

Seguimiento de trayectoria mediante un controlador basado en prealimentación, realimentación de estado y acción integral

Trajectory tracking through a controller based on feedforward, status feedback and integrated action

A. Castaño-Hernández ^a, L. Vite-Hernández ^{a,*}

^aDepartamento de Control Automático, CINVESTAV-IPN, 07360 Ciudad de Mexico, Mexico.

Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de una ley de control por seguimiento de trayectoria aplicado a un péndulo simple. El modelo matemático disponible de la planta tiene la restricción de que los pares gravitacionales se suponen desconocidos. El esquema de control propuesto está basado en la técnica de prealimentación como método para el seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo, la cual complementa a un controlador por realimentación de estado más acción integral. El controlador por realimentación de estado incluye la acción integral con el propósito de compensar los efectos de los pares gravitacionales del sistema. La sintonización de las ganancias del controlador se realiza empleando el método de asignación de polos, proponiendo para ello un polinomio Hurwitz estable. El esquema de control mejora el rendimiento del sistema ante referencias variantes en el tiempo y es capaz de atenuar los efectos de perturbaciones. Los resultados obtenidos vía simulación ilustran la efectividad del esquema de control propuesto.

Palabras Clave: Seguimiento de trayectorias, prealimentación, realimentación de estado, péndulo simple.

Abstract

This manuscript presents a trajectory-tracking controller applied to a simple pendulum. The mathematical model of the plant has the restriction that the gravitational torques are assumed to be unknown. The proposed control scheme is based on a feedforward technique for time-varying trajectory tracking, which complements a state feedback controller plus an integral control action. The state feedback control includes an integral action for compensation of the gravitational torque in the system. The tuning of the control gains is performed using the pole placement method by proposing a stable Hurwitz polynomial. The control scheme improves the performance of the system in the face of time-varying references and can attenuate the effects of disturbances. The results obtained via simulation illustrate the effectiveness of the proposed control scheme.

Keywords: Trajectory tracking, feedforward, state feedback, simple pendulum.

1. Introducción

En un sistema de control, por lo general, la característica más relevante a analizar es la estabilidad (Ogata, 2003). El objetivo de un sistema de control es conseguir que la planta (salida o estado) presente un comportamiento estable mediante la manipulación de alguna entrada, además, muestre un desempeño deseado. Dos problemas de control surgen en función del objetivo que debe satisfacer el sistema, conocidos como, problema de regulación y problema de seguimiento. El problema de regulación consiste en que dada una referencia constante r , se

desea diseñar una ley de control $u = f(x(t), t)$, tal que el estado $x(t)$ o la salida converja a la referencia r conforme $t \rightarrow \infty$. El problema de seguimiento, consiste en que dada una referencia variante en el tiempo $r(t)$, se desea diseñar una ley de control $u = f(x(t), r(t))$, tal que el error entre la salida y la referencia converja a cero. Cada problema de control, a su vez, puede tener distintas versiones, dependiendo de los elementos disponibles para resolverlo (Khalil, 1996).

La dificultad de analizar el problema de seguimiento es mayor en comparación con el estudio del problema de regulación

*Autor para correspondencia: lvite@ctrl.cinvestav.mx

Correo electrónico: acastano@ctrl.cinvestav.mx (Alejandro Castaño Hernández), lvite@ctrl.cinvestav.mx (Leopoldo Vite Hernández).

Historial del manuscrito: recibido el 29/10/2022, última versión-revisada recibida el 29/10/2022, aceptado el 07/11/2022, publicado el 11/11/2022. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial5.10148>



(Åström y Häggglund, 2009; Khalil, 1996; Ogata, 2003). El problema de seguimiento se complica aún más cuando se tratan sistemas no lineales o sistemas lineales sujetos a perturbaciones, o una combinación de ambos. Sin embargo, el avance en la teoría de control ha permitido el desarrollo de diversas técnicas de control y metodologías que pueden ser aplicados para resolver el problema de seguimiento (Spong *et al.*, 2006), donde cada método de control puede tener un impacto significativo en el rendimiento del sistema y por consecuencia, en sus posibles aplicaciones. La importancia de resolver el problema de seguimiento radica en el hecho de que a nivel industrial, y sobre todo en el área de robótica (Barrientos, 2007), las tareas de seguimiento son requeridas.

