DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 10 No. 20 (2023) 85–91

Una nota aritmética: potencias de enteros y dígitos decimales
An arithmetic note: powers of integers and decimal digits

J. Mejía-Juárez [a,*], F. Barrera-Mora [a]

[a] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.*

Resumen

En teoría de números se han formulado y contestado varias preguntas aritméticas que conciernen a la representación de enteros en base 10. Por ejemplo, Kempner (1914) demuestra que al suprimir en la serie armónica a todos los sumandos que no tiene un dígito dado, converge. Recientemente, Maynard (2019) ha demostrado que los primos que no tienen un dígito dado en su representación decimal son infinitos. En relación con la representación de dígitos en base diez se puede formular una amplia gama de preguntas como las que a continuación se formulan. Para un entero n fijo, ¿se puede anticipar el tipo de dígitos que aparecen cuando se eleva n a diversas potencias? Dado un bloque de dígitos, ¿existe u, entero positivo, tal que en la representación decimal de n^u aparezca ese bloque de dígitos? ¿Para cuáles primos p, existe un entero u tal que en la representación decimal de p^u aparezcan bloques de dígitos dados de π? El objetivo de esta nota es dar respuesta a las preguntas anteriores.

Palabras Clave: Potencias de enteros, Dígitos decimales, Subgrupo denso de los reales.

Abstract

In number theory, several arithmetical questions have been formulated and answered concerning the representation of integers in base 10. For example, Kempner (1914) shows that by suppressing in the harmonic series all terms that do not have a given digit, it converges. Recently, Maynard (2019) has shown that the primes that do not have a given digit in their decimal representation are infinite. In connection with the representation of digits in base ten, a wide range of questions can be asked as the following ones. For a fixed integer n, can one anticipate the type of digits that appear when n is raised to various powers? Given a block of digits, is there u, a positive integer, such that in the decimal representation of n^u that block of digits appears? For which primes p, is there an integer u such that in the decimal representation of p^u, given blocks of π appear? The aim of this note is to provide answers to the above questions.

Keywords: Powers of integers, Decimal digits, Dense subgroup of the reals.

1. Introducción

En teoría de números, diversos trabajos han abordado problemas relacionados con la representación de un entero en base diez. Por ejemplo, Kempner (1914) demuestra que la subserie de la serie armónica, que consiste de todos aquellos sumandos $\frac{1}{k}$ tales que k no contiene en su representación en base 10 a un dígito fijo, converge. En años recientes se ha retomado el trabajo de A. J. Kempner. Por ejemplo, Lubeck y Ponomarenko (2018) consideran las subsumas de la serie armónica, y determinan las condiciones para su convergencia. Después aplican estas condiciones para determinar la convergencia de una familia de series que generaliza la serie de Kempner. Gordon (2019), considera las propiedades de convergencia de las series que se forman a partir de la serie armónica mediante la eliminación de algunos términos, su enfoque principal se refiere a la eliminación de aquellos enteros que contienen un determinado dígito en su representación decimal. En otra línea de ideas, pero relacionado con la representación de enteros en una base dada, Maynard (2019), Teoremas 1.1 y 1.2, aborda un problema que estudia la distribución asintótica de los números primos, menores o iguales que un número real dado x. Esto bajo el supuesto que en la expansión decimal de tales primos no aparece un dígito dado. Con los resultados de Maynard también se prueba que hay infinidad de primos que en su expansión decimal no aparece un dígito dado.

En relación con la representación de potencias de enteros en base 10, surge una pregunta interesante: dado un entero positi-

*Autor para correspondencia: 99mejo3@gmail.com
Correo electrónico: 99mejo3@gmail.com (José Israel Mejía-Juárez), fbarrera10147@gmail.com (Fernando Barrera-Mora).

Historial del manuscrito: recibido el 17/10/2022, última versión-revisada recibida el 24/11/2022, aceptado el 28/11/2022, en línea (postprint) desde el 29/11/2022, publicado el 05/01/2023. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v10i20.10064

vo n, ¿se puede anticipar el tipo de dígitos que aparecen cuando se eleva a diversas potencias? De forma más precisa, dado un bloque de dígitos decimales, digamos, $d_1 d_2 \cdots d_k$ y un entero positivo n, ¿existe u, entero positivo, tal que en la representación decimal de n^u aparezca ese bloque de dígitos? Algo aún más concreto es, dado un bloque de k dígitos de π y un primo p, ¿existe un entero u tal que en la representación decimal de p^u aparezca ese bloque de dígitos? El objetivo de este trabajo es dar respuesta a las preguntas anteriores y extenderlas para cualquier base $b \geq 2$.

Antes de iniciar la discusión de los resultados de este trabajo nos parece apropiado, sobre todo desde el punto de vista didáctico, narrar una pequeña historia del resultado principal de esta nota. La pregunta original que se abordó es: dado un entero n que no es potencia de 10, ¿existe un entero positivo u tal que en la expansión decimal de n^u aparezcan todos los dígitos, del cero al nueve? La respuesta es afirmativa y en el proceso de construir el entero u se procedió a incorporar un dígito en cada paso; sin embargo, haciendo un análisis más cuidadoso, se percata uno que se puede demostrar algo más general en un solo hecho, Teorema 3.5. Acontecimientos como el descrito ocurren con cierta frecuencia al resolver problemas y nos parecen de interés para los jóvenes que se están iniciando en el proceso de aprender y desarrollar matemáticas.

2. Preliminares y ejemplos aritméticos

En esta sección presentamos los resultados, notación y términos que usaremos en la discusión, así como un par de ejemplos que ilustran propiedades aritméticas que nos interesan. Aunque algunos son bien conocidos, los recordaremos acá con el fin de que la discusión sea lo más clara posible. El máximo común divisor de los números enteros m y n, con por lo menos uno de ellos no cero, lo denotaremos por $\gcd(m,n)$ y es el mayor entero positivo que divide tanto a m como a n. Cuando $\gcd(m,n) = 1$, los enteros se dicen primos relativos. El mínimo común múltiplo de m y n, denotado $\text{lcm}(m,n)$, es el menor entero positivo que es múltiplo de m y de n. Para un conjunto A, su cardinalidad será denotada por $|A|$.

Como es usual, a los números reales y a los números enteros los denotaremos por $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$ respectivamente. A los números enteros mayores que 0 los denotaremos por $\mathbb{N}$. Para un entero b mayor que 1, $\text{Dig}(b)$ denotará al conjunto de los enteros $\text{Dig}(b) = \{0, 1, 2, \ldots, (b-1)\}$ y sus elementos son llamados los dígitos en base b. También, para el entero b mayor que 1, se declara el conjunto $E_{(b)} = \{b^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Al mayor entero, menor o igual que el número real x, lo denotamos por $\lfloor x \rfloor$. En el proceso de contar elementos de un conjunto se dispone del principio de las cajas o de Dirichlet que se establece en el Teorema 2.1.

Teorema 2.1 (Principio de la caja de Dirichlet)**.** *Dados enteros positivos n y m, con $m > n$. Si m objetos se han de colocar en n cajas, entonces al menos una caja contiene más de un objeto.*

Un resultado importante para representar el máximo común divisor de dos enteros, es la identidad de Bézout. El siguiente teorema se enuncia para dos enteros, sin embargo el resultado se cumple para cualquier cantidad de finita con dos o más enteros.

Teorema 2.2 (Identidad de Bézout)**.** *Dados a y b enteros, con al menos uno no cero, existen x, y enteros, tales que*

$$ax + by = \gcd(a, b). \tag{1}$$

Una de la propiedades fundamentales del conjunto de los números naturales es el Principio del Buen Orden que se estable en el Teorema 2.3.

Teorema 2.3 (Principio del Buen Orden)**.** *Cualquier subconjunto no vacío de los números naturales, A, admite primer elemento, es decir, existe $n \in A$ tal que $n \leq m$ para todo $m \in A$.*

Las demostraciones de los teoremas anteriores, así como el Algoritmo de la división se pueden consultar en Rosen (1986). Como la representación de un entero en una base es de importancia en la discusión del presente trabajo, el Teorema 2.5 garantiza tal representación.

Teorema 2.4 (Algoritmo de la división)**.** *Dados a y b enteros positivos, existen únicos enteros q y r tales que*

$$b = aq + r, \quad con \;\; 0 \leq r < a. \tag{2}$$

Teorema 2.5. *Dado un entero positivo n, existen únicos enteros k y $d_0, d_1, \ldots, d_k$ tales que*

$$n = d_k 10^k + d_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + d_1 10 + d_0, \tag{3}$$

con $d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ y $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Demostración. Por el Algoritmo de la división, existen únicos enteros q_0 y d_0 tales que

$$n = 10q_0 + d_0, \quad \text{con} \;\; 0 \leq d_0 < 10. \tag{4}$$

Si $q_0 > 10$, aplicamos nuevamente el Algoritmo de la división a q_0 y obtenemos:

$$q_0 = 10q_1 + d_1, \quad \text{con} \;\; 0 \leq d_1 < 10. \tag{5}$$

Sustituyendo (5) en (4) se obtiene:

$$n = 10^2 q_1 + d_1 10 + d_0. \tag{6}$$

Este proceso termina en $k + 1$ pasos al obtenerse $q_{k-1} < 10$, obteniendo

$$n = d_k 10^k + d_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + d_1 10 + d_0, \tag{7}$$

con $d_k = q_{k-1}$. □

Este mismo resultado se obtiene para cualquier base $b > 1$. El Teorema 2.5, nos permite establecer la siguiente definición.

Definición 2.6. *Dado un entero positivo n, su representación decimal es*

$$n = d_k 10^k + d_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + d_1 10^1 + d_0, \tag{8}$$

con $0 \leq d_i \leq 9$, para todo $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ y $d_k \neq 0$. A d_k se le llama el dígito principal de n.

Los problemas relacionados con dígitos suelen ser de gran interés, de hecho, algunos de estos problemas resultan ilustrar claramente propiedades aritméticas. Por ejemplo, si en la serie armónica se consideran sumandos en cuyos denominadores se ha suprimido un dígito, entonces la serie obtenida converge. La prueba es didáctica y su significado es transparente a la luz del siguiente lema.

Lema 2.7. *Si $d \in \mathrm{Dig}(10)$, entonces "casi" todos los enteros positivos contienen al dígito d. De manera más precisa, si N_d denota a los enteros positivos menores que 10^n y contienen al dígito d, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|N_d|}{10^n} = 1. \tag{9}$$

Demostración. La demostración se descompone en dos casos. Caso I, $d \neq 0$. Para este caso determinemos la cardinalidad del conjunto N_d. Como estamos interesados en enteros menores que 10^n, podemos identificar a uno de estos enteros con un arreglo de dígitos de longitud menor o igual que n, de hecho podemos tomar cadenas de longitud exactamente igual a n, y en aquellos números que tienen menos de n dígitos, podemos llenar con ceros. Esta idea tiene la finalidad de facilitar el proceso de contar. Lo anterior reduce a contestar la pregunta: ¿cuántos arreglos de longitud n contienen al menos un dígito igual a d? En total, hay 10^n arreglos de longitud n. Dado que el primer dígito se puede elegir de 10 maneras distintas, y lo mismo ocurre con el segundo , el tercero, o cualquier dígito del arreglo. Del mismo modo, si quitamos al dígito d, sólo tenemos 9 opciones para cada dígito. Por lo que, hay 9^n arreglos que no contienen el dígito d. Finalmente, el número de arreglos de longitud n que contienen al menos un dígito igual a d es la diferencia $10^n - 9^n$. De lo cual

$$N_d = 10^n - 9^n. \tag{10}$$

Caso II, $d = 0$. Sea J_k el conjunto de los enteros positivos de exactamente k dígitos que en su expansión decimal tienen al menos un 0. De la descripción de J_k se obtiene $N_0 = |J_n| + |J_{n-1}| + \cdots + |J_2|$, ya que $|J_1| = 0$. Calculemos el valor de $|J_k|$, para $k \in \{2, 3 \cdots, n\}$. Note que los elementos de J_k son arreglos de exactamente k dígitos, con la condición de que el cero nunca puede ocupar la primera posición, por lo que solo podemos acomodar los ceros en el resto de las posiciones. Comenzamos por acomodar $k-1$ ceros, lo cual lo podemos hacer de solo un forma que por conveniencia lo representamos por $\binom{k-1}{k-1}$. Luego, al primer dígito lo podemos elegir de 9 maneras posibles dado que son 9 dígitos restantes. Por lo anterior hay exactamente $9\binom{k-1}{k-1}$ números que contienen solamente $k-1$ ceros. Para acomodar $k-2$ ceros tenemos $\binom{k-1}{k-2}$ formas de hacerlo, luego podemos elegir a los otros dos dígitos de 9^2 maneras diferentes, por lo que tenemos $9^2\binom{k-1}{k-2}$ números que tienen exactamente $k-2$ ceros. Este proceso termina cuando colocamos solo un 0, y en este caso el total de números que solo contienen un 0 es $9^{k-1}\binom{k-1}{1}$. De la igualdad $10^{k-1} = (9+1)^{k-1}$ y el binomio de Newton se obtiene:

$$\begin{aligned} |J_k| &= 9^{k-1}\binom{k-1}{1} + \cdots + 9^2\binom{k-1}{k-2} + 9\binom{k-1}{k-1} \\ &= 9\sum_{j=1}^{k-1}\binom{k-1}{j}9^{k-1-j} \\ &= 9\left(10^{k-1} - 9^{k-1}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Usando esta representación de $|J_k|$ en N_0 obtenemos:

$$\begin{aligned} N_0 &= |J_n| + |J_{n-1}| + \cdots + |J_2| \\ &= 9\left(10^{n-1} - 9^{n-1} + 10^{n-2} - 9^{n-2} + \cdots + 10 - 9\right) \\ &= 9\left(\sum_{j=0}^{n-1} 10^j - \sum_{j=0}^{n-1} 9^j\right) \\ &= 9\left(\frac{10^n - 1}{9} - \frac{9^n - 1}{8}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

De las ecuaciones (10) y (12), dividiendo entre 10^n y tomando límite cuando n se aproxima a infinito se obtiene la conclución del lema.

□

Teorema 2.8. *Si $d \in \mathrm{Dig}(10)$ y A_d es el conjunto de los enteros positivos tales que en su representación decimal no aparece el dígito d, entonces*

$$\sum_{n\in A_d} \frac{1}{n} < \infty. \tag{13}$$

Demostración. Sea $S_m = A_d \cap [10^{m-1}, 10^m)$ con $m \in \mathbb{N}$. La prueba la dividimos en dos casos: cuando $d = 0$ y cuando $d \neq 0$. Observe que la cardinalidad de S_m es igual al total de números mayores o iguales que 10^{m-1}, estrictamente menores que 10^m y que en su representación decimal no contienen al dígito d.

Caso I. Si $d \neq 0$, entonces $|S_m| = 8 \cdot 9^{m-1}$, lo que se obtiene considerando un entero como un arreglo de longitud exactamente igual a m, donde el primer dígito no puede ser d o 0, por lo que tenemos solo 8 posibles maneras de elegir al primer dígito. Para las otras $m-1$ posiciones podemos elegir el dígito de 9 maneras posibles para cada posición. Ahora, si $n \in S_m$, entonces $n \geq 10^{m-1}$ y de esto $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^{m-1}}$, por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{n\in A_d} \frac{1}{n} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in S_m} \frac{1}{n} \\ &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in S_m} \frac{1}{10^{m-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_m|}{10^{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8\cdot 9^{m-1}}{10^{m-1}} = 8\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 80. \end{aligned} \tag{14}$$

Caso II. Para este otro caso, si $d = 0$, siguiendo ideas parecidas al caso $d \neq 0$ pero más sencillas se tiene que $|S_m| = 9^m$. Siguiendo la misma línea de razonamiento que se usó en (14), llegamos a:

$$\sum_{n\in A_d} \frac{1}{n} \leq 9\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{m-1} = 90. \tag{15}$$

En ambos casos la serie armónica restringida, al considerar solamente los enteros que están en el conjunto A_d, es convergente.

□

Un intervalo abierto con extremos a y b lo denotaremos por $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

Definición 2.9. *Un subconjunto $A \neq \emptyset$ de los números reales se dice denso, si para cada $x \in \mathbb{R}$ y para cada $\epsilon > 0$, $A \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\neq \emptyset$.*

La Definición 2.9 se puede interpretar como: dada cualquier longitud y un número real x, siempre se puede encontrar al menos un elemento del conjunto que dista de x en menos que la longitud dada.
Los siguientes resultados se relacionan con hechos de la teoría de números, el primero se le conoce como el Teorema Fundamental de la Aritmética o el teorema de factorización única, y afirma que todo entero positivo mayor que 1 es producto de números primos de forma única.

Teorema 2.10 (Teorema Fundamental de la Aritmética, Silverman (2006) Teorema 7.3, página 47)**.** *Todo entero $n \geq 2$ puede ser factorizado como producto de primos*

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r, \tag{16}$$

de exactamente una forma, salvo el orden de los factores.

Un resultado importante en teoría de números es el que garantiza la irracionalidad de $\sqrt{p}$, donde p es un primo. En el Teorema 2.11 se demostrará este hecho utilizando la idea de un elemento mínimo que satisface cierta propiedad, y después de efectuar operaciones aritméticas se llega a una contradicción. Este método de prueba se debe a Pierre de Fermat y algunos autores le llaman el Método del descenso infinito.

Teorema 2.11. *Si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.*

Demostración. La demostración se hace por contradicción. Si $\sqrt{p}$ fuese racional, entonces por el Principio del Buen Orden, Teorema 2.3, podemos elegir a, el menor natural tal que $a\sqrt{p} \in \mathbb{N}$. De esto se tiene que $a\sqrt{p} - \lfloor \sqrt{p} \rfloor a$ es un número entero y además es positivo. Por otro lado, $0 < \sqrt{p} - \lfloor \sqrt{p} \rfloor < 1$, multiplicando por a esta desigualdad obtenemos un entero positivo menor que a, es decir, $0 < a\sqrt{p} - \lfloor \sqrt{p} \rfloor a < a$. Y de esto se obtiene que $\sqrt{p}(a\sqrt{p} - \lfloor \sqrt{p} \rfloor a) = pa - \lfloor \sqrt{p} \rfloor a \sqrt{p}$ es un entero, contradiciendo la minimalidad de a. Por lo que $\sqrt{p}$ es irracional. □

Como en la sección de los resultados requerimos del concepto de grupo, presentamos algunos términos, definiciones y teoremas básicos relacionados con este concepto.

Definición 2.12. *Un grupo es una pareja $(G, \circ)$, con G un conjunto no vacío, $\circ$ una función de $G \times G \longrightarrow G$ llamada operación binaria y denotada por $\circ(x, y) := x \circ y$, la cual satisface:*

1. *La operación $\circ$ es asociativa, es decir, $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ para todos $x, y, z \in G$.*
2. *Existe $e \in G$ tal que $e \circ x = x \circ e = x$, para todo $x \in G$.*
3. *Dado $x \in G$, existe $x' \in G$ tal que $x' \circ x = x \circ x' = e$.*

En lo que sigue, la operación $\circ$ la denotaremos simplemente por $x \circ y = xy$, (caso multiplicativo) ó $x \circ y = x + y$ (caso aditivo). La notación aditiva, por tradición, se usará cuando $x \circ y = y \circ x$, para todos $x, y \in G$. En este caso diremos que el grupo G es abeliano.

Definición 2.13. *Sea G un grupo y $H \subset G$. Se dice que H es un subgrupo de G si la operación de G restringida a H hace de éste un grupo.*

Si H es un subgrupo de G, se usará la notación $H \leq G$ y se lee "H es subgrupo de G".

Teorema 2.14 (Barrera (2004) Teorema 1.2.5, página 26)**.** *Sea G un grupo, S un subconjunto no vacío de G. Entonces*

$$\langle S \rangle := \{s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n} \mid s_i \in S,\ i_j = \pm 1,\ j = 1, \ldots, n;\ \ n \in \mathbb{N}\} \leq G.$$

De hecho este subgrupo es el mínimo que contiene a S, entendiendo la minimalidad con el orden parcial definido por la inclusión de conjuntos, es decir, $\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset H \leq G} H$.

Definición 2.15. *Con la notación del Teorema 2.14, al subgrupo $\langle S \rangle$ se le llama el "subgrupo generado por S". Un grupo se dice finitamente generado, abreviado f.g. , si G contiene un subconjunto finito S tal que $G = \langle S \rangle$. Si S tiene un solo elemento, G se dice cíclico.*

Si el lector desea revisar la prueba del Teorema 2.14 y conocer más acerca de teoría de grupos, puede consultar Barrera (2004). Con la exposición anterior estamos en condiciones de enunciar y demostrar los resultados que se obtuvieron en este trabajo.

3. Resultados

En esta sección presentamos los resultados que contestan las preguntas planteadas en la introducción. Iniciamos caracterizando a los enteros que pertenecen a $E_{(10)}$. Esto lo haremos mediante la función logaritmo, $\log_{10}$, es decir, dado un entero positivo n, probaremos que $\log_{10}(n)$ es racional exactamente cuando n es potencia de 10. Más precisamente:

Lema 3.1. *Sea $n \geq 1$ un entero. Entonces $\log_{10}(n)$ es racional si y solamente si, $n \in E_{(10)}$.*

Demostración. Es claro que si $n = 10^k$, para algún k, entero no negativo, entonces $\log_{10}(n) = k \in \mathbb{Q}$.

Recíprocamente, supongamos que $\log_{10}(n) = \dfrac{p}{q}$ con p y $q \neq 0$ enteros, entonces $n = 10^{\frac{p}{q}}$. De esto se obtiene

$$n^q = 10^p. \tag{17}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, se tiene que $n = 2^r 5^t$, para algunos enteros r y t. Ahora por la ecuación (17) se obtiene $2^{rq} 5^{tq} = 2^p 5^p$, lo cual implica $rq = p = tq$, concluyendo que $r = t$, es decir, $n = 10^t$. □

El resultado clave para contestar las preguntas que se han formulado en la introducción se funda en el Lema 3.2, el cual algunas veces se enuncia diciendo que los subgrupos aditivos de $\mathbb{R}$ son densos o cíclicos.

Lema 3.2. *Sean $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\mathbb{Z}[r] = \{n + mr \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces $\mathbb{Z}[r]$ es un subgrupo aditivo y denso de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Es inmediato probar que $\mathbb{Z}[r]$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$. Probaremos solamente que $\mathbb{Z}[r]$ es denso. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, definamos $s_n = nr - \lfloor nr \rfloor$. Notemos que s es un múltipo de r más un entero, por lo que pertenece a $\mathbb{Z}[r]$. De la definición de $\lfloor nr \rfloor$ se tiene que $0 \leq s_n \leq 1$ para cada n. Si se alcanza alguna de las igualdades anteriores, entonces implicaría que nr es un entero, contradiciendo la hipótesis de que r es irracional. Además, $s_n = s_m$ si y solamente si $n = m$. De esto se tiene que

$T = \{s_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}[r]$ contenido en el intervalo $]0,1[$. Dado $\epsilon > 0$, existe un entero positivo k tal que $\frac{1}{k} < \epsilon$. Dividamos al intervalo $[0,1]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{k}$. Como T es infinito, por el Principio de la caja de Dirichlet, existen dos elementos de T, digamos s_n y s_m, que están en el mismo subintervalo de longitud $\frac{1}{k}$. Sin perder generalidad podemos suponer que $s_m > s_n$, entonces $0 < s_m - s_n < \frac{1}{k} < \epsilon$. Se ha probado que existe $s = s_n - s_m \in \mathbb{Z}[r]$ y $0 < s < \epsilon$. Para terminar la prueba, consideremos $\alpha \in \mathbb{R}$ positivo y sea $g \in \mathbb{Z}[r]$ tal que $0 < g < \epsilon$. Por el principio arquimediano-eudoxiano, existe un k, entero positivo, tal que $kg \leq \alpha < (k+1)g < kg + \epsilon$. De esto se obtiene $\alpha - \epsilon < kg < \alpha + \epsilon$ y $kg \in \mathbb{Z}[r]$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es negativo, entonces $-\alpha > 0$ y por lo probado antes, existe $g_1 \in \mathbb{Z}[r]$ tal que $-\alpha - \epsilon < g_1 < -\alpha + \epsilon$. Multiplicando esta desigualdad por -1 se obtiene $\alpha - \epsilon < -g_1 < \alpha + \epsilon$, y como $\mathbb{Z}[r]$ es subgrupo, entonces $-g_1 \in \mathbb{Z}[r]$, terminando la demostración. □

Una pregunta natural es ¿cómo se comporta el subgrupo $\mathbb{Z}[r]$ si r es racional? Para responder a esta pregunta demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 3.3. *Si a_j y $b_j \neq 0$, con $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ son enteros, entonces el subgrupo aditivo de los números racionales:*

$$\left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{a_i}{b_i} \mid c_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n \right\} \quad (18)$$

es cíclico. De hecho

$$\left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle = \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle, \quad (19)$$

donde $b = \mathrm{lcm}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ y $a = \gcd\left(\frac{ba_1}{b_1}, \frac{ba_2}{b_2}, \ldots, \frac{ba_n}{b_n}\right)$.

Demostración. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sea $m_j \in \mathbb{Z}$ tal que $m_j a = a_j \frac{b}{b_j}$. Si $c_1 \frac{a_1}{b_1} + c_2 \frac{a_2}{b_2} + \cdots + c_n \frac{a_n}{b_n} \in \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$, y haciendo uso de las definiciones de a y b, se llega a

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{a_i}{b_i} = \frac{a}{b} \sum_{i=1}^{n} c_i m_i \in \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle, \quad (20)$$

probando que $\left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle \subseteq \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle$.

Recíprocamente, si $x \in \left\langle \frac{a}{b} \right\rangle$, entonces existe un entero m tal que $x = m\frac{a}{b}$. Como $\gcd(m_1, \ldots, m_n) = 1$, por la identidad de Bézout, Teorema 2.2, existen enteros $d_1, d_2 \ldots, d_n$ tales que $d_1 m_1 + \cdots + d_n m_n = 1$. Definiendo $c_j = m_j d_j$, por (20) se sigue que $x \in \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$, probando la otra inclusión, con lo que se tiene $\left\langle \frac{a}{b} \right\rangle = \left\langle \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n} \right\rangle$. □

De este resultado se sigue inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 3.4. *Si $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\gcd(a,b) = 1$, entonces $\mathbb{Z}[r] = \left\langle \frac{1}{b} \right\rangle$.*

Demostración. La demostración es consecuencia directa del Teorema 3.3 y de la observación: $\mathbb{Z}[r] = \left\langle 1, \frac{a}{b} \right\rangle$ y $\mathrm{lcm}(1,b) = b$. □

Con el Lema 3.2 y el Teorema 3.3, tenemos una descripción sobre $\mathbb{Z}[r]$ para cualquier $r \in \mathbb{R}$. Este subgrupo es denso en $\mathbb{R}$ o es cíclico. En lo que sigue presentamos una discusión para abordar las preguntas de interés que formulamos al inicio de este trabajo. El siguiente resultado muestra que para cualesquiera números naturales m y n, existe una potencia de n tal que los primeros dígitos de su expansión decimal son todos los dígitos de m.

Teorema 3.5. *Si $n \in \mathbb{N} \setminus E_{(10)}$ y m es un entero positivo, entonces existen enteros no negativos u, e y q tales que*

$$n^u = m10^e + q, \quad con \quad 0 \leq q < 10^e. \quad (21)$$

En particular, si $\gcd(m, 10) = 1$, entonces q se puede elegir igual a cero, si y solamente si, existe un entero positivo a tal que 10^a divide a n y m es potencia de $\frac{n}{10^a}$.

Demostración. La conclusión del Teorema 3.5 se obtendrá si probamos que existen enteros positivos u y e tales que

$$m \cdot 10^e \leq n^u < (m+1) \cdot 10^e. \quad (22)$$

De la Desigualdad (22) y declarando $q = n^u - m10^e$, se tendrá que $0 \leq n^u - m10^e = q < 10^e$, de lo cual se obtiene la Ecuación (21). Por esto enfocamos la atención a probar que la Desigualdad (22) tiene lugar, es decir, mostraremos que existen enteros e y u que satisfacen (22).

Como la función $\log_{10}$ es creciente, entonces aplicándola a la Desigualdad (22) obtenemos

$$e + \log_{10}(m) \leq u \log_{10}(n) < e + \log_{10}(m+1), \quad (23)$$

y de esto

$$\log_{10}(m) \leq u \log_{10}(n) - e < \log_{10}(m+1). \quad (24)$$

Observe que $\log_{10}(m)$ y $\log_{10}(m+1)$ son fijos. Por otro lado, la hipótesis sobre n y el Lema 3.1 implican que $\log_{10}(n)$ es un número irracional. Tomando $r = \log_{10}(n)$ y aplicando el Lema 3.2 se garantiza la existencia de e y u.

Supongamos que $q = 0$, entonces $n^u = 10^e m$. De esta igualdad se obtiene que 2 y 5 dividen a n, por lo que $n = 2^a 5^b k$, con $\gcd(k, 10) = 1$. Elevando a la potencia u se tiene $n^u = 2^{au} 5^{bu} k^u = 10^e m$. Aplicando el Teorema Fundamental de la Aritmética y usando que m y 10 son primos relativos tenemos que $e = au = bu$, concluyendo que $a = b$. De esto último se obtiene que $n = 10^a k$. Elevando a la u esta última igualdad se llega a que $n^u = 10^{au} k^u = 10^e m$. Finalmente, $m = k^u$ como se afirmó.

Recíprocamente, supongamos que existen a y u tales que 10^a divide a n y $m = \left(\frac{n}{10^a}\right)^u$. Entonces $n^u = 10^{ak} m$ y tomando $e = ak$ y $q = 0$, la conclusión se obtiene. □

Del Teorema 3.5, se desprenden dos resultados, a saber: el primero está relacionado con los números primos y el tan distinguido número π. Más precisamente dados los primeros k dígitos de π y un número primo p, existe una potencia de p tal que sus primeros k dígitos son los primeros k dígitos de π. El otro resultado establece que dados enteros m y $l \geq 1$, existe una potencia de n cuya expansión decimal contiene l bloques que consisten de los dígitos de m.

Corolario 3.6. *Dados los primeros k dígitos de π y un número primo p, entonces existe una potencia de p tal que sus primeros k dígitos son los primeros k dígitos de π.*

Demostración. Sean p un número primo, k un entero positivo y $m = \lfloor 10^{k-1}\pi \rfloor$. Se tiene que m es menor que $10^{k-1}\pi$, de donde se deduce que sus primeros k dígitos son iguales a los de π, y aplicando el Teorema 3.5 a m con $n = p$, se tiene que existen enteros u y e tales que $n^u = \lfloor 10^{k-1}\pi \rfloor 10^e + q$, con $q < 10^e$. □

Corolario 3.7. *Sean $s, n, r \in \mathbb{N}$,con $n \notin E_{(10)}$. Entonces existe $u \in \mathbb{N}$ tal que la expansión decimal de n^u contiene r bloques consecutivos de dígitos iguales a los del número s.*

Demostración. Sea $s = b_0 + b_1 10 + \cdots + b_{k-1} 10^{k-1}$ y consideremos el entero $m = s + s10^k + s10^{2k} + \cdots + s10^{(r-1)k}$. Se observa que 10^k tiene k ceros, por lo que la expansión decimal del número $s + s10^k$ contiene dos bloques consecutivos de dígitos iguales a los de s. De manera análoga, 10^{2k} tiene $2k$ ceros, así que la expansión decimal de $s + s10^k + s10^{2k}$ contiene 3 bloques consecutivos de dígitos iguales a los de s, los cuales se obtienen notando que al sumar estos enteros los bloques de ceros van siendo ocupados por los dígitos de s. De manera inductiva se tiene que m, en su expansión decimal, contiene r bloques consecutivos de dígitos iguales a los de s. La conclusión se obtiene del Teorema 3.5 aplicado a m. □

El Teorema 3.5 nos indica que todo el bloque de dígitos de m se debe encontrar en las primeras posiciones de la expansión decimal de alguna potencia de n, pero ¿existe alguna potencia de n tal que todo el bloque de dígitos no se encuentre en las primeras posiciones? El siguiente resultado responde esta pregunta.

Teorema 3.8. *Si $n \in \mathbb{N} \setminus E_{(10)}$ y $m \in \mathbb{N}$ tiene k dígitos, entonces existen enteros u, e, s y q tales que*

$$n^u = 10^{e+k}s + 10^e m + q, \quad con \quad 0 \leq q < 10^e. \tag{25}$$

Demostración. La conclusión del Teorema 3.8 es equivalente al siguiente enunciado: existen enteros s, u y e tales que

$$(10^k s + m) \cdot 10^e \leq n^u < (10^k s + m + 1) \cdot 10^e. \tag{26}$$

Aplicando $\log_{10}$ en la Desigualdad (26) obtenemos:

$$\log_{10}(10^k s + m) + e \leq u \log_{10}(n) < \log_{10}(10^k s + m + 1) + e. \tag{27}$$

Reagrupando términos en (27), esta se transforma en

$$\log_{10}(10^k s + m) \leq u \log_{10}(n) - e < \log_{10}(10^k s + m + 1). \tag{28}$$

Como $\log_{10}(n)$ es un número irracional, para cada $s \geq 1$ la existencia de los enteros u y e (que dependen de s) queda garantizada por el Lema 3.2. Tomando algún valor fijo de $s \geq 1$ se encuentran los valores de u y e. A partir de estos se declara $q = n^u - (10^k s + m)10^e$, el cual satisface las condiciones requeridas.

□

Hasta aquí, cerramos la discusión de los resultados en base 10, pero surgen más preguntas relacionadas con la representación de un entero en base 10. ¿Cómo estimar u en términos de m y n para los cuales el Teorema 3.5 se cumple? ¿Qué dígito ocupa determinada posición de la expansión decimal para alguna potencia de n? Dado $x \in \text{Dig}(10)$, ¿cuántas veces aparece x en la expansión decimal de alguna potencia de n? Estas preguntas nos parecen interesantes y su discusión, posiblemente requiera de un análisis en el que se involucren otras ramas de las matemáticas. Las preguntas planteadas quedan para el lector que haya seguido los detalles de la discusión y puedan ser de su interés. Una vez que hemos cerrado el caso en base 10, se origina una nueva pregunta: ¿se pueden generalizar los resultados discutidos en la sección al caso $b \geq 2$? De esto nos ocuparemos en la siguiente sección.

3.1. Caso general

De igual forma que en base 10, la representación de un entero positivo n en base b, es de la siguiente forma.

Definición 3.9. *Dado un entero positivo n, su representación en base b es*

$$n = d_k b^k + d_{k-1} b^{k-1} + \cdots + d_1 b^1 + d_0, \tag{29}$$

con $0 \leq d_i \leq b - 1$, *para todo* $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ *y* $d_k \neq 0$.

El Lema 3.10 distingue a los enteros que pertenecen al conjunto $E_{(b)}$, ya que para los resultados posteriores se ocupará el Lema 3.2.

Lema 3.10. *Sea $n \geq 1$ un entero. Entonces $\log_b(n)$ es racional si y solamente si, $n \in E_{(b)}$.*

Demostración. Si $n = b^k$, para algún k entero positivo, entonces $\log_b(n) = k \in \mathbb{Q}$.

Supongamos que $\log_b(n) = \dfrac{p}{q}$ con $q \neq 0$, y $b = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ con p_i primos distintos, entonces $n = b^{\frac{p}{q}}$. De esto se obtiene

$$n^q = b^p. \tag{30}$$

Por el Teorema Fundamental de la Aritmética, tenemos que $n = (p_1^{a_1})^{r_1} (p_2^{a_2})^{r_2} \cdots (p_k^{a_k})^{r_k}$. De esto y la Ecuación (30) se obtiene $(p_1^{a_1})^{r_1 q} (p_2^{a_2})^{r_2 q} \cdots (p_k^{a_k})^{r_k q} = (p_1^{a_1})^p (p_2^{a_2})^p \cdots (p_k^{a_k})^p$, lo cual implica $r_i q = p = r_j q$ para toda i y para toda j, concluyendo que $r_i = r_j$, es decir, $n = b^{r_1}$. □

Los Teoremas 3.11 y 3.12 son los análogos a los Teoremas 3.5 y 3.8 respectivamente, cabe mencionar que la prueba de estos es idéntica, es decir, si a las pruebas de los Teoremas 3.5 y 3.8 se cambia la base 10 por base b, se obtiene la prueba de los Teoremas 3.11 y 3.12.

Teorema 3.11. *Sea $n \in \mathbb{N} \setminus E_{(b)}$, entonces para cada entero positivo m, existen enteros positivos u y e tales que*

$$n^u = mb^e + q, \quad con \quad 0 \leq q < b^e. \tag{31}$$

En particular, si $\gcd(m, b) = 1$*, entonces q se puede elegir igual a cero, si y solamente si existe un entero positivo a tal que* b^a *divide a n y m es potencia de* $\frac{n}{b^a}$.

Teorema 3.12. *Si* $n \in \mathbb{N} \setminus E_{(b)}$ *y* $m \in \mathbb{N}$ *tiene k dígitos, entonces existen enteros u, e, s y q tales que*

$$n^u = b^{e+k}s + b^e m + q, \quad con \quad 0 \leq q < b^e. \tag{32}$$

4. Conclusiones

En este trabajo dimos respuesta a preguntas tales como: para un entero n fijo, ¿se puede anticipar el tipo de dígitos que aparecen cuando se eleva n a diversas potencias? Los resultados obtenidos para base 10, se extendieron a cualquier base. En relación con lo anterior y con la finalidad de extender los resultados de este trabajo se puenden considerar las siguientes preguntas. ¿Cómo estimar u en términos de m y n para los cuales el Teorema 3.5 se cumple? ¿Qué dígito ocupa determinada posición de la expansión decimal para alguna potencia de n? Dado $x \in \mathrm{Dig}(10)$, ¿cuántas veces aparece x en la expansión decimal de alguna potencia de n? Estas son algunas posibles preguntas cuya respuesta permitiría un mejor entendimiento de la distribución de los dígitos de un entero al elevarse a diversas potencias.

Agradecimientos

Agradecemos a los revisores sus valiosas observaciones que contribuyeron a mejorar la presentación de este trabajo.

Referencias

Barrera, F. (2004). *Introduccion a la Teoria de Grupos*. Sociedad Matematica Mexicana.

Gordon, A. R. (2019). Comments on subsums of the harmonic series. *The American Mathematical Monthly*, 126:275–279.

Kempner, A. J. (1914). A curious convergent series. *The American Mathematical Monthly*, 21:48–50.

Lubeck, B. y Ponomarenko, V. (2018). Subsums of the harmonic series. *The American Mathematical Monthly*, 125:351–355.

Maynard, J. (2019). Primes with restricted digits. *Invent. math.*, 217:127–218.

Rosen, K. H. (1986). *Elementary Number Theory and lts Applications*. Addison-Wesley Publishing Company.

Silverman, J. H. (2006). *A friendly introduction to number theory*. Pearson Prentice Hall.