

Aplicación de Matrices y sistemas de ecuaciones lineales a sistemas de navegación GNSS, análisis de estabilidad de estructuras y análisis orbital con leyes de Kepler aplicados a la industria aeroespacial

Application of Matrices and Systems of Linear Equations to GNSS Navigation Systems, Stability Analysis of Structures, and Orbital Analysis with Kepler's Laws Applied to the Aerospace Industry

Yihán Karenina Vite Abdo^a, Ayrton Emilio Cruz Gutiérrez^b, And Adrian Mata Herrera^c

Abstract:

In this research, two applications of matrices in the aerospace industry are analysed, specifically in structural analysis and GNSS navigation. Two case studies are detailed: the use of matrices in GNSS navigation systems through Coarse Time algorithms, where matrix equations are employed to calculate position and time; and the calculation of structural stability, where stiffness matrices are used to analyse the equilibrium of forces and displacements in a structure. Similarly, it is important to note that the use of matrices in Kepler's laws within the aerospace industry allows for the representation of orbital data, trajectory calculation, orbital stability analysis, and mission optimization. These cases demonstrate how matrices are fundamental tools in solving complex problems in the aerospace industry.

Keywords:

Aerospace Industry, Matrices, Navigation, Kepler's Laws

Resumen:

En esta investigación se analizan dos aplicaciones de las matrices en la industria aeroespacial, específicamente análisis de estructuras y navegación GNSS. Se detallan dos casos de estudio: el uso de matrices en sistemas de navegación GNSS mediante algoritmos Coarse Time, donde se emplean ecuaciones matriciales para calcular la posición y el tiempo; y el cálculo de la estabilidad de estructuras, donde se utilizan matrices de rigidez para analizar el equilibrio de fuerzas y desplazamientos en una estructura. De igual manera conocer que el uso de matrices en las leyes de Kepler en la industria aeroespacial permite representar datos orbitales, calcular trayectorias, analizar la estabilidad orbital y optimizar misiones. Estos casos muestran cómo las matrices son herramientas fundamentales en la resolución de problemas complejos en la industria aeroespacial.

Palabras Clave:

Industria Aeroespacial, Matrices, Navegación, Leyes de Kepler

a Yihán Karenina Vite Abdo, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, <https://orcid.org/0009-0003-4045-7777>, Email: vi443079@uaeh.edu.mx

b Ayrton Emilio Cruz Gutiérrez, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, <https://orcid.org/0009-0001-1283-2782>, Email: cr493235@uaeh.edu.mx

c Adrian Mata Herrera, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, <https://orcid.org/0009-0002-7083-7714>, Email: ma499105@uaeh.edu.mx

Fecha de recepción: 11/06/2024, Fecha de aceptación: 31/10/2024, Fecha de publicación: 05/01/2025

DOI: <https://doi.org/10.29057/caleidoscopi.v2.i4.13929>



Introducción

El propósito del presente documento es analizar las diversas aplicaciones de las matrices en la industria aeroespacial, específicamente en las áreas de: análisis de estructuras, navegación, estudio de la dinámica orbital y el diseño y creación de simuladores de movimiento de cuerpos celestes.

Marco Teórico

Como base de la investigación de este proyecto se considerarán la consulta y revisión de diferentes fuentes como son las Leyes de Kepler, artículos científicos relacionados con la navegación aeroespacial y/o aeronáutica, así como bibliografía relacionada en la elaboración, desarrollo y solución de matrices, entre otras. La presente investigación se centra en el estudio de la industria aeroespacial, la cual hace referencia al diseño, fabricación, comercialización, mantenimiento de aeronaves y equipos asociados a sistemas de navegación y propulsión [1].

Antecedentes

De manera general las industrias han sufrido cambios a lo largo de la historia. La industria aeroespacial ha evolucionado para adaptarse a los requerimientos del mercado e ir a la par con los avances tecnológicos y científicos que la envuelven [1].

Históricamente el primer encuentro del hombre con la aeronáutica fue en el siglo XIX con los primeros diseños de aviones y dispositivos de vuelo atmosférico [2]. Posterior a eso, durante la primera y segunda guerra mundial se impulsó el rendimiento de los aviones militares a alturas sin precedentes [2].

Años después, en 1957 la URSS lanzó el primer satélite artificial, el Sputnik I, dando inicio a la era espacial. A partir de ese momento se llevaron a cabo misiones espaciales tripuladas y no tripuladas dentro y fuera de la órbita de la Tierra y con ello también se impulsó la creación de softwares y sistemas de guía, así como la informática y el desarrollo de materiales livianos con el fin de facilitar los vuelos tripulados [2].

Uso de las matrices en sistemas de navegación GNSS mediante algoritmo Coarse Time

Dentro de la aeronáutica y la ingeniería aeroespacial, existen diversos sistemas de navegación. Se va a analizar el caso particular de la navegación GNSS basada en algoritmos Coarse Time. En este ejemplo las matrices se pueden encontrar a la hora de hacer los cálculos de la

posición Coarse. Para ello se usa un algoritmo de mínimos cuadrados de donde se obtiene una ecuación para un problema genérico:

$$\delta y = h\delta X + \epsilon$$

Cuya solución puede escribirse como:

$$\delta x' = (H^T H)^{-1} \delta y$$

El algoritmo cuenta con los pasos que se detallan a continuación:

1. Posición a priori: para los sistemas Coarse Time, se necesita conocer una posición aproximada (posición a priori), de dónde se encuentre el receptor. La distancia máxima a la que se puede resolver esta ambigüedad viene dada por el periodo de la señal C/A (1ms), lo que lleva a una ambigüedad máxima de posición a priori $\pm 150\text{km}$ respecto a la posición real. Por lo tanto, puede realizar una convergencia hasta donde el error inicial sea igual o menor a **150 km** [3].

Luego de elegir estas coordenadas, se toman en cuenta otros datos que actualizarán el vector solución. Estas componentes son el sesgo común entre el reloj de los satélites (t_{cb}) y el error debido a la navegación tipo Coarse (t_c).

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_{cb_0} \\ t_{c_0} \end{bmatrix}$$

- x_0, y_0, z_0 : Coordenadas x, y, z del sistema cartesiano que define la posición.
 - t_{cb_0} Inicialización del valor del sesgo común de los satélites.
 - t_{c_0} Error de Coarse Time.
- [3]

2. Pseudorangos estimados: Son los valores del módulo del vector que une la posición del vector con la posición del satélite [3]. Es importante considerar las distintas variables que pueden influenciar el valor del pseudorango para llegar a la siguiente ecuación

$$\hat{r}_i = \| \text{Sat}_p^{(i)} - x_p \| + t_{cb} \cdot c - t_c^{(i)} \cdot c + v^{(i)} \cdot t_c$$

- t_{cb} : Sesgo común de los satélites.
- t_{ei} : Sesgo del reloj del satélite i .
- v^i : Velocidad relativa del satélite i con respecto al receptor.
- t_c : Valor de Time Coarse.
- c : Velocidad de la luz en el vacío.

[3]

3. Pseudorangos medidos y diferencia de pseudorangos: os

pseudorangos medidos hacen referencia a los datos proporcionados directamente por el hardware del receptor basados en la señal C/A [3]. Luego la diferencia de pseudorangos se escribe así:

$$\delta r^{(i)} = \bar{r}^{(i)} - \bar{r}^{(i)} = -e^{(i)} \cdot \delta x_{xyz} + \delta t_{cb} + v^{(i)} \cdot \delta t_c^{(i)} \cdot c$$

[3]

4. Cálculo del vector de solución de diferencias: Se transforma la ecuación del apartado 3 a un sistema matricial que contenga la información de todos los satélites utilizados. De esta forma se puede expresar como una ecuación genérica a un problema de mínimos cuadrados.

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta t_{cb} \\ \delta t_c \end{bmatrix}$$

$$\delta r = H \delta x - \delta t^{(i)} c$$

[3]

Donde la matriz viene definida por los siguientes elementos:

$$H = \begin{bmatrix} -e^{(1)} & 1 & -v^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -e^{(i)} & 1 & -v^{(i)} \end{bmatrix}$$

Aplicamos la solución general:

$$\delta \hat{x} = (H^T H)^{-1} (H^T) \delta r$$

Donde el valor obtenido permite actualizar las condiciones iniciales y repetir el proceso hasta que la solución converge.

Uso de matrices en el cálculo de la estabilidad de estructuras

1. Matriz de rigidez: Con el objetivo de obtener la relación entre las fuerzas y los desplazamientos de una estructura se realiza el esfuerzo axil a partir de la tensión que se ejerce sobre una rebanada seccionada de una estructura. A partir de la tensión ya puede calcularse el esfuerzo axil.

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E \left(-\frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} \right) dA$$

$$= -E \frac{du}{dx} \int_A dA - E \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y dA = -EA \frac{du}{dx}$$

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + P_{x1}(v(x) - v_1) + P_{y1}x - M_1 = 0 \quad (3)$$

[3] La integral del primer término es el área de la sección A . La integral del segundo término es la inercia I de la sección. Aplicando el equilibrio de fuerzas horizontales a la sección dx mostrada en la Fig. 1., que está deformada, se obtiene:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N - \left(N - \frac{dN}{dx} dx \right) = 0$$

$$\Rightarrow N = \text{cte} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(-EA \frac{du}{dx} \right) = 0$$

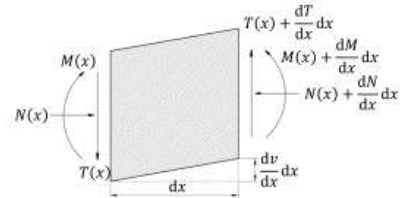


Figura 1. Equilibrio en la rebanada deformada.

El esfuerzo normal generará un momento debido a la no linealidad geométrica.

Dado que EA se considera constante para toda la barra [3] entonces:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \Rightarrow u(x) = ax + b = \frac{u_2 - u_1}{l} x + u_1$$

Donde u_1 y u_2 son los desplazamientos de los extremos. Las fuerzas axiales que actúan en los extremos de la barra son P_{x1} y P_{x2} [3]. De este modo:

$$P_{x1} = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2) \quad (1)$$

$$P_{x2} = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2) \quad (2)$$

Siendo A una constante de integración, que puede encontrarse sustituyendo $x = 0$ y aplicando las condiciones de contorno se tiene:

$$A = -M_1 - Nv_1$$

Sustituyendo esta constante y el valor del momento en la ecuación obtenida se tiene:

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + P_{x1}(v(x) - v_1) + P_{y1}x - M_1 = 0 \quad (3)$$

Con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 & v(l) &= v_2 \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} &= \theta_1 & \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} &= \theta_2 \end{aligned}$$

Las ecuaciones Eq. 1. y Eq. 2. más la Eq. 3. combinada con sus cuatro condiciones de contorno se pueden escribir de forma matricial como $P = K \cdot \Delta$, es decir:

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_1 \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l^3}\phi_1 & \frac{EI}{l^2}\phi_2 & 0 & -\frac{EI}{l^3}\phi_1 & \frac{EI}{l^2}\phi_2 \\ 0 & \frac{EI}{l^2}\phi_2 & \frac{EI}{l}\phi_4 & 0 & -\frac{EI}{l^2}\phi_2 & \frac{EI}{l}\phi_3 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{l^3}\phi_1 & -\frac{EI}{l^2}\phi_2 & 0 & \frac{EI}{l^3}\phi_1 & -\frac{EI}{l^2}\phi_2 \\ 0 & \frac{EI}{l^2}\phi_2 & \frac{EI}{l}\phi_3 & 0 & -\frac{EI}{l^2}\phi_2 & \frac{EI}{l}\phi_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Las funciones ϕ_1 son llamadas funciones de estabilidad, que son función de N y desconocidas de modo que lo que se hace es aproximar esta matriz [3].

Figura 2. Matriz de rigidez aproximada.

Se supondrá un desplazamiento aproximado y a partir de métodos energéticos se encontrará una solución aproximada. La energía potencial total es

$$E_T = U + V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^l N \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \underline{\Delta}^T \cdot \underline{P}$$

[3] Se supondrán unos desplazamientos transversales $v(x)$ que sigan una ley cúbica.

$$v(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3$$

Y se tratará de aproximar esta solución. Las condiciones de contorno para los desplazamientos transversales y los giros son

[3] A partir de estas condiciones pueden encontrarse las

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 & v(l) &= v_2 \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} &= \theta_1 & \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} &= \theta_2 \end{aligned}$$

cuatro constantes de la función.

$$\begin{aligned} v(x) &= v_1 + \theta_1 x - \frac{3(v_1 - v_2)}{l^2} x^2 - \frac{2\theta_1 + \theta_2}{l} x^2 \\ &\quad + \frac{\theta_1 + \theta_2}{l^2} x^3 - \frac{2(v_2 - v_1)}{l^3} x^3 \end{aligned}$$

La ecuación para $v(x)$ se puede escribir de forma matricial como:

$$\begin{aligned} v(x) &= \underline{\Delta}^T \cdot \underline{\Delta} \\ &= \left[1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} + \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Se pueden calcular entonces la primera y la segunda derivada de esta expresión.

$$\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 (\underline{C}^T \cdot \underline{\Delta})^T (\underline{C}^T \cdot \underline{\Delta}) = \underline{\Delta}^T \cdot \underline{C} \otimes \underline{C}^T \cdot \underline{\Delta}$$

Elevando la primera derivada al cuadrado se obtiene:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 (\underline{D}^T \cdot \underline{\Delta})^T (\underline{D}^T \cdot \underline{\Delta}) = \underline{\Delta}^T \cdot \underline{D} \otimes \underline{D}^T \cdot \underline{\Delta}$$

$$U + V = \Delta^T \cdot \left[\frac{EI}{2} \int_0^l D \otimes D^T dx - \frac{N}{2} \int_0^l C \otimes C^T dx \right] \cdot \Delta - \Delta^T \cdot P$$

[3] Finalmente se pueden sustituir estas derivadas en la ecuación para la energía potencial total para analizar el equilibrio en matricial.

[3] Los productos $C \otimes C^T$ y $D \otimes D^T$ devolverán matrices 4×4 . A partir de las expresiones de los vectores C Y D es fácil realizar estos productos y sus integrales, y escribir esta expresión como:

$$(\underline{\underline{K_e}} - N \underline{\underline{K_g}}) \cdot \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{P}} = 0$$

[3] Llegado este momento, pueden volver a introducirse en la ecuación anterior, sin tener que modificar su forma. Y Research Article 4 por lo tanto los vectores Δ Y P pasan a ser de dimensión 6, y las matrices elásticas $\underline{\underline{K_e}}$ y geométrica $\underline{\underline{K_g}}$ pasan ahora a ser matrices 6×6 , como se indica a continuación.

$$\underline{\underline{K_e}} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{K_g}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}$$

Las cargas y los desplazamientos son los indicados en la Fig. 2. y Fig. 3.

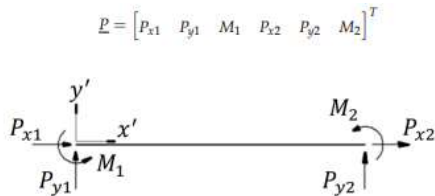


Figura 2. Definición de cargas en los nudos.

$$\underline{\underline{\Delta}} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T$$

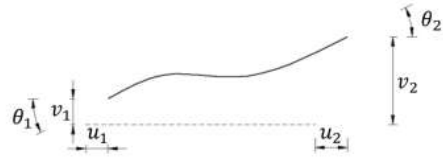


Figura 3. Definición de desplazamientos en los nudos

Para encontrar la estabilidad:

$$\delta^2(U + V) = \delta \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot \frac{\partial^2(U + V)}{\partial \underline{\underline{\Delta}}^2} \delta \underline{\underline{\Delta}}$$

$$= \delta \underline{\underline{\Delta}}^T \cdot (\underline{\underline{K_e}} - N \underline{\underline{K_g}}) \cdot \delta \underline{\underline{\Delta}} \begin{cases} > 0 & \text{Estable} \\ = 0 & \text{Neutro} \\ < 0 & \text{Inestable} \end{cases} \quad \forall \delta \underline{\underline{\Delta}}$$

[3] Por lo tanto la carga crítica vendrá dada por:

$$\det(\underline{\underline{K_e}} - N \underline{\underline{K_g}}) = 0$$

Esto equivale a un problema de autovalores generalizados en N . Dado que la singularidad de la matriz $\underline{\underline{K}}$ depende de N , que solo afecta a la matriz geométrica, y las filas y columnas de la matriz geométrica correspondientes a los desplazamientos horizontales son 0 (filas y columnas 1 y 4), podrán eliminarse del problema, junto con los desplazamientos impuestos por las condiciones de contorno [3].

D. Aplicación de Matrices en el Análisis Orbital y Diseño de Misiones Aeroespaciales

Las leyes de Kepler, formuladas por el astrónomo Johannes Kepler en el siglo XVII, describen el movimiento de los cuerpos celestes en el espacio. Estas leyes son fundamentales en el estudio de la mecánica celeste y son ampliamente utilizadas en la industria aeroespacial para la navegación y el diseño de misiones espaciales. En este contexto, el uso de matrices desempeña un papel crucial en el análisis orbital y el diseño de misiones. En esta sección, se explorará cómo las matrices se relacionan con las leyes de Kepler y su aplicación en la industria aeroespacial [5].

D.1. Representación Matricial de Datos Orbitales

Las órbitas de los cuerpos celestes se pueden representar mediante matrices que describen su posición y velocidad en un sistema de coordenadas específico. Para un objeto en órbita alrededor de un cuerpo central, como un satélite terrestre, la posición $\mathbf{r}$ y la velocidad $\mathbf{v}$ en coordenadas cartesianas pueden ser expresadas como:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

[5]

donde (x, y, z) son las coordenadas espaciales y $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ son las velocidades en cada dirección. Estas matrices proporcionan una representación precisa de la posición y el movimiento del objeto en el espacio [5].

D.2. Cálculos Orbitales Utilizando Métodos Matriciales

Los cálculos relacionados con las órbitas, como la propagación orbital y la predicción de posiciones futuras, se realizan utilizando métodos matriciales. Por ejemplo, la propagación de la posición y la velocidad a lo largo de una órbita se puede realizar utilizando la ecuación diferencial:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

[6]

donde $\mathbf{X}$ es el vector de estado que incluye la posición y la velocidad, y $\mathbf{A}$ es la matriz que describe la dinámica orbital. La solución a esta ecuación diferencial proporciona la evolución temporal del estado orbital a lo largo del tiempo [6].

D.3. Análisis de Estabilidad Orbital con Métodos Matriciales

El análisis de la estabilidad orbital implica evaluar la respuesta de un sistema orbital a perturbaciones externas. Las matrices juegan un papel crucial en este análisis al representar las perturbaciones y calcular la respuesta del sistema. Por ejemplo, la Research Article 5 estabilidad de una órbita puede ser determinada mediante el análisis de los valores y vectores propios de la matriz de Jacobiana del sistema orbital [6].

D.4. Optimización de Trayectorias y Diseño de Misiones

En el diseño de misiones espaciales, se emplean técnicas de optimización que implican el uso de matrices para

encontrar trayectorias óptimas que satisfagan los requisitos específicos de la misión. Por ejemplo, la minimización del consumo de combustible o la maximización de la duración de la misión pueden ser formuladas como problemas de optimización basados en matrices [6].

Discusión

Dentro de la industria aeroespacial, desde sus inicios hasta la actualidad se han buscado distintas formas de impulsar su desarrollo diseñando estructuras y materiales que faciliten la fabricación de aeronaves y equipos asociados, así como la creación de sistemas de navegación precisos [2]. Y todo esto no sería posible sin el estudio de ciertas ramas de las matemáticas, la informática y la física, tales como el análisis de datos y la mecánica celeste, que busca estudiar el comportamiento de partículas mediante una dinámica de atracción, repulsión y torsión [3]. La precisión en la determinación de la posición y el tiempo es fundamental en la industria aeroespacial, donde la seguridad y la eficiencia son imperativos primordiales. En este contexto, el uso de algoritmos basados en matrices en la navegación por satélite (GNSS) ha mostrado ser una herramienta invaluable para calcular con precisión la posición y el tiempo en entornos aeroespaciales y aprovecharlos en misiones tripuladas y no tripuladas. Estos algoritmos aprovechan los datos proporcionados por los satélites GNSS y los datos de la diferencia de pseudoranges medidos y estimados, los cuales son acomodados en un arreglo matricial que permite estimar la ubicación de un objeto mediante vectores de solución. Por otro lado, el análisis de la estabilidad de estructuras, también basado en el uso de matrices, desempeña un papel crucial en el diseño y la construcción de vehículos aeroespaciales seguros y confiables. Mediante el análisis de las propiedades estructurales y la evaluación de la resistencia de los componentes mediante el análisis de la relación entre los desplazamientos de las estructuras y las fuerzas a las que estas son sometidas. Con ayuda de ecuaciones matemáticas y representaciones de las leyes físicas que dictan los conceptos de fuerza, momento, inercia y desplazamientos, se obtienen lo que se conoce como matriz de rigidez que estudia la resistencia de los materiales. Luego gracias a las matrices de rigidez aproximada que obtiene una ecuación de energía y posterior a ello una ecuación cúbica, la cual es aproximada por medio de los contornos y ciertas consideraciones de giros. Una vez terminado esto, se sustituyen la doble derivada de los datos despejados en la forma matricial en la ecuación de energía. Con ello, se puede analizar el equilibrio entre las fuerzas y el desplazamiento en la estructura. Estos cálculos hacen

posible determinar si una estructura es o no estable, lo cual es crucial en cuanto a seguridad y eficiencia de las aeronaves y elementos relacionados. Las matrices permiten una representación precisa de los datos orbitales, cálculos eficientes de trayectorias y análisis detallados de la estabilidad orbital. Además, su aplicación en la industria aeroespacial contribuye significativamente al éxito de las misiones espaciales, lo que resalta la importancia de la comprensión y la aplicación de técnicas matriciales en este campo. Por último, queda mencionar el uso de las matrices en el estudio del movimiento de los cuerpos celestes.

Conclusiones

En conclusión, este estudio ha destacado el papel crítico que desempeñan las matrices en la industria aeroespacial, especialmente en áreas clave como los sistemas de navegación, la estabilidad de estructuras y el trazado de rutas aeroespaciales. Mediante la aplicación de técnicas matriciales, se han logrado avances significativos en la navegación precisa de vehículos espaciales, garantizando una posición y orientación adecuadas en entornos dinámicos y variables. Además, se ha podido analizar y mejorar la estabilidad de las estructuras aeroespaciales, lo que es vital para garantizar la integridad y seguridad de las naves en vuelo. Por último, el uso de matrices ha permitido un trazado eficiente de rutas aeroespaciales, optimizando la planificación de misiones y reduciendo los tiempos de vuelo y el consumo de combustible. Estos hallazgos subrayan la importancia continua de comprender y aplicar técnicas matriciales en la industria aeroespacial, ya que contribuyen significativamente al éxito operativo y a la seguridad de las misiones espaciales. Además, destacan la necesidad de continuar investigando y desarrollando nuevas herramientas y metodologías basadas en matrices para abordar los desafíos emergentes en el campo de la navegación y exploración espacial.

Referencias

- David du Mutel de Franzetti, I. (2018). Análisis de sensibilidad de trayectorias óptimas de avión en espacios aéreos estructurados
- ETSEIAT - Universitat Politècnica de Catalunya (2020). Estructuras aeroespaciales: Ingeniería aeronáutica - ETSEIAT - UPC 1
- G. Pop, A. Mihail Titu, A. Pop, (2023, Oct 25) "Enhancing Aerospace Industry Efficiency and Sustainability: Process Integration and Quality Management in the Context of Industry 4.0"[Online] Available:https://www.researchgate.net/publication/374979326_Enhancing_Aerospace_Industry_Efficiency_and_Sustainability_Process_Integration_and_Quality_Management_in_the_Context_of_Industry_40.
- Martínez, J. (2021). Diseño y simulación del encuentro, acercamiento y acoplamiento de pequeños satélites.
- R. Ricardo, (2023) "Ingeniería aeroespacial definición e historia" [Online] Available:<https://estudyando.com/ingenieria-aeroespacial-definicion-e-historia/>
- Villalva, M, "Cálculo de la posición y tiempo GNSS mediante un algoritmo de Coarse Time" Universitat Oberta Catalunya, Catalunya, 202