El control prealimentado (feedforward) es un método que complementa a la realimentación de estado para el seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo (Åström y Häggglund, 2009). Esta técnica mejora la respuesta y el rendimiento del sistema ante cambios en el punto de referencia y reduce el efecto de las perturbaciones presentes en la planta. La prealimentación se construye empleando el inverso de la planta, por lo que conocer los parámetros del sistema o sus estimados son de gran importancia.

En este trabajo, se aplica un control por seguimiento de trayectoria a un péndulo simple, cuyos pares gravitacionales se suponen desconocidos, centrándose en la técnica de prealimentación que complementa un control por realimentación de estado más acción integral. La estrategia de control propuesto representa una alternativa para resolver el problema de seguimiento de trayectorias ante incertidumbres en el modelo del sistema. Cabe mencionar que parte de la contribución del presente trabajo es ilustrar cómo la teoría de control clásica permite resolver problemas relativamente complejos.

El presente trabajo se organiza de la siguiente manera. La sección 2 describe el modelo matemático de un péndulo simple. En la sección 3, se define el problema de control y se describe el esquema de control propuesto, así como su sintonización, garantizando estabilidad del sistema en lazo cerrado. En la sección 4 se presentan simulaciones numéricas del sistema en lazo cerrado y se finaliza con algunos comentarios en la sección 5.

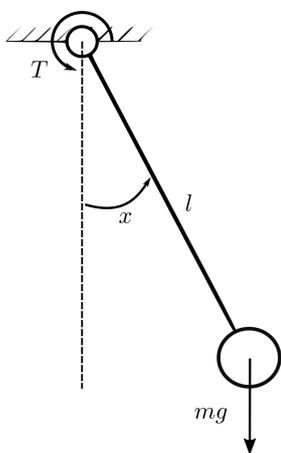


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre del sistema péndulo simple.

2. Modelo matemático

Considere el péndulo simple ilustrado en la Figura 1, donde l representa la longitud del brazo, x denota el ángulo entre la vertical y el brazo, m es la masa de la bola, g es la aceleración de la gravedad, k es el coeficiente de fricción y T es el par de entrada del péndulo. Usando la segunda ley de Newton (Tippens, 2007), la ecuación de movimiento del péndulo en la dirección tangencial está descrito por

$$\ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t) - c \sin(x(t)) + u(t), \tag{1}$$

donde $a = k/m \geq 0$, $c = g/l > 0$, $b = 1/(ml^2) > 0$ y $u(t) = bT$ es la entrada de control. El modelo expresado en (1) representa a la planta real, sin embargo, en el modelo matemático disponible para el diseño del controlador, se suponen desconocidos los pares gravitacionales, es decir,

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) = u(t) - D, \quad y(t) = x(t) \tag{2}$$

donde $y(t)$ es la salida y D representa los pares gravitacionales desconocidos ($D = c \sin(x(t))$), interpretado como una perturbación. Por lo anterior, el sistema péndulo está representado como un sistema lineal perturbado, por lo que en el diseño del controlador, se considera que la acción integral compensa los efectos de los pares gravitacionales, permitiendo el diseño de la prealimentación y de la realimentación de estado más acción integral.

3. Esquema de control propuesto: prealimentación más realimentación de estado y acción integral

El control prealimentado posee un excelente desempeño para tareas de seguimiento de trayectorias bajo condiciones ideales (conocimiento del modelo del sistema y ausencia de perturbaciones), sin embargo, es incapaz de operar adecuadamente cuando estas condiciones no se satisfacen. Por otra parte, si bien el control realimentado no logra los resultados ideales del control prealimentado, garantiza convergencia de la salida del sistema a la referencia deseada de forma asintótica en régimen permanente y es robusto ante incertidumbres en el modelado del sistema o la presencia de ciertas perturbaciones.

En este trabajo, se aprovechan las ventajas de ambas estrategias de control, de modo que, ante condiciones ideales, la salida del sistema y la referencia sean iguales para todo tiempo, mientras que, en caso de no darse estas circunstancias, el sistema en lazo cerrado sea estable asintóticamente (Barrientos, 2007).

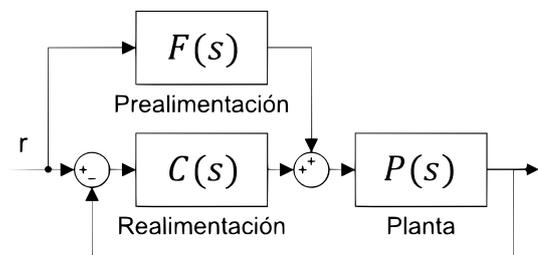


Figura 2: Diagrama a bloques de una prealimentación $F(s)$ más realimentación $C(s)$ de estado aplicado a una planta $P(s)$.

En la Figura 2, se muestra el diagrama a bloques del esquema de control prealimentación+realimentación, donde $C(s)$ es un compensador por realimentación, $F(s)$ es un compensador

por prealimentación y $P(s)$ es la planta. La función de transferencia en lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[F(s) + C(s)]P(s)}{1 + C(s)P(s)}.$$

En vista de $G(s)$, la prealimentación no afecta los polos del sistema en lazo cerrado, únicamente los ceros. Por lo tanto, si la planta $P(s) = N(s)/D(s)$ es de fase mínima, ($N(s)$ es un polinomio estable), entonces, con $F(s) = 1/P(s)$, se tiene que

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{[F(s) + C(s)]P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{P(s)} + C(s) \right] P(s)}{1 + C(s)P(s)} \\ &= \frac{P(s) + C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1 + C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} = 1, \end{aligned}$$

por lo que la salida será igual a la entrada $Y(s) = R(s)$.

En condiciones ideales en las que se conoce el modelo matemático y los parámetros de una planta de forma exacta, se puede elegir la prealimentación como el inverso de la planta, siempre que el sistema sea de fase mínima. Además, la entrada de la prealimentación corresponde a la referencia r y sus dinámicas, por lo que su construcción es relativamente sencilla (Spong *et al.*, 2006). La técnica de prealimentación permite separar el problema de diseño en dos partes (Åström y Hägglund, 2009). Por un parte, se diseña el controlador por realimentación de estado para lograr robustez y un adecuado rechazo de las perturbaciones. Por otro lado, se diseña el controlador por prealimentación con el objetivo de lograr una respuesta adecuada ante cambios en el punto de referencia, permitiendo el seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo. En lo subsecuente, se presenta el diseño de la realimentación de estado con acción integral y el diseño de la prealimentación aplicado a un péndulo simple.

3.1. Realimentación de estado más acción integral

El diseño de la realimentación de estado más acción integral se realiza considerando el modelo matemático (2), donde la acción integral compensa los efectos de los pares gravitacionales del sistema. Por lo tanto, considerando como variables de estado el error $e(t) = r(t) - y(t)$ y su dinámica, se tiene que la realimentación de estado más acción integral está definida por

$$u_r(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\theta) d\theta + k_d \dot{e}(t), \quad (3)$$

donde k_p es la ganancia proporcional, k_i la ganancia integral y k_d la ganancia derivativa. El sistema (2) en lazo cerrado con la ley de control (3), es

$$\ddot{x}(t) + a\dot{x}(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\theta) d\theta + k_d \dot{e}(t) - D(t), \quad (4)$$

donde $y(t) = x(t)$. La función de transferencia de la salida $y(t)$ respecto a la entrada $r(t)$, considerando que la acción integral

compensada los pares gravitacionales ($D = 0$), resulta

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{U_r(s)}{s(s+a)} = \frac{1}{s(s+a)} \cdot \frac{[k_p s + k_i + k_d s^2] E(s)}{s} \\ &= \frac{[k_p s + k_i + k_d s^2][R(s) - Y(s)]}{s^2(s+a)} \\ &= \frac{[k_p s + k_i + k_d s^2]R(s) - [k_p s + k_i + k_d s^2]Y(s)}{s^2(s+a)}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$Y(s)[s^2(s+a) + k_p s + k_i + k_d s^2] = [k_p s + k_i + k_d s^2]R(s),$$

con lo cual

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s^3 + (k_d + a)s^2 + k_p s + k_i}.$$

La función de transferencia de la salida respecto a D , considerando que $r(t) = 0$, se obtiene mediante

$$Y(s) = \frac{U_r(s) - D(s)}{s(s+a)} = \frac{-[k_p s + k_i + k_d s^2]Y(s) - sD(s)}{s^2(s+a)},$$

y con ello

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{-s}{s^3 + (k_d + a)s^2 + k_p s + k_i}.$$

Finalmente, la salida está determinada por

$$Y(s) = \frac{[k_d s^2 + k_p s + k_i]R(s) - sD(s)}{s^3 + (k_d + a)s^2 + k_p s + k_i}$$

y el polinomio característico del sistema (2) en lazo cerrado con la ley de control (3) es

$$p(s) = s^3 + (k_d + a)s^2 + k_p s + k_i. \quad (5)$$

La sintonización de las ganancias se realiza mediante el método de asignación de polos, seleccionando un polinomio Hurwitz estable,

$$p_d(s) = (s + \tau)^3 = s^3 + 3\tau s^2 + 3\tau^2 s + \tau^3, \quad \tau > 0$$

entonces, mediante asignación de polos e igualando los coeficientes de $p(s)$ y $p_d(s)$, las ganancias están determinadas por

$$k_p = 3\tau^2, \quad k_d = 3\tau - a, \quad k_i = \tau^3, \quad (6)$$

los cuales garantizan estabilidad del sistema.

3.2. Realimentación

La prealimentación se diseña empleando el inverso del sistema (2), considerando que la realimentación de estado más acción integral compensan los pares gravitacionales desconocidos y el sistema resultante es de fase mínima. De tal manera, la señal de prealimentación está determinada por

$$\begin{aligned} P(s) = \frac{1}{s(s+a)} &\Rightarrow F(s) = \frac{1}{P(s)} = s^2 + as, \Rightarrow \\ u_p(t) &= \ddot{r}(t) + a\dot{r}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Finalmente, el control por seguimiento de trayectoria de un péndulo simple, de acuerdo a (3) y (7) está dado por

$$u(t) = u_r + u_p = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\theta) d\theta + k_d \dot{e}(t) + \ddot{r}(t) + a\dot{r}(t). \quad (8)$$

4. Ejemplo ilustrativo

En esta sección se presentan los resultados experimentales en simulación numérica de la implementación del control por seguimiento de trayectoria de un péndulo simple. Para efectos de simulación, se considera que el parámetro $a = 1$ y el parámetro $c = 5$. Los parámetros de simulación son: método de integración: Euler1, periodo de integración: $0,001s$ y señal de referencia: $r_0(t) = 2 \sin(2\pi t)$. Dado que la ley de control (7) requiere del conocimiento de la referencia y sus derivadas, y asumiendo que frecuentemente sólo se dispone de la referencia $r_0(t)$, un método para generar la trayectoria de referencia y sus derivadas, se muestra en la Figura 3c, donde si $\alpha > 0$ es lo suficientemente grande, se cumple que $r_0 \approx r$; $\dot{r}_0 \approx \dot{r}$ y $\ddot{r}_0 \approx \ddot{r}$. En este caso, se emplea un valor de $\alpha = 100$. Además, se utiliza la integral del error cuadrático (IEC) como medida de la calidad del seguimiento de una trayectoria,

$$IEC = \int_{T_1}^{T_2} (ke^2) dt \tag{9}$$

donde $k = 100$ es un factor de escalamiento, $e = r - y$ es el error de seguimiento, y T_1, T_2 definen el intervalo de tiempo durante el cual se calcula el IEC. En la Figura 3b, se muestra el diagrama a bloques del cálculo el IEC.

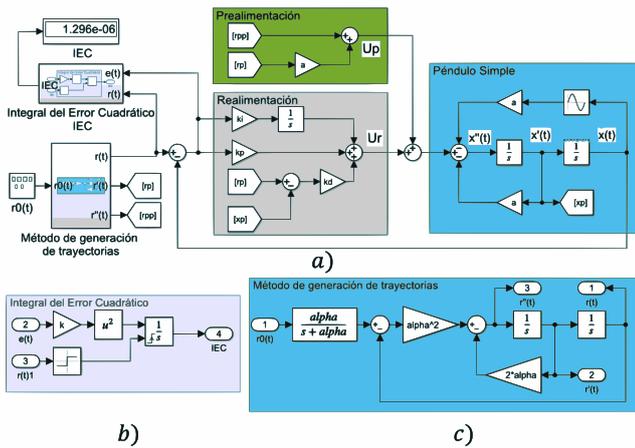


Figura 3: a) Diagrama a bloques del sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control expresada en (8). b) Cálculo de IEC. c) Método de generación de trayectorias.

En la Tabla 1, se muestran las ganancias de la ley de control $u(t)$ expresada en (8), obtenidas mediante la expresión (6) para dos polinomios Hurwitz, $p_{d1}(s) = (s + \tau_1)^3 = (s + 1)^3$, y $p_{d2}(s) = (s + \tau_2)^3 = (s + 31)^3$, así como el valor del IEC como indicador de la calidad del seguimiento de la trayectoria. Se observa que a medida que las ganancias aumentan, el valor de la IEC disminuye, de manera que la salida del péndulo simple ejecuta adecuadamente el seguimiento de la trayectoria $r(t)$, aún cuando se consideran desconocidos los pares gravitacionales del sistema.

Tabla 1: Ganancias sintonizadas mediante la expresión (6).

τ	$k_p = 3\tau^2$	$k_d = 3\tau - a$	$k_i = \tau^3$	IEC
1	3	2	1	4.092
31	2883	92	29791	0.00031

En la Figura 4, se muestra el comportamiento del sistema (1) en lazo cerrado con el control expresado en (8), para las ganancias obtenidas con $\tau = 1$. Se puede observar que la salida del péndulo sigue adecuadamente la trayectoria $r(t) = 2 \sin(2\pi t)$, sin embargo, el valor de la $IEC = 4,092$ (ver Figura 5c), denota que la calidad del seguimiento no es perfecta, existiendo un error entre la salida $y(t)$ y la referencia $r(t)$ tal como se ilustra en la Figura 5b. La señal de control se muestra en la Figura 5a. Con el objetivo de mejorar la calidad del seguimiento de la trayectoria, se propuso un segundo polinomio Hurwitz estable con $\tau = 31$, dando como resultado un $IEC = 0,00031 \approx 0$, ver Figuras 6 y 7. Cabe mencionar que la señal de control requerida para realizar la tarea de seguimiento, es considerablemente alta.

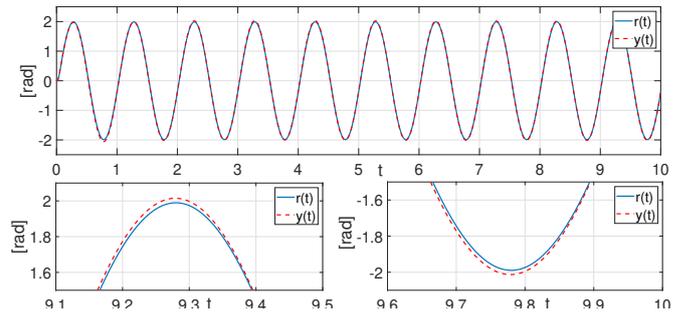


Figura 4: Respuesta del sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control (8), sintonizada mediante (6), con $\tau = 1$, $(k_p, k_d, k_i) = (3, 2, 1)$.

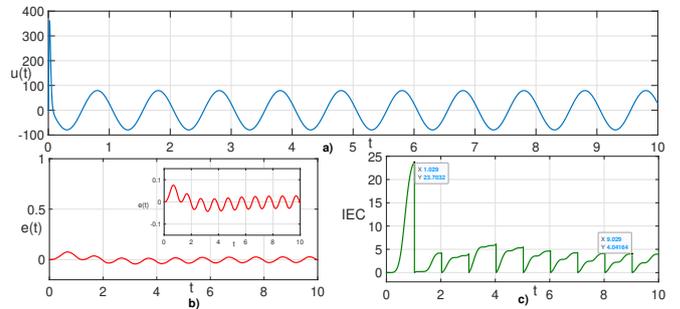


Figura 5: a) Señal de control $u(t)$, b) Señal del error $e(t)$, c) IEC del sistema en lazo cerrado con la ley de control (8), sintonizada mