior, se ha expuesto que la resolución de problemas, la teoría de las representaciones y la teoría de modelos y modelado son algunas de las aproximaciones teóricas que pueden orientar y fundamentar un currículo con las características mencionadas y se han ofrecido ejemplos de actividades útiles en el desarrollo de una forma matemática de pensar.

Finalmente, la evaluación es más que la emisión de una calificación. La evaluación es esencialmente un proceso de compresión y de reflexión acerca del pensamiento de los estudiantes, cuya finalidad consiste en apoyar la construcción de conocimiento, y que permite a los profesores reflexionar sobre la efectividad de su práctica docente y aprender de los estudiantes. El profesor es un aprendiz durante toda la vida, una persona que encuentra satisfacción en compartir lo que ha aprendido y es capaz de darse cuenta de que hay muchas cosas que aún no sabe. Al mismo tiempo, es un arquitecto de cuyas decisiones, sobre todo en los procesos de evaluación y emisión de resultados que reportan el "aprovechamiento", depende el futuro de sus estudiantes.

El profesor debe desarrollar un alto sentido de sensibilidad al evaluar, por lo menos el mismo que reclama cuando levanta la voz para manifestarse cuando él es evaluado.

Bibliografía

Academia de Ciencias de Morelos, *Matemáticas para todos*, México, Autor, julio de 2008. Recuperado de http://www.acmor.org.mx/descargas/matejulio2008.pdf el 24 de noviembre de 2009.

Adler, Jill, Ball, Deborah, Krainer, Konrad, Lin, Fou-Lai, y Novotna, Jarmila, "Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education" en *Educational Studies in Mathematics*, v. 60, 2005, pp. 359-381.

Alianza por la Calidad de la Educación entre el Gobierno Federal y el SNTE. México. Recuperado de: http://alianza.sep.gob.mx/

Andión Gamboa, Mauricio, "Génesis, desarrollo y perspectivas del normalismo preescolar en México". *Reencuentro*, v. 61, 2011, pp. 34-45.

Arcavi, Abraham, "Problem-driven research in mathematics education" en *Journal of Mathematical Behavior*, v. 19, 2000, pp. 141-173.

Arcavi, Abraham, y Hadas, Nurit, "Computer mediated learning: An example of an approach" en*ternational Journal of Computers for Mathematical Learning,* v. *5*, 2000, pp. 25-45.

Avilés, Karina, "Con niveles insuficiente y elemental, 78.8 de alumnos de enseñanza básica" en *La Jornada*, 24 agosto 2007. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2007/08/24/ index.php?section=sociedad, yarticle=052n1soc, el 8 de octubre de 2012.

Avilés, Karina, "Insuficiente nivel en matemáticas de 84.4% de estudiantes de prepa" en *La Jornada*, 21 agosto 2008. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2008/08/21/index.php?section=sociedad, yarticle=044n1soc, el 8 de octubre de 2012.

Avilés, Karina, "En los dos niveles más bajos de matemáticas, 81.2% de los alumnos de Bachillerato" en *La Jornada*, 8 septiembre 2009, p. 41.

Avilés, Karina, "En niveles insuficiente y elemental 75.5% de los alumnos: Enlace" en *La Jornada*, 30 agosto 2012, p. 42.

Avilés, Karina, "Maestros deberán tomar cursos ahora y hasta 2015" en *La Jornada*, 23 de octubre de 2012, p. 36.

Avilés, Karina, "Con Felipe Calderón se redujo la matrícula en las normales" en *La Jornada*, 2 de enero de 2013, p. 29.

Ball, Deborah, Thames, Mark, y Phelps, Geoffrey, "Content knowledge for teaching: What makes it special?" en *Journal of Teacher Education,* v. *59*, 2008, pp. 389-407.

Ball, Deborah, "Halves, pieces and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions" en Carpenter, Thomas, Fennema, Elizabeth, y Romberg, Thomas, editores, *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, Lawrence Erlbaum, 1993, pp. 157-195.

Ball, Deborah, y Bass, Hyman, "Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics" en Boaler, Jo, editor, *Multiples perspectives on the teaching and learning of mathematics*, Wesport, Ablex, 2000, pp. 83-104.

Ball, Deborah, y Bass, Hyman, "Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching" en Davis, Brent, y Simmt, Elaine, editores, *Proceedings of* *the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Edmonton, CMESG/GCEDM, 2003, pp. 3-14.

Barrera Mora, Fernando, "Bases Teóricas y Conceptuales en la Construcción del Conocimiento Matemático y el Empleo de Herramientas Digitales". Primer Reporte Proyecto de Investigación. Registro CONACYT No. 61996. 2008.

Barrera Mora, Fernando, "El aprovechamiento de los estudiantes y su relación con los conocimientos de los profesores" en *El Independiente de Hidalgo*, 9 diciembre de 2009.

Barrera mora, Fernando, "Reporte de la segunda fase del proyecto: Bases teóricas y conceptuales en la construcción del conocimiento matemático y el empleo de herramientas digitales" enforme del proyecto financiado por CONACYT con número de referencia 61996, Pachuca, UAEH, 2009.

Barrera mora, Fernando, y Reyes Rodríguez, Aarón, *Curso: Pensamiento Matemático, Resolución de Problemas y Formación Docente*, Pachuca, Centro Universitario de Formación (UAEH), 2010.

Barrera Mora, Fernando y Reyes Rodríguez, Aarón. "Formulating mathematical conjectures in learning activities, assisted with technology" en Santos, Manuel, y Shimizu, Yoshinori, editores, *Research and development in problem solving in mathematics education. Topic Study Group 19: ICME-11*, Monterrey, México, 2008. Recuperado de http://tsg.icme11.org/document/get/455, el 10 de enero de 2012.

Barrera Mora, Fernando, y Santos Trigo, Manuel, "Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos" en Ministerio de Educación Nacional, Dirección de Calidad de la Educación Preescolar, Básica y Media, editor, *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, Bogotá, Ministerio de Educación Nacional, 2001, pp. 166-185.

Barton, B., y Sheryn, L., "The mathematical needs of secondary teachers: data from three countries" en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 40, 2009, pp. 101-108.

Batanero, Carmen, *Didáctica de la estadística*, Granada, Universidad de Granada, 2001.

Bayazit, Ibrahim, "Task selection and task implementation: seven constraints affecting the teacher's instruction" en Hewitt, D., editor, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, United Kingdom, Autor, 2006, v. 26, pp. 23-28.

Beaton, Albert, Mullis, Ina, Martin, Michael, Gonzalez, Eugenio, Kelly, Dana, y Smith, Teresa, *Mathematics achievement in the middle school years: IES's third international mathematics and science study (TIMSS)*, Massachusetts, TIMSS International Study Center-Boston College, 1996.

Bergqvist, Ewa, "Type of reasoning required in university exams in mathematics" en *Journal of Mathematical Behavior*, v. 26, 2007, pp. 384-370.

Boaler, Jo., Ball, Deborah, y Even, Ruhama, "Preparing mathematics education researchers for disciplined inquiry: Learning from, in, and for practice" en Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Leung, F.K.S., editores, *Second international handbook of mathematics education*, Dordrecht, Kluwer Academic, 2003, pp. 491-521.

Borwein, Jonathan, y Bailey, David, *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, Massachusetts, AK Peters, 2003.

Brown, Stephen, y Walter, Marion, *The Art of Problem Posing* (3rd Ed.), New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 2005.

Burghes, David, *International Comparative Study in Mathematics Teacher Training* (CfBT), United Kingdom, Education Trust, 2008.

Callingham, Rosemary, "Mathematics assessment in primary classrooms: Making it count" en Glascodine, C., y Hoads, K.-A., editores, *Teaching Mathematics? Make it count. What research tell us about effective teaching and learning of mathematics. Proceedings of the Australian Council for Educational Research Conference*. Melbourne, ACER, 2010, pp. 39-42.

Chartered Institute of Personnel and Development, *How do people learn?*, London, CIPD, 2002.

Clarke, David, Activating assessment alternatives in mathematics. *Arithmetic Teacher*, v. 39, 1992, pp. 24-29.

Clarke, David J., Clarke, Doug, y Lovitt, Charles, "Changes in mathematics teaching call for assessment alternatives" en Cooney, Thomas, y Hirsch, Christian, editores, *Teaching and learning mathematics in the 1990s*, Virginia, NCTM, 1990, pp. 118-129.

Connors, Edward, "A decline in Mathematics Threatens Science—And the U.S" en *The Scientist*, v. 2, 28 de noviembre de 1988, pp. 9-12.

Cortina, José Luis, "Las mediciones de la calidad del aprendizaje matemático en México: ¿Qué nos devela la prueba PISA 2003 y cómo podemos responder?" en *Educación Matemática,* v. *18*, 2006, pp. 161-176.

Courant, Richard, y Robbins, Herbert, *¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales*, México, Fondo de Cultura Económica, 2006.

Davis, Brent, y Simmt, Elaine, "Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know" en *Educational Studies in Mathematics,* v. *61*, 2006, pp. 293-319.

Devlin, Keith, *The language of mathematics: Making the invisible visible*, New York, W. H. Freeman and Company, 2000.

Dick, Thomas, "Keeping the faith: Fidelity in technological tools for mathematics education" en Blume, G. W., y Heid, M. K., editores, *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, cases, and perspectives*. Connecticut, Information Age, 2007, v. 2, pp. 333-339.

Doerr, Helen, y Tripp, Joseph, "Understanding how students develop mathematical models" en *Mathematical Thinking and Learning*, v. 1, 1999, pp. 231-254.

Dubinsky, Ed, "De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal" en *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 3, 2000, pp. 47-70.

Duval, Raymond, "Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning" en Hitt, Fernando, y Santos Trigo, Manuel, editores, *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, México, PME, 1999, v. 1, pp. 3-26.

Edwards, Harold, *Fermat's Last Theorem: A Generic Introduction to Algebraic Number Theory*; New York, Springer-Verlag, 1977.

Edwards, C. H., Jr., *The historical development of the calculus*. New York, Springer, 1979.

ESM Editors, "Reflection on Educational Studies in Mathematics. The rise of reseach in mathematics education" en *Educational Studies in Mathematics,* v. *50*, 2002, pp. 251-257.

Falcade, Rossana, Laborde, Colette, y Mariotti, Maria Alessandra, "Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation" en *Educational Studies in Mathematics,* v. 66, 2007, pp. 317-333.

Fernández-Vega, Carlos, "México SA" en *La Jornada*, 26 agosto, 2009. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2009/08/26/index.php?section=opinion, yarticle=028o1eco, el 18 de junio de 2010.

Fey, James, "Quantity" en Steen, Lynn Arthur, editor, *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*, Washington, National Academic Press, 1990, pp. 61-94.

Fuys, David, Geddes, Dorothy, yTischler, Rosamond, "The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents" en *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, no. 3, Reston, National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

Gardner, Martin, *Time, travel and other mathematical bewilderments*, New York, W. H. Freeman and Company, 1988.

Gardner, Howard, *The unschooled mind: How children think and how schools should teach*, New York, Basic Books, 2011.

Ginsburg, Herbert, "The challenge of formative assessment in mathematics education: Children's minds, teachers' mind" en *Human Development,* v. *52*, 2009, pp. 109-128.

Goldin, Gerald, "Representation in mathematical learning and problem solving" en English, Lyn, editor, *Handbook of international research in mathematics education*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 2002, pp. 197-218.

Goldin, Gerald, "Representations in school mathematics: A unifying research perspective" en Kilpatrick, Jeremy, Martin, W. G., y Schifter, D., editores, *A research companion to principles and standards for school mathematics*, Virginia, NCTM, 2003, pp. 275-285.

Goldin, Gerald, y Kaput, James, "A joint perspective on the idea of representation in learning and oing mathematics" en Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, Paul, Gerald, Goldin, y Greer, B., editores, *Theories of mathematical learning*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1996, pp. 397-430.

Goldin, Gerald, y Shteingold, Nina, "Systems of representations and the development of mathematical concepts" en Cuoco, A. A., y Curcio, F. R., editores, *The roles of representation in school mathematics, 2001 Yearbook*, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 2001, pp. 1-23.

Greeno, J. G., Collins, A., M., y Resnick, L. B. (1996), "Cognition and learning" en Berliner, D. C., y Calfee R. C., editores, *Handbook of educational psychology*, New York, Macmillan, 1996, pp. 15-46.

Grimison, Lindsay, "Assessment in Mathematics – Some Alternatives" en *Proceeding of the 15th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of*

Australasia, Australia, University of Western Sydney, 1992, pp. 305-312.

Guin, Dominique, y Trouche, Luc, "The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators" en *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 3, 1999, pp. 195-227.

Hadamard, Jacques, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, New York, Dover, 1954.

Halmos, Paul, "The heart of mathematics" en *The American Mathematical Monthly*, v. 87, 1980, pp. 519-524.

Harel, Guershon, "On teacher education programmes in mathematics" en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* v. 2, 1994, pp. 113-119.

Harel, Guershon, y Lim, Kien. "Mathematics teachers' knowledge base: Preliminary results" en Hoines, M. J., y Fuglestad, A. B., editores, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norway, PME, 2004, v. 3, pp. 25-32.

Hart, Lynn, Schultz, K., Najee-ullah, D., y Nash, L. "Implementing the Professional Standards for Teaching Mathematics: The role of reflection in teaching" en *Arithmetic Teacher*, v. 40, 1992, pp. 40-42.

Heid, M. Kathleen, Middleton, James, Larson, Matthew, Gutstein, Eric, Fey, James, King, Karen, Strutchens, Marilyn, y Tunis, Harry, "The challenge of linking research and practice" en *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 37, 2006, pp. 76-86.

Henningsen, Marjorie, y Stein, Mary Kay, "Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning" en *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 28, 1997, pp. 524-549.

Hernández Morales, Pedro, "En defensa del normalismo" en *La Jornada*, 24 de septiembre de 2011. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2011/09/24/opinion/017a2pol, el 23 de noviembre de 2012.

Hidalgo, L., *Mosaicos*, México, UNAM, 2007.

Hiebert, James, Carpenter, Thomas, Fennema, Elizabeth, Fuson, Karen, Wearne, Diana, Murray, Hanlie, Olivier, Alwyn, y Human, Piet, *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding*, New Hampshire, Heinemann. 1997.

Hitt, Fernando, *Funciones en Contexto*, México, Pearson Education, 2002.

Hitt, Fernando, Barrera Mora, Fernando, y Camacho Machín, Matías, "Mathematical thinking, conceptual frameworks: a review for structures for analyzing problem solving protocols" en *Far East Journal of Mathematical Education*, v. 4, 2010, pp. 93-115.

Hui, Ming-Fai, y Grossman, David, "Introduction: teacher educators conducting action research in the era of accountability" en Hui, Ming-Fai, y Grossman, David, editores, *Improving Teacher Education trough Action Research*, New York, Routledge, 2008, pp. 1-8.

Imaz-Jahnke, Carlos y Santos-Trigo, Manuel, "Algo sí puede evaluarse con la prueba Enlace" en *La Jornada*, 8 de mayo de 2010. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2010/05/08/opinion/015a2pol, el 23 de octubre de 2012.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, *PISA 2006 en México*, México, INEE, 2007.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, *El aprendizaje en tercero de secundaria en México. Informe sobre los resultados de Excale 09, aplicación 2008: español, matemáticas, biología y formación cívica y ética*, México, INEE, 2009.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, *México en PISA 2009*. México, INEE, 2010.

Kaput, James, "The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience" en Biehler, R., Scholz, R. W., Strässer, R., y Winkelman, B., editores, *Didactic of mathematics as a scientific discipline*, The Netherlands, Kluwer Academic, 1994.

Kline, Morris, *El fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?*, México, Siglo XXI, 2007.

Kovacs, Karen, "La planeación educative en México: la Universidad Pedagógica Nacional (UPN)" en *Estudios Sociológicos*, v. 1, 1983, pp. 263-291.

Lamon, Susan, *Teaching fractions and ratios for understanding*, New Jersey, Lawrence Erlbaum, 2006.

Lamon, Susan, "Rational numbers and proportional reasoning" en Lester, Frank, editor, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, Macmillan, 2007, pp. 629-667.

Latapí, Pablo, *¿Cómo aprenden los maestros? Cuadernos de discusión* 6, México, Secretaría de Educación Pública, 2003.

Lesh, Richard, Behr, Merlyn, y Post, Thomas, "Rational number relations and proportions" en Janvier, C., editor, *Problem of representations in the teaching and learning mathematics*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1987, pp. 41-58.

Lesh, Richard, y Doerr, Hellen, *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 2003.

Lesh, Richard, y Yoon, Caroline, "Evolving communities of mind –in which development involves several interacting and simultaneously developing strands" en *Mathematical thinking and learning*, v. 6, 2004, pp. 205-226.

Lesh, Richard, y Zawojewski, Judith, "Problem solving and modeling" en Lester, Frank K., Jr., editor, *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, North Carolina, Information Age Publishing, 2007, pp. 763-804.

Lester, Frank, "On the theoretical, conceptual, and philosophical foundation for research in mathematics education" en *ZDM*, v. 37, 2005, pp. 457-467.

Ling, Ng Lay, *Tilings and Patterns. Honorous Project*. Singapore, National University of Singapore, 2004.

Lluis Puebla, Emilio, "Resolución de problemas en el aprendizaje desde el punto de vista de un matemático" en Barrera, Fernando, Benítez, David, Reyes, Aarón, Santos, Manuel, y Sepúlveda, Armando, editores, *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*, México, UAEH, 2008, pp. 11-32.

Ma, Liping, *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*, New York, Routledge,

2010.
Malaty, George, "Mathematics teacher training in Finland" en Burghes, David, editor, *Series of international monographs on mathematics teaching worldwide. Monograph 2: Teacher training*, University of Exeter, Centre for Innovation in Mathematics Teaching. 2004, pp. 83-105.
Martín, Carmela, Velazquez, Francisco, Sanz, Ismael, Crespo, Jorge, Perales, Francisco, y Turrión, Jaime, *Capital humano y bienestar económico: la necesaria apuesta de España por la educación de calidad*, Madrid, JPM Graphic, 2000.
Martínez, Nurit, "Reprobados 70.1% de los aspirantes a maestros" en *El Universal*, 22 de julio de 2012, recuperado de http://www.eluniversal.com.mx/notas/860314.html el 23 de octubre de 2012.
Moreno, Luis, "Cognición, Mediación y Tecnología" en *Avance y Perspectiva*, v. 20, 2001, pp. 65-68.
Moreno, Luis, "Evolución y Tecnología. Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas" en *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, Colombia, Ministerio de Educación Nacional, 2002.
Moreno, Luis, "Instrumentos matemáticos computacionales" en Ministerio de Educación Nacional, editor, *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*, Colombia, Ministerio de Educación Nacional, 2002, pp. 81-86.
Moreno, Luis y Waldegg, Guillermina, "Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas" en *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*, Colombia, Ministerio de Educación Nacional, 2002.
Mullis, Ina, Martin, Michael, y Foy, Pierre, *TIMSS 2007 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trend in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*, Massachusetts, TIMSS, y PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College, 2008.
National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics*, Virginia, NCTM, 2000.
National Research Council, *Everybody Counts: A Report to the Nation on the Future of Mathematics Education*, Washington, National Academy Press, 1989.
Norris, Emma, *Solving the maths problem: international perspectives on mathematics education*, London, The Royal Society for the encouragement of Arts, Manufactures and Commerce, 2012.
OECD, *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do-Students Performance in Reading, Mathematics and Science* (Volume I), 2010.
Olivares Alonso, Emir, "Sin título, 40% de maestros de bachillerato público; emprenderá la SEP programas de formación docente" en *La Jornada*, 28 de enero de 2009. Recuperado de http://www.jornada.unam.mx/2009/01/28/index.php?section=sociedad, yarticle=045n1so, el 18 de junio de 2010.
Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico, *Informe PISA 2003: aprender para el mundo del mañana*, España, Santillana, 2004.
Pea, Roy, "Beyond amplification: Using the computers to reorganize mental functioning"

en *Educational Psychologist*, v. 20, 1985, pp. 167-182.
PEA, Roy, "Cognitive technologies for mathematics education" en Schoenfeld, Alan, editor, *Cognitive Science and Mathematics Education,*. New Jersey, Erlbaum, 1987, pp. 89-122.
PERKINS, D. N., y SIMMONS, Rebeca, "Patterns of misunderstanding: An integrative model for science, math, and programming" en *Review of Educational Research*, v. 58, 1998, pp. 303-326.
PIAGET, Jean, *Epistemología genética*, Buenos Aires, Solpu. 1977.
POINCARÉ, Henry, "Mathematical creation" en Newman, J. R., editor, *The World of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1956, v. 4, pp. 2041-2050.
POLLAK, Henry, "Cognitive science and mathematics education: A mathematician's perspective" en Schoenfeld, Alan, editor, *Cognitive science and mathematics education*, New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1987, pp. 253-264.
POLYA, George, *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem solving* (Combined Edition), New York, John Wiley & Sons, 1981.
POLYA, George, *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas, 2005.
POY, Laura, "Insuficiente, nivel de la mayoría en primaria y secundaria: SEP" en *La Jornada*, 2009, p. 30.
POY, Laura, "Creará UAM centro especializado ante bajos resultados de matemáticas" en *La Jornada*, 30 de diciembre de 2009, p. 25.
RABARDEL, Pierre, *Les Hommes et les Technologies*, Paris, Armand Colins, 1995.
RUIZ LÓPEZ, Natalia y BOSCH BETANCOR, José, "La educación matemática en España" en *Praxis Educativa*, v. 2, 2007, pp. 151-160.
RUTHVEN, Kenneth, "Constituting digital tools and materials as classroom resources: The example of dynamic geometry" en Gueudet, G; Pepin, B., y Trouche, Luc, editores, *From text to 'lived resources': Mathematics curriculum materials and teacher development*, Dordrecht, Springer, 2012, pp. 83-104.
SAHLBERG, Pasi, *The secret to Finland's success: educating teachers*, 2010. Recuperado de http://edpolicy.stanford.edu/sites/default/files/publications/secret-finland%E2%80%99s-success-educating-teachers.pdf, el 2 de enero de 2013.
SANTALÓ, Marcelo, y CARBONELL, Vicente, *Cálculo diferencial e integral* (Décimasegunda edición), México, Porrúa, 1982.
SANTIAGO, Paulo, MCGREGOR, Isabel, NUSCHE, Deborah, RAVELA, Pedro, y TOLEDO, Diana, *OECD reviews of evaluation and assessment in education: México 2012*, OECD Publishing, 2012.
SANTILLÁN NIETO, Marcela (sf). "La formación docente en México". Recuperado de www.oecd.org/edu/preschoolandschool/43765204.pdf, el 10 de enero de 2013.
SANTOS TRIGO, Manuel, *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1997.
SANTOS TRIGO, Manuel, "Can routine problems be transformed into non-routine problems?" en *Teaching Mathematics and its Applications*, v. 17, 1998, pp. 132-135.
SANTOS TRIGO, Manuel, "Potencial didáctico del *software* dinámico en el aprendizaje de las matemáticas" en *Avance y Perspectiva*, v. 20, 2001, pp. 247-258.
SANTOS TRIGO, Manuel, "Procesos de transformación de artefactos tecnológicos en herramientas de resolución de problemas matemáticos" en *Boletín de la*

Asociación Matemática Venezolana, v. 10, 2003, pp. 195-211.

Santos Trigo, Manuel, "On the use of computational tools to promote students' mathematical thinking" en *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, v. 11, 2006, pp. 361-376.

Santos Trigo, Manuel, *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*, México, Trillas, 2007.

Santos Trigo, Manuel, "Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain" en *ZDM,* v. 39, 2007, pp. 523-536.

Santos Trigo, Manuel, *La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica*, España, SEIEM, 2008.

Santos Trigo, Manuel, "Sobre la construcción de una comunidad de práctica en la resolución de problemas" en Barrera, Fernando, *et al.*, editores, *Memorias del Segundo Seminario Nacional sobre Resolución de Problemas y el Aprendizaje de las Matemáticas*, Pachuca, UAEH, 2008, pp. 133-144.

Santos Trigo, Manuel, y Vargas Jarillo, Cristobal, "Más allá del uso de exámenes estandarizados" en *Avance y Perspectiva*, v. 22, enero-febrero 2003, pp. 9-22.

Santos Trigo, Manuel, y Barrera Mora, Fernando, "Contrasting and looking into some mathematics education frameworks" en *The Mathematics Educator*, v. 10, 2007, pp. 81-106.

Schattschneider, Doris, "Tiling the plane with congruent pentagons" en Alexanderson, G. L., editor, *The Harmony of the World: 75 years of Mathematics Magazine*, USA, The Mathematical Association of America, 2007, pp. 175-189.

Schoenfeld, Alan, *Mathematical problem solving*, New York, Academic Press, 1985.

Schoenfeld, Alan, "Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics" en Grows, D., editor, *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, Macmillan, 1992, pp. 334-370.

Schoenfeld, Alan, "Reflections on doing and teaching mathematics" en Schoenfeld, Alan, editor, *Mathematical thinking and problem solving*. New Jersey, Lawrence Erlbaum, 1994, pp. 53-70.

Schoenfeld, Alan, "Reflections on a course in mathematical problem solving" en Schoenfeld, Alan, Kaput, James, y Dubinsky, Ed, editores, *Research in Collegiate Mathematics Education III*, Washinton, American Mathematical Society, 1998, pp. 81-113.

Schoenfeld, Alan, "Purposes and Methods of Research in Mathematics Education" en *Notices of the AMS*, v. 47, 2000, pp. 641-649.

Schoenfeld, Alan, "Research methods in (mathematics) education" en English Lyn, editor, *Handbook of International Research in Mathematics Education*, New Jersey, Erlbaum, 2002, pp. 435-487.

Secretaría de Educación Pública, *Libro para el maestro. Educación secundaria*. México, SEP, 1994.

Secretaría de Educación Pública, *Hacia una política integral para la formación y el desarrollo profesional de los maestros de educación básica. Cuadernos de discusión 1*, México, SEP, 2003.

Selden, Annie, Selden, John, Hauk, Shandy, y Mason, Alice, "Why can't calculus students access their knowledge to solve non-routine problems?" en Dubinsky, Ed, Schoenfeld, Alan, y Kaput, James, editores, *CBMS Issues in Mathematics Education. Research in Collegiate Mathematics IV*, Rhode Islands, American Mathematical Society, Mathematical Association of America, 2000, pp. 128-153.

Selden, John, Selden, Annie, y Mason, Alice, "Even Good Calculus Students Can't Solve Nonroutine Problems" en: Kaput, James, y Dubinsky Ed, editores, *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analysis and Results*, Washington, The Mathematical Association of America, 1994, pp. 17-26.

Sfard, Anna, "Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics" en Kilpatrick, J., Martin, W. G., y Schifter, D., editores, *A research companion to principles and standards for school mathematics*, Virginia, NCTM. 2003, pp. 353-392.

Sfard, Anna, "What could be more practical than good research?" en *Educational Studies in Mathematics*, v. 58, 2005, pp. 393-413.

Shigley, Joseph, *Análisis Cinemático de Mecanismos*, México, MacGraw Hill, 1970.

Shigley, Joseph y Uicker, John, *Teoría de Máquinas y Mecanismos*. México, McGraw Hill, 1999.

Shulman, Lee, "Knowledge and teaching: Foundations of the new reform". *Harvard Educational Review,* v. *57*, 1987, pp. 1-22.

Sierpinska, Anna, "Research in mathematics education through a keyhole: Task problematization" en *For the learning of mathematics*, v. 24, 2004, pp. 7-15.

Silverman, Joseph, *A friendly introduction to number theory*. Pearson Prentice Hall, third edition, 2006.

Simon, Martin, "Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective" en *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 26, 1995, pp. 114-145.

Simon, Martin, y Tzur, Ron, "Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory" en *Mathematical Thinking and Learning,* v. 6, 2004, pp. 91-104.

Skemp, Richard, "Relational understanding and instrumental understanding" en *Mathematics Teaching*, v. 7, 1976, pp. 20-26.

Sowder Judith, "The mathematical education and development of teachers" en Lester, Frank K., Jr., editor, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, North Carolina, Information Age Publishing, 2007, pp. 167-224.

Spivak, Michael, *Calculo Infinitesimal*, México, Reverté, 1996.

Spivak, Michael, *Cálculo infinitesimal* (segunda edición), México, Reverté, 2010.

Steen, Lynn Arthur, "The science of patterns" en *Science*, v. 240, 1998, pp. 611-616.

Stein, William, "Sage?" February, 2006. Recuperado de http://www.sagemath.org/talks/2006-02-sage_days/current.pdf el 13 de noviembre de 2009.

Stein, Mary Kay, y Smith Margaret Schwan, "Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice" en *Mathematics Teaching in the Middle School*, v. 3, 1998, pp. 268-275.

Stigler, James, y Hiebert, James, *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*, New York, The Free Press, 1999.

Sugimoto, Teruhisa, y Ogawa, Tohru, "Tiling problem of convex pentagon" en *Forma,* v.

15, 2000, pp. 75-79.
Sugimoto, Teruhisa, y Ogawa, Tohru, "Properties of tilings by convex pentagons" en *Forma,* v. *21*, 2006, pp. 113-128.
Tatto, Maria Teresa, Schwille, John, Senk, Sharon, Ingvarson, Lawrence, Rowley, Glenn, Peck, Ray, Bankov, Kiril, Rodriguez, Michael, y Reckase, Mark, *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA teacher education and development study in mathematics* (TEDS-M), Amsterdam, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), 2012.
Thomas, Michael, Wilson, Anna, Corballis, Michael, y Lim, Vanessa, "Neuropsychological evidence for the role of graphical and algebraic representations in understanding functions" en Goos, M., Brown, R., y Makar, K., editores, *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Brisbane, MERGA. 2008, pp. 515-521.
Thompson, Patric, y Saldanha, Luis, "Fractions and multiplicative reasoning" en Kilpatrick, Jeremy; Martin Gary, y Schifter, Deborah, *Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics*, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, 2003, pp. 95-114.
Torralbo, Manuel, Maz, Alexander, Vallejo, Monica y Fernández-Cano, Antonio, "Formación del profesorado en educación matemática en España: producción de tesis doctorales y de artículos" en *PNA*, v. 1, 2007, pp. 161-178.
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, *Plan de Desarrollo Institucional 2011-2017*, Pachuca, UAEH, 2011.
Verillon, Pierre, "Revisiting Piaget and Vygotsky: In Search of a Learning Model for Technology Education" en *The Journal of Technology Studies*, v. 26, 2000, pp. 3-10.
Vorderman, Carol, Porkess, Roger, Budd, Chris, Dunne, Richard, y Rahman-Hart, Pepe, *A world-class mathematics education for all our young people*, 2011.
Vygotsky Lev Seminovich, *Mind in society: The development of higher psychological processes*, Cambridge, Harvard University Press, 1978.
Vygotsky, Lev Seminovich, *Pensamiento y lenguaje*, México, Ediciones Quinto Sol, 2008.
Wang, Aubrey, Coleman, Ashaki, Coley, Richard, y Phelps, Richard, *Preparing teachers around the world*, New Jersey, Educational Testing Service, 2003.
Watt, Helen, "Attitudes to the use of alternative assessment methods in mathematics: A study with secondary mathematics teachers in Sydney, Australia" en *Educational Studies in Mathematics,* v. *58*, 2005, pp. 21-44.
Wertsch, James, *Voices of the Mind: A Sociocultural Approach to Mediated Action*, Massachusetts, Harvard University Press, 1993.
Xique Anaya, Juan Carlos y León Hernández, Miguel Ángel, "El aprendizaje de las matemáticas" en Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, editor, *El aprendizaje en tercero de secundaria en México: informe sobre los resultados de Excale 09, aplicación 2008: español, matemáticas, biología y formación cívica y ética*, México, INEE, 2009, pp. 93-113.

Lista de tablas y figuras

Elementos didácticos y resolución de problemas: formación docente en matemáticas
se diseñó en formato digital electrónico en la Dirección de Ediciones
y Publicaciones de la Universidad Autónoma
del Estado de Hidalgo, en el mes de diciembre de 2023.

Un primer paso en la mejora de la educación matemática de los estudiantes de nuestro país consiste en contar con los profesores altamente capacitados en los ámbitos disciplinar, epistemológico y didáctico.

En este contexto, la resolución de problemas ofrece un marco que puede sustentar los programas de formación docente y desarrollo profesional, con base en una visión de las matemáticas como la ciencia de los patrones; es decir, una disciplina en la que es importante explorar, experimentar, imaginar y crear, mas que realizar cálculos o procedimientos rutinarios.