

## Aplicaciones de las derivadas parciales en las ciencias económicas: Funciones de demanda marginal (Productos competitivos y complementarios)

### Applications for Partial Derivatives in Economics: Marginal Demand Functions (Competitive and Complementary Products)

Norman Rafael López Sánchez <sup>a</sup>, Clifford Jerry Herrera Castrillo <sup>b</sup>

---

**Abstract:**

The article “Applications of Partial Derivatives in Economics: Marginal Demand Functions (Competitive and Complementary Products)” analyzes the use of mathematical tools to model and understand the behavior of marginal demand in economic contexts, specifically in competitive and complementary products. The main objective of this work is to offer a practical guide to problems that allow students and teachers to apply partial derivatives to study variations in demand as a function of changes in prices and other relevant variables. The study was developed under a mixed approach, predominantly qualitative, using descriptive, inductive and hypothetico-deductive methods, supported by practical examples taken from reliable sources. The results highlight how the analysis of marginal demand, using partial derivatives, provides a deeper understanding of the relationships between products and facilitates informed decision making in competitive contexts. In addition, the article fosters critical thinking, and the development of analytical skills needed to address complex economic problems, strengthening meaningful learning in economics and management. This mathematical approach not only promotes innovation in problem solving, but also contributes to improving readers' ability to interpret and apply fundamental concepts of economics in real scenarios.

**Keywords:**

*Partial derivatives, Marginal demand, Competitive products, Complementary products*

---

**Resumen:**

El artículo "Aplicaciones de las derivadas parciales en las ciencias económicas: Funciones de demanda marginal (Productos competitivos y complementarios)" analiza el uso de herramientas matemáticas para modelar y comprender el comportamiento de la demanda marginal en contextos económicos, específicamente en productos competitivos y complementarios. Este trabajo tiene como objetivo principal ofrecer una guía práctica de problemas que permita a estudiantes y docentes aplicar derivadas parciales para estudiar las variaciones en la demanda en función de cambios en precios y otras variables relevantes. El estudio se desarrolló bajo un enfoque mixto, con predominancia cualitativa, utilizando métodos descriptivos, inductivos e hipotético-deductivos, apoyándose en ejemplos prácticos tomados de fuentes confiables. Los resultados destacan cómo el análisis de la demanda marginal, mediante derivadas parciales, proporciona una comprensión más profunda de las relaciones entre productos y facilita la toma de decisiones informadas en contextos competitivos. Además, el artículo fomenta el pensamiento crítico y el desarrollo de habilidades analíticas necesarias para enfrentar problemas económicos complejos, fortaleciendo el aprendizaje significativo en ciencias económicas y administrativas. Este enfoque matemático no solo promueve la innovación en la resolución de problemas, sino que también contribuye a mejorar la capacidad de los lectores para interpretar y aplicar conceptos fundamentales de la economía en escenarios reales.

**Palabras Clave:**

*Derivadas parciales, Demanda marginal, Productos competitivos, Productos complementarios*

---

<sup>a</sup> Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua | Centro Universitario Regional Estelí | Estelí-Estelí | Nicaragua, <https://orcid.org/0009-0004-5710-8159>, Email: [lopeznorman88@gmail.com](mailto:lopeznorman88@gmail.com)

<sup>b</sup> Autor de correspondencia, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua | Centro Universitario Regional Estelí | Estelí-Estelí | Nicaragua, <https://orcid.org/0000-0002-7663-2499>, Email: [cliffor.herrera@unan.edu.ni](mailto:cliffor.herrera@unan.edu.ni)

## Introducción

La Matemática, como disciplina científica, ha brindado al ser humano herramientas extremadamente poderosas para abordar una variedad de problemas cotidianos. La mayoría de las áreas del conocimiento humano emplean técnicas matemáticas para analizar y explicar las relaciones causales de los procesos y fenómenos en sus respectivos campos. En la actualidad, es común encontrar artículos en ciencias médicas, químico-farmacéuticas, ciencias sociales y otras áreas del saber que mencionan conceptos o entidades matemáticas. En particular, en las ciencias económicas, se utilizan conceptos como la derivada, la integral, ecuaciones diferenciales y series temporales, entre otros. Los métodos más actuales para medir la eficiencia y optimizar la economía se basan en modelos matemáticos fundamentales (Cancio Díaz, 2009).

En el ámbito de las ciencias económicas, el análisis matemático desempeña un papel crucial en la comprensión y modelado de fenómenos complejos, como la interacción entre productos competitivos y complementarios. Entre las herramientas más versátiles para este propósito se encuentran las derivadas parciales, ya que permiten cuantificar y analizar cómo los cambios en variables económicas, como el precio de un bien o el ingreso del consumidor, afectan la demanda marginal. Esta capacidad es fundamental en la toma de decisiones estratégicas en economía, ya que facilita la identificación de patrones de consumo y la optimización de políticas de precios y producción. En particular, el estudio de la demanda marginal a través de derivadas parciales resulta esencial para evaluar la relación entre productos opuestos y complementarios, permitiendo comprender cómo la variación en el precio de un bien afecta directamente la demanda de otro.

Las derivadas parciales son fundamentales en el análisis de la demanda marginal, especialmente en el contexto de productos competitivos y complementarios (Alonso Neira, 2024). En un mercado competitivo, la demanda marginal se refiere al cambio en la cantidad demandada de un producto en respuesta a un cambio en su precio, manteniendo constante el precio de otros bienes. Las derivadas parciales permiten a los economistas evaluar cómo la variación en el precio de un producto específico afecta la demanda, considerando simultáneamente los precios de otros productos (Lardner & Arya, 2009). Esto es crucial para entender las interrelaciones entre productos y cómo las decisiones de precios pueden influir en el comportamiento del consumidor.

El estudio de la demanda marginal es esencial en el ámbito económico, ya que proporciona información valiosa para la toma de decisiones empresariales y políticas públicas. Comprender la demanda marginal permite a las empresas optimizar sus estrategias de precios y producción, maximizando así sus ingresos. Además, en el caso de productos complementarios, el análisis de las derivadas parciales ayuda a identificar cómo cambios en la demanda de un bien pueden afectar la demanda de otro, lo que es fundamental para las empresas que operan en mercados interrelacionados (López Sánchez & Herrera Castrillo, 2023a; Alonso Neira, 2024).

El presente artículo, titulado "Aplicaciones de las derivadas parciales en las ciencias económicas: Funciones de demanda marginal (Productos competitivos y complementarios)", busca explorar esta intersección entre las matemáticas y la economía mediante el uso práctico de derivadas parciales en el análisis de la demanda marginal. El estudio de la demanda marginal no solo permite comprender las interacciones entre distintos productos en el mercado, sino que también ofrece una base cuantitativa clave para la formulación de estrategias económicas eficientes. Este enfoque no solo facilita la comprensión de las relaciones entre productos en contextos competitivos y complementarios, sino que también ofrece una herramienta poderosa para la toma de decisiones estratégicas en escenarios económicos dinámicos. La matemática es una disciplina que se compone de diferentes áreas y enfoques que se complementan entre sí para brindar soluciones a diversos problemas (Herrera Castrillo & López, 2023).

Los problemas económicos en los que se utilizan herramientas matemáticas son esenciales para que los estudiantes puedan comprender la relevancia del análisis matemático. Al aplicar estos conceptos a situaciones reales, los alumnos pueden apreciar mejor su utilidad y significado en el estudio (Acinas, 2019).

Desde una perspectiva académica, este trabajo se dirige principalmente a estudiantes y docentes interesados en fortalecer sus habilidades analíticas y su capacidad para abordar problemas económicos mediante un enfoque riguroso y sistemático. A través de ejemplos prácticos y un enfoque metodológico basado en la combinación de técnicas descriptivas, inductivas e hipotético-deductivas, el estudio ofrece un marco accesible y aplicable para analizar problemas de la vida real.

Este estudio forma parte de la tesis doctoral en desarrollo titulada "Aplicaciones de las derivadas parciales en las ciencias económicas: propuesta basada en la resolución de problemas". Las diversas aplicaciones tratadas en este trabajo son relevantes para el ámbito de la administración y la economía, presentándose de manera clara y accesible. Se describen detalladamente cada una de las

soluciones y el enfoque metodológico, es decir, la forma más sencilla de abordar y resolver este tipo de problemas. Los estudios previos, ya publicados son:

- Aplicaciones de las derivadas parciales en las Ciencias Económicas: Productividad marginal (López Sánchez & Herrera Castrillo, 2023a)
- Aplicaciones de las derivadas parciales en las Ciencias Económicas: costo marginal (López-Sánchez & Herrera-Castrillo, 2023b)
- Aplicaciones de las derivadas parciales en las ciencias económicas: función de costo y producción (López Sánchez & Herrera Castrillo, 2024)

Estos trabajos han establecido una base sólida para el presente estudio, al explorar diferentes aspectos de las derivadas parciales en contextos económicos específicos. En el desarrollo de esta tesis, se busca ampliar y profundizar en estas aplicaciones, analizando casos adicionales que permiten una comprensión más integral de cómo las herramientas matemáticas pueden ser utilizadas para resolver problemas económicos complejos. Además, se pretende contribuir a la formación de los estudiantes en estos temas, facilitando su aprendizaje mediante ejemplos prácticos y un enfoque metodológico accesible.

Además, este artículo busca fomentar el pensamiento crítico y el aprendizaje significativo, destacando cómo el uso de derivadas parciales puede enriquecer la formación en ciencias económicas y administrativas. En un mundo donde la complejidad económica requiere soluciones innovadoras, la aplicación de herramientas matemáticas como las derivadas parciales se convierte en un recurso indispensable para interpretar, predecir y optimizar las dinámicas del mercado.

## Revisión de la Literatura

### Derivadas Parciales

De acuerdo con Romero et al. (2021) Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 \dots \partial^{k_n} x_n}\right) = 0 \quad (1)$$

Se cumple que:  $k_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$  son enteros no negativos tales que:  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ .

La función  $F$  es la función prefijada de sus argumentos. Algunas características de las derivadas parciales son:

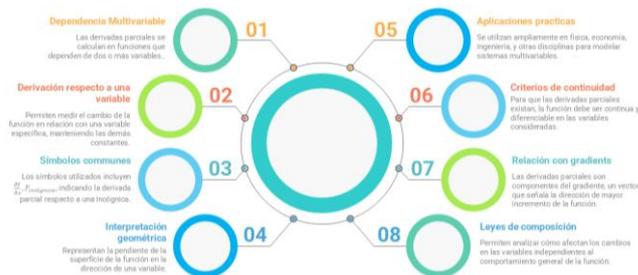


Figura 1. Características de las Derivadas parciales

Nota. Adaptado de Cancio Díaz (2009)

Las derivadas parciales son una herramienta fundamental en el análisis de funciones multivariables, ya que permiten estudiar cómo cambia una función al variar una de sus variables independientes mientras las demás permanecen constantes. Representadas incómodas mediante símbolos como  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $F_{incógnita}$ , estas derivadas ofrecen una interpretación geométrica clara: indican la pendiente de la superficie definida por la función en la dirección de una variable específica. Esto resulta especialmente útil en contextos donde las variables tienen relaciones complejas, como en la economía, la física y la ingeniería (Najarro Quintero et al., 2024; Guaypatín Pico et al., 2024; Nardín Anarela et al., 2017).

Además, las derivadas parciales forman parte esencial del gradiente, un vector que señala la dirección de mayor incremento de una función, y están ligadas a leyes de composición que permiten descomponer y analizar cómo afectan los cambios en las variables independientes al comportamiento global de un sistema (Cheng, 1998). Estas características hacen de las derivadas parciales una herramienta poderosa para modelar fenómenos multivariables y comprender sistemas complejos en diversas áreas del conocimiento (López Sánchez & Herrera Castrillo, 2024).

### Funciones de demanda marginal (Productos competitivos y complementarios)

Las funciones de demanda marginal representan el cambio en la cantidad demandada de un bien o servicio en respuesta a variaciones marginales en factores determinantes, como el precio, el ingreso o el precio de otros bienes (Alonso Neira, 2024). En el contexto de productos competitivos y complementarios, estas funciones adquieren un significado especial: para productos competitivos, una disminución en el precio de un bien generalmente reduce la demanda de su competidor, mientras que en productos complementarios, un cambio en el precio de uno afecta positivamente la demanda del otro. Estas relaciones permiten analizar cómo interactúan los productos en el mercado, proporcionando información clave para la toma de

decisiones en economía, como la fijación de precios, estrategias de mercado y planificación de producción, a través del uso de herramientas matemáticas.

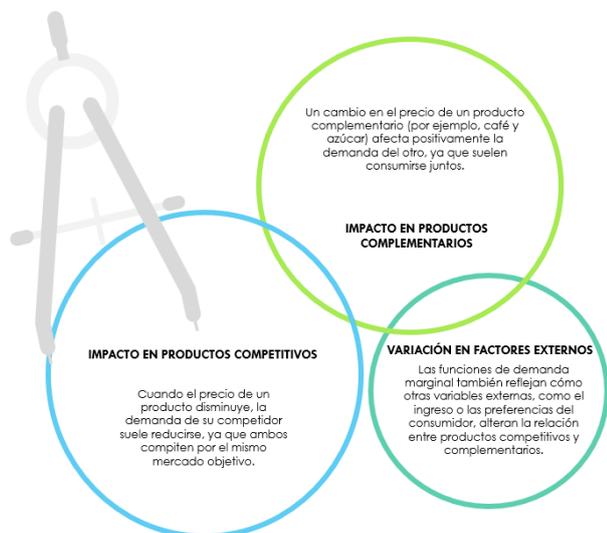


Figura 2. Relaciones entre Productos y su Demanda Marginal

Nota. Adaptado de Najarro Quintero et al. (2024)

Aplicación de la derivada a problemas de optimización  
 Numerosos problemas que surgen en la práctica diaria están, de alguna manera, vinculados a la búsqueda de los valores máximos y mínimos de una función, así como a identificar los valores de la variable independiente en los que se logran estos extremos. En términos generales, estos problemas se conocen como problemas de optimización (Cancio Díaz, 2009).



Figura 3. Fases en la solución de un problema de Optimización

Nota. Adaptado de Acevedo Montenegro et al (2024)

Resolución de problemas y estado del arte  
 La resolución de problemas es parte fundamental de la existencia humana, ya que se enfoca en hallar soluciones a diversas situaciones de la vida diaria. El planteamiento y la solución de problemas son objetivos clave en el ámbito de las Matemáticas. Este proceso es un aspecto

central en la construcción del conocimiento matemático y se considera una actividad cognitiva esencial, reconocida tanto por la teoría como por la práctica educativa (Acevedo Montenegro et al., 2024; Cruz López et al., 2024; López Sánchez & Herrera Castrillo, 2023a).

Diversos estudios han explorado las aplicaciones de las matemáticas, específicamente del cálculo diferencial, en el contexto de las ciencias económicas, brindando valiosos aportes para la enseñanza y el análisis de problemas económicos. Uno de estos trabajos es el de García Oropeza (2009), quien en su tesis doctoral titulada “Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemática que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de las carreras de ciencias económicas – La Enseñanza Basada en Problemas (EBP) como estrategia didáctica y metodológica”, investigó el conocimiento profesional de los docentes de matemáticas y el impacto de la enseñanza basada en problemas (EBP) como estrategia metodológica. Entre las conclusiones más relevantes, se destaca que la enseñanza contextualizada de las matemáticas en estas áreas no ha sido plenamente aprovechada, y que la EBP ofrece un enfoque novedoso para fortalecer la didáctica del cálculo diferencial. Este enfoque, sin embargo, aún enfrenta desafíos, ya que muchas veces la enseñanza de las matemáticas permanece limitada a esquemas tradicionales.

En una línea complementaria, García et al. (2011) analizaron la historia y las aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas, resaltando su valor didáctico e histórico. Este estudio destaca la relevancia del análisis marginal como herramienta fundamental en economía, utilizando las derivadas para modelar situaciones relacionadas con la oferta, la demanda y otros conceptos económicos clave. Además, se enfatiza en la importancia de contextualizar la enseñanza del cálculo diferencial a partir de ejemplos prácticos, para facilitar la comprensión de los estudiantes sobre la relación entre matemáticas y economía.

Por otro lado, Perdomo Centeno & Quimbaya Torres (2012), en su investigación sobre modelos económicos, abordan aplicaciones del cálculo en problemas de optimización, incluyendo el uso de técnicas como los multiplicadores de Lagrange y el análisis de funciones convexas. Sus hallazgos refuerzan la importancia de trasladar problemas descriptivos a modelos matemáticos para analizarlos y tomar decisiones fundamentadas en resultados cuantitativos. Finalmente, Acinas (2019) profundiza en la optimización de funciones con restricciones, aplicando este enfoque en problemas como el costo mínimo de producción bajo limitaciones de almacenamiento, destacando el valor práctico del análisis matemático en la resolución de problemas económicos.

## Materiales y Métodos

### Enfoque y tipo de Investigación

La presente investigación adopta un enfoque mixto, combinando aspectos cuantitativos y cualitativos para abordar el ámbito educativo mediante la resolución de problemas. Se recopiló información a través de fuentes bibliográficas y experiencias de docentes y especialistas en ciencias económicas y administrativas. Este enfoque permite analizar y describir tanto datos numéricos como cualitativos, proporcionando una perspectiva integral del objeto de estudio.

Sánchez et al. (2022) explican que los métodos mixtos pueden implementarse de acuerdo con diversas secuencias, a veces lo cuantitativo precede a lo cualitativo, en otras ocasiones lo cualitativo es primero; también pueden desarrollarse de manera simultánea o en paralelo. Este enfoque, más allá de combinar metodologías, implica un análisis profundo y equilibrado que integra ambas perspectivas desde la recolección de datos hasta el análisis.

En este sentido, Grimaldo Muchotrigo (2009) señala que "la metodología cualitativa se aplica a estudios a nivel micro, por lo que normalmente intenta profundizar más en la situación objeto de estudio" (p. 6). Por lo tanto, se busca un equilibrio entre precisión, alcance y enfoque, permitiendo explicar de manera más completa el universo de análisis.



Figura 4. Tipo de Investigación y su Alcance

Nota. Adaptado de Bruto (2010)

La presente investigación, de carácter bibliográfico y descriptivo, se sustenta en el análisis detallado de fuentes actualizadas en administración y economía, enfocándose en la resolución de problemas mediante derivadas parciales. Como señala Gómez-Luna et al. (2014), la revisión bibliográfica permite describir con detalle un tema específico, proporcionando un marco sólido para el análisis. Además, su alcance descriptivo facilita la comprensión de hechos, actitudes y procesos en el ámbito educativo, permitiendo caracterizar fenómenos y establecer relaciones entre variables, tal como lo plantea

Bruto (2010) "Su meta no se limita a la recolección de datos, sino a la predicción e identificación de las relaciones que existen entre dos o más variables" (p. 2). En este contexto, la investigación propone una ruta didáctica metodológica para la enseñanza de las aplicaciones de las derivadas parciales en ciencias económicas, abordando con rigor las interacciones entre teoría y práctica.

### Fuentes de Información

Las fuentes de información representan una herramienta clave para la comunidad científica, facilitando la difusión de conocimientos y el intercambio de información entre investigadores, instituciones y equipos interesados en un área disciplinar específica. Estas fuentes permiten identificar las principales líneas de investigación, avances y preocupaciones dentro del campo, además de reflejar las demandas sociales hacia la comunidad científica (Meira Cartea, 1997). En este sentido, las aplicaciones se basan en libros de Matemática orientados a las ciencias económicas, que se detallan a continuación.

- Matemáticas para Administración y Economía (Haeussler & Richard, 2008)
- Cálculo III (Meza, 2011)
- Matemática Aplicada a las ciencias Económicas-Administrativas (Vásquez, 2014)
- Matemática Aplicada a la Administración y Economía (Lardner & Arya, 2009)
- Cálculo de varias variables-Transcendentes Tempranas séptima edición (Stewart, 2012)
- El cálculo séptima edición (Leithold, 1994)

Como fuentes secundarias, se retomaron artículos de investigación, tesis relacionadas con el tema en estudio, experiencia del docente.

El proceso de obtención de información sobre la experiencia docente respecto al tema se desarrolló bajo un enfoque mixto, combinando métodos cualitativos y cuantitativos para garantizar una comprensión integral del fenómeno estudiado. Se compilieron datos mediante la revisión de literatura especializada, entrevistas a docentes con experiencia en la enseñanza de las aplicaciones de las derivadas parciales en economía y el análisis de documentos institucionales relacionados con la didáctica de las matemáticas en este campo. Adicionalmente, se aplicaron técnicas de observación en entornos educativos, permitiendo identificar estrategias metodológicas efectivas, dificultades recurrentes en el aprendizaje y el impacto del uso de modelos matemáticos en la comprensión de los estudiantes. Los resultados obtenidos fueron triangulados para asegurar la validez y fiabilidad de los hallazgos, los cuales permitieron generar recomendaciones para optimizar la enseñanza de este contenido en el ámbito académico.

## Etapas de la Investigación



Figura 5. Etapas de la Investigación

Nota. Extraído de Cruz López et al. (2024)

La investigación se desarrolló en cuatro fases clave, desde la identificación del problema y la revisión bibliográfica, hasta la implementación y análisis de las derivadas parciales aplicadas a problemas prácticos en economía. Este enfoque, basado en un diseño metodológico mixto, permitió combinar análisis cualitativos y cuantitativos, enriqueciendo la comprensión y proporcionando resultados significativos para la enseñanza y resolución de problemas económicos (Meira, 1997; Gómez-Luna et al., 2014).

## Análisis y discusión de resultados

El análisis de los resultados obtenidos en esta investigación se centra en la aplicación de derivadas parciales para comprender las interacciones entre productos competitivos y complementarios en el ámbito de las ciencias económicas. Estas herramientas matemáticas permiten modelar la demanda marginal de bienes o servicios en función de variaciones en precios y otros factores relevantes, proporcionando una perspectiva detallada sobre las relaciones dinámicas entre diferentes productos en el mercado. Este enfoque es particularmente útil para identificar patrones en la demanda y evaluar cómo los cambios en variables independientes afectan las decisiones de consumo, lo que resulta esencial para el diseño de estrategias económicas y comerciales. La investigación ha tomado como base conceptos teóricos previamente establecidos, así como ejemplos prácticos, para garantizar que los resultados sean aplicables y relevantes en escenarios reales.

En este contexto, los resultados destacan cómo las funciones de demanda marginal permiten distinguir entre productos competitivos, cuya demanda está influenciada negativamente por los cambios en el precio del otro, y productos complementarios, donde las variaciones de

precio en uno afectan positivamente el consumo del otro. Como señalan Haeussler y Richard (2008), estas relaciones pueden ser representadas matemáticamente a través de derivadas parciales específicas, que ofrecen una herramienta precisa para cuantificar estos efectos. Este marco de análisis no solo valida las hipótesis planteadas, sino que también reafirma la importancia del uso de herramientas matemáticas en el estudio de fenómenos económicos complejos, facilitando la toma de decisiones informadas en contextos competitivos y complementarios.

Los resultados obtenidos en esta investigación evidencian patrones claros sobre cómo los cambios en los precios de productos competitivos y complementarios impactan la demanda marginal de cada uno. Para los productos competitivos, como la mantequilla y la margarina, se observa que un aumento en el precio de uno genera un incremento en la demanda del otro, confirmando que estos bienes son sustitutos directos. Este comportamiento se representa matemáticamente con derivadas parciales positivas cruzadas:

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0 \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0 \quad (2)$$

Validando que un cambio en el precio del producto B afecta directamente y de manera positiva la demanda del producto A. Por otro lado, en los productos complementarios, como automóviles y gasolina, se identificó que un aumento en el precio de uno reduce la demanda del otro, con derivadas parciales negativas cruzadas.

$$(\partial q_A)/(\partial P_B) < 0 \text{ y } (\partial q_B)/(\partial P_A) < 0 \quad (3)$$

lo que refleja su interdependencia.

Además, los análisis realizados muestran que la cuantificación de estas relaciones mediante derivadas parciales proporciona una comprensión más profunda de los patrones de consumo en distintos escenarios económicos. La investigación demostró que estas herramientas no permiten solo modelar, sino también prever con precisión cómo los consumidores ajustan su comportamiento en función de las variaciones de precio, ya sea en bienes sustitutos o complementarios. Esto subraya la relevancia de aplicar estas técnicas matemáticas en la toma de decisiones estratégicas, ya que brindan un marco riguroso para evaluar y optimizar las políticas de precios, así como para diseñar estrategias competitivas más efectivas en mercados complejos.

La interpretación de los resultados obtenidos confirma la eficacia de las derivadas parciales como herramienta matemática para analizar y comprender las interacciones

entre productos en contextos económicos. En el caso de los productos competitivos, se verificó que un aumento en el precio de un bien genera un incremento en la demanda de su sustituto, lo que está en línea con las expectativas teóricas y las condiciones típicas planteadas por Haeussler y Richard (2008). Este comportamiento destaca la importancia de considerar estas relaciones al establecer estrategias de mercado, ya que permite anticipar cómo los cambios en precios afectan no solo a un producto, sino también a su competidor directo, proporcionando información clave para la toma de decisiones empresariales.

En cuanto a los productos complementarios, los resultados revelaron que las variaciones de precio tienen un impacto significativo en la demanda conjunta de los bienes, como se observa en el caso de los automóviles y la gasolina. Este hallazgo refuerza la idea de que los productos complementarios están estrechamente vinculados en términos de consumo, lo que exige un enfoque integral en la planificación de precios y políticas comerciales.

La precisión con la que las derivadas parciales permiten modelar estas relaciones demuestra su valor en la optimización de decisiones económicas, ya que facilitan una comprensión cuantitativa y cualitativa de las dinámicas de consumo. Estos hallazgos no solo validan las hipótesis de la investigación, sino que también subrayan la utilidad práctica de aplicar modelos matemáticos avanzados al análisis de fenómenos económicos complejos.

#### Resolución de problemas

Para conocer si un producto es competitivo, complementario o de ninguno de los dos es necesario conocer como calcular la demanda de dos o más productos.

**Problema 1:** La función de demanda de dos productos está dados por

$$q_1 = 300 - 8p_1 - 4p_2 \quad (4)$$

$$q_2 = 400 - 5p_1 - 10p_2 \quad (5)$$

- a. Encuentre la demanda para cada uno de ellos si el precio del primero es  $p_1 = 10$  y  $p_2 = 8$ .

$$q_1 = 300 - 8p_1 - 4p_2 \quad (6)$$

$$q_1 = 300 - 8(10) - 4(8) \quad (7)$$

$$q_1 = 300 - 80 - 32 = 188 \quad (8)$$

$$q_2 = 400 - 5p_1 - 10p_2 \quad (9)$$

$$q_2 = 400 - 5(10) - 10(8) \quad (10)$$

$$q_2 = 400 - 50 - 80 = 270 \quad (11)$$

De acuerdo a los precios dados el producto número presenta mayor demanda.

- b. Encuentre la demanda marginal de  $q_1$  respecto al precio  $p_1$ .

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = 300 - 8p_1 - 4p_2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = -8 \quad (13)$$

Por cada \$1 que se incremente el precio del producto 1 la demanda del producto 1 disminuye en 8 unidades, manteniendo constante el precio del producto 2.

- c. Encuentre la demanda marginal de  $q_2$  respecto al precio  $p_2$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 400 - 5p_1 - 10p_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -10 \quad (15)$$

Por cada \$1 que se incremente el precio del producto 2 la demanda del producto 2 disminuye en 10 unidades, manteniendo constante el precio del producto 1.

- d. Encuentre la demanda marginal de  $q_1$  respecto al precio  $p_2$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = 300 - 8p_1 - 4p_2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = -4 \quad (17)$$

Por cada \$1 que se incremente el precio del producto 2 la demanda del producto 1 disminuye en 4 unidades, manteniendo constante el precio del producto 1.

Para identificar cuál de los bienes tiene una mayor demanda en el problema 1, es necesario comparar los resultados obtenidos a partir de las funciones de demanda evaluadas en el nivel de precios establecido. Si al sustituir los precios en las ecuaciones de demanda se

determina que la cantidad demandada del producto 1 es superior a la del producto 2, se puede concluir que el producto 1 tiene una demanda más alta en esas condiciones de mercado. Por el contrario, si la cantidad demandada del producto 2 es mayor, este será el bien con mayor demanda. Esta comparación es esencial para entender correctamente la relación entre los productos y analizar su comportamiento en términos de elasticidad y sensibilidad a las variaciones de precios, lo que facilita la toma de decisiones informadas sobre estrategias de mercado y fijación de precios.

**Problema 2:** Las funciones de demanda para los productos A y B son cada una función de los precios de A y B y están dadas por

$$q_A = \frac{50\sqrt[3]{P_B}}{\sqrt{P_A}} \text{ y } q_B = \frac{75P_A}{\sqrt[3]{P_B^2}} \quad (18)$$

Respectivamente. Encuentre las cuatro funciones de demanda marginal y determine si A y B son productos competitivos, productos complementarios o ninguno de los dos.

Solución

Si se escribe

$$q_A = 50(P_A)^{-1/2}(P_B)^{1/3} \text{ y } q_B = 75P_A(P_B)^{-2/3} \quad (19)$$

Se tiene

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = 50\left(-\frac{1}{2}\right)(P_A)^{-3/2}(P_B)^{1/3} = -25(P_A)^{-3/2}(P_B)^{1/3} \quad (20)$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_A} = -\frac{25(P_B)^{1/3}}{(P_A)^{3/2}} \quad (21)$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = 50(P_A)^{-1/2}\left(\frac{1}{3}\right)(P_B)^{-2/3} = \frac{50}{3}(P_A)^{-1/2}(P_B)^{-2/3} \quad (22)$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial P_B} = \frac{50}{3} \frac{1}{(P_A)^{1/2}(P_B)^{2/3}} \quad (23)$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_A} = 75(P_B)^{-2/3} = \frac{75}{(P_B)^{2/3}} \quad (24)$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial P_B} = 75P_A\left(-\frac{2}{3}\right)(P_B)^{-5/3} = \frac{-50P_A}{(P_B)^{5/3}} \quad (25)$$

Respuesta: Como  $P_A$  y  $P_B$  representan precios, ambas son positivas. Por lo tanto,  $\frac{\partial q_A}{\partial P_B} > 0$  y  $\frac{\partial q_B}{\partial P_A} > 0$ . Se concluye que A y B son productos competitivos

**Problema 3:** Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dadas por:

$$q_A = 1000 - 0,01p_A - 0,005p_B; \quad q_B = 1500 + \frac{2}{p_A + 4} + \frac{3}{p_B + 2} \quad (26)$$

Determinar, usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

Solución

Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \quad (27)$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 1000 - 0,01p_A - 0,005p_B = -0,005 \quad (28)$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 1500 + \frac{2}{p_A + 4} + \frac{3}{p_B + 2} = -\frac{2}{(p_A + 4)^2} \quad (29)$$

Respuesta: Es claro que  $(p_A + 4)^2 > 0$  y de aquí  $\frac{\partial q_A}{\partial p_B} < 0$ , entonces los productos son complementarios.

**Problema 4:** Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dadas por

$$q_A = 100 - 0,02p_A^2 + 0,005p_B^2; \quad q_B = 120 + \frac{p_A}{p_B + 2} \quad (30)$$

Determinar usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

Solución

Las demandas marginales están dadas por:

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \quad (31)$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 100 - 0,02p_A^2 + 0,005p_B^2 = 0,01p_B \quad (32)$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = 20 + \frac{p_A}{p_B + 2} = \frac{1}{p_B + 2} \quad (33)$$

Tomando en cuenta que  $p_B > 0$ , entonces  $p_B + 2 > 0$  y de aquí

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 0,01p_B > 0 \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = \frac{1}{p_B + 2} > 0 \quad (34)$$

Respuesta: En conclusión estos dos productos son competitivos.

**Problema 5:** Las ecuaciones de demanda de dos productos que se interrelacionan están dados por

$$q_A = 200 - 0,03p_A - 0,005p_B^2; q_B = \frac{240p_A}{p_B + 12} \quad (35)$$

Determinar, usando derivadas parciales, si los productos son competitivos, complementarios o ninguno de los dos.

Solución

Calculamos las demandas marginales

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \quad (36)$$

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = 200 - 0,03p_A - 0,005p_B^2 = -0,01p_B \quad (37)$$

$$\frac{\partial q_B}{\partial p_A} = \frac{240p_A}{p_B + 12} = \frac{240}{p_B + 12} \quad (38)$$

Tomando en cuenta que  $p_B > 0$ , entonces  $p_B + 12 > 0$  y de aquí

$$\frac{\partial q_A}{\partial p_B} = -0,01p_B < 0 \text{ y } \frac{\partial q_B}{\partial p_A} = \frac{240}{p_B + 12} > 0 \quad (39)$$

Respuesta: En conclusión estos dos productos no son ni competitivos ni complementarios.

**Problema 6:** La función de demanda de un producto A está dado por

$$x_A = 250 + 0,3p_B - 5p_A^2 \quad (40)$$

Determine  $n_{p_A}$  y  $n_{p_B}$  cuando  $p_A = 6$  y  $p_B = 50$ .

Solución

En este caso tenemos que

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = 250 + 0,3p_B - 5p_A^2 = -10p_A \quad (41)$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 250 + 0,3p_B - 5p_A^2 = 0,3 \quad (42)$$

Si  $p_A = 6$  y  $p_B = 50$ , resulta que

$$x_A = 250 + 0,3p_B - 5p_A^2 \quad (43)$$

$$x_A = 250 + 0,3(50) - 5(6)^2 = 85 \quad (44)$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = -10p_A = -10(6) = -60 \quad (45)$$

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_B} = 0,3 \quad (46)$$

En consecuencia,

$$n_{p_A} = \frac{\partial x_A / \partial p_A}{x_A / p_A} = \frac{-60}{(85/6)} \approx -4,24 \quad (47)$$

Asimismo,

$$n_{p_B} = \frac{\partial x_A / \partial p_B}{x_A / p_B} = \frac{0,3}{(85/50)} \approx 0,176 \quad (48)$$

Repuesta: Por tanto podemos decir que un incremento aproximado del 1% en el precio de A provocará una caída del 4,24% en la demanda de este producto; mientras que un incremento del 1% en el precio de B da como resultado un aumento del 0,176 en la demanda de A.

## Conclusiones

El presente estudio ha demostrado que las derivadas parciales son una herramienta matemática esencial para modelar y comprender las relaciones entre productos en contextos económicos, específicamente en escenarios de productos opuestos y complementarios. Los resultados obtenidos evidencian cómo las funciones de demanda marginal, calculadas a través de derivadas parciales, permiten analizar de manera precisa las variaciones en la demanda de un producto en función de cambios en el precio propio o en el de otro producto. Si bien este análisis proporciona una base cuantitativa relevante para la toma de decisiones estratégicas en mercados dinámicos, es importante considerar que en la teoría económica existen diversos factores, además de los modelos matemáticos, que influyen en la formulación de políticas de precios y estrategias comerciales. Elementos como la elasticidad de la demanda, las condiciones macroeconómicas, el comportamiento del consumidor y la competencia en el mercado también juegan un papel crucial en la toma de decisiones informadas en este ámbito.

Además, la investigación subraya la importancia de integrar enfoques matemáticos en la enseñanza y el análisis económico, ya que no solo facilitan la resolución de problemas complejos, sino que también fomentan el desarrollo de habilidades analíticas y el pensamiento crítico en estudiantes y profesionales del área. La relación entre teoría y práctica, ejemplificada a través de problemas aplicados, fortalece la comprensión significativa de las dinámicas del mercado, contribuyendo a la formación de profesionales más capacitados para

enfrentar los retos de una economía global. En este sentido, este trabajo constituye una base para futuras investigaciones que profundizan en la aplicación de herramientas matemáticas avanzadas en otros contextos económicos.

## Referencias

- Acevedo Montenegro, R. S., Blandón Vindell, C. J., Picado Castillo, C. D., Triminio-Zavala, C. M., & Herrera-Castrillo, C. J. (2024). Resolución de problemas con integrales para el estudio del principio de Arquímedes en física vectorial. *Revista Wani*, 40(80), 1-16. <https://doi.org/10.5377/wani.v40i80.17643>
- Acinas, S. E. (2019). Aplicaciones económicas de optimización con una restricción. *XXVI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines*(34), 10-17. <https://bibliotecadigital.fce.unam.edu.ar/handle/bhp/364>
- Alonso Neira, M. Á. (2024). *Colección de ejercicios de Introducción a la Economía*. Universidad Rey Juan Carlos. <https://burjcdigital.urjc.es/server/api/core/bitstreams/6171431e-7dae-43d5-ba24-ead60a47e214/content>
- Bruto, M. (16 de Septiembre de 2010). *Conozca 3 tipos de investigación: descriptiva, exploratoria y explicativa*. Recuperado el 26 de Abril de 2020, de Academia.edu: [https://www.academia.edu/8101101/Conozca\\_3\\_tipos\\_de\\_investigacion](https://www.academia.edu/8101101/Conozca_3_tipos_de_investigacion)
- Cancio Díaz, Y. (2009). Aplicaciones de la derivada: un enfoque para estudiantes de Economía. *Contribuciones a la Economía*(4), 1-30. <https://www.eumed.net/ce/2009a/ycd.zip>
- Cheng, D. (1998). *Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería*. Pearson. [https://www.academia.edu/36682331/Fundamentos\\_de\\_Electromagnetismo\\_para\\_Ingenieria\\_David\\_K\\_Cheng](https://www.academia.edu/36682331/Fundamentos_de_Electromagnetismo_para_Ingenieria_David_K_Cheng)
- Cruz López, S. L., Miller Sáenz, A. C., Ponce Morales, K. I., & Herrera Castrillo, C. J. (2024). Efectividad de las estrategias para el análisis de diagramas y resolución de problemas. *Revista Educativa HEKADEMOS*(36), 35-52. <https://hekademos.com/index.php/hekademos/article/view/92>
- García Oropeza, L. A. (2009). *Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemática que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de las carreras de ciencias económicas-La Enseñanza Basada en Problemas como estrategia didáctica y metodológica*. Barcelona-España.
- García, L., Moreno, M., Badillo, E., & Azcárate, C. (2011). Historia y aplicaciones de la derivada en las ciencias económicas: Consideraciones didácticas. *Economía*, 36(31), 137-171. [http://iies.faces.ula.ve/Revista/Articulos/Revista\\_31/Pdf/Rev31Garcia.pdf](http://iies.faces.ula.ve/Revista/Articulos/Revista_31/Pdf/Rev31Garcia.pdf)
- Gómez-Luna, E., Fernando-Navas, D., Aponte-Mayor, G., & Betancourt-Buitrago, L. A. (2014). Metodología para la revisión bibliográfica y la gestión de información de temas científicos, a través de su estructuración y sistematización. *DYNA*, 158-163. <http://www.scielo.org.co/pdf/dyna/v81n184/v81n184a21.pdf>
- Grimaldo Muchotrigo, M. (2009). investigación cualitativa. *Manual de la investigación en psicología*. <https://n9.cl/2bpnc>
- Guaypatín Pico, O. A., Quinatoa Arequipa, E. E., Cadena Moreano, J. A., Eugenio Pilliza, C. I., & Pallasco Venegas, M. S. (2024). *Propiedades y operaciones con funciones elementales*. Editorial Internacional Alema. <https://editorialalema.org/libros/index.php/alema/article/view/26>
- Haeussler, J. E., & Richard, J. W. (2008). *Matemáticas para administración y economía*. México: Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.
- Herrera Castrillo, C. J., & López, O. S. (2023). *Material de Apoyo | Álgebra Lineal y Probabilidad II*. Facilitadores. [https://www.researchgate.net/profile/Cliffor-Herrera-Castrillo/publication/378129336\\_Material\\_de\\_Apoyo\\_Algebra\\_Lineal\\_y\\_Probabilidad\\_II/links/65c874cd79007454976fbd0/Material-de-Apoyo-Algebra-Lineal-y-Probabilidad-II.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Cliffor-Herrera-Castrillo/publication/378129336_Material_de_Apoyo_Algebra_Lineal_y_Probabilidad_II/links/65c874cd79007454976fbd0/Material-de-Apoyo-Algebra-Lineal-y-Probabilidad-II.pdf)
- Lardner, R. W., & Arya, J. C. (2009). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y Economía*. México: Pearson Educación .
- Leithold, L. (1994). *El cálculo*. México: Mapasa S.A.
- López Sánchez, N. R., & Herrera Castrillo, C. J. (2023a). Aplicaciones de las derivadas parciales en las Ciencias Económicas: Productividad marginal. *Revista Científica Tecnológica*, 6(3), 42-51. <https://revistas.unan.edu.ni/index.php/ReVTec/article/view/3641>
- López-Sánchez, N. R., & Herrera-Castrillo, C. J. (2023b). Aplicaciones de las derivadas parciales en las Ciencias Económicas: costo marginal. *Ciencia e*

- Interculturalidad, 33(2), 149–164.  
<https://doi.org/10.5377/rci.v33i2.17720>
- López Sánchez, N. R., & Herrera Castrillo, C. J. (2024). Aplicaciones de las derivadas parciales en las ciencias económicas: función de costo y producción. *Revista Torreón Universitario*, 13(37), 161–173.  
<https://doi.org/10.5377/rtu.v13i37.18131>
- Meira Cartea, P. (1997). Proyecto docente. *Manuscrito no publicado*.
- Meza, M. M. (2011). *Cálculo III*. Lima-Perú: THALES S.R.L.
- Najarro Quintero, R., Moposita Ortega, K. D., Egas García, J. P., & Nata Castro, D. J. (2024). *Funciones elementales e interpretación de las derivadas parciales aplicadas a la Ingeniería*. Editorial Internacional Alema.  
<https://editorialalema.org/libros/index.php/alema/article/view/38>
- Nardín Anarela, A. E., Montalván García, M., Salgado Docampo, M. I., & Pérez González, O. L. (2017). Errores de los estudiantes en el tema de derivadas de Funciones de Varias Variables. *Revista Paradigma*, 38(1), 312-330.  
<https://core.ac.uk/download/pdf/322383545.pdf>
- Perdomo Centeno, E. A., & Quimbaya Torres, J. V. (2012). Modelos Económicos. [Tesis de Grado]. Universidad Sur colombiana.  
<https://repositoriousco.co/handle/123456789/559>
- Romero, S., Moreno, F. J., & Rodríguez, I. M. (2021). *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP's)*. Academia Iberoamericana de la Rábida.  
[https://www.uhu.es/sixto.romero/EDP\\_libro.pdf](https://www.uhu.es/sixto.romero/EDP_libro.pdf)
- Sánchez, M. Z., Mejías, M., & Olivety, M. (2022). Diseño de Metodologías Mixtas una revisión de las estrategias para combinar. *Revista electrónica Human@s Enfermería en Red*, 3, 10-13.  
[https://www.portal.uasj.unpa.edu.ar/\\_files/ugd/f9834d\\_784cc19611714c87890006bc7cb4715d.pdf#page=10](https://www.portal.uasj.unpa.edu.ar/_files/ugd/f9834d_784cc19611714c87890006bc7cb4715d.pdf#page=10)
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables-Transcendentes tempranas séptima edición*. México: Cengage-Learning.
- Vásquez, A. S. (2014). *Matemáticas aplicadas a las ciencias económicas y Administrativas, simplicidad Matemática*. México: Grupo Editorial Patria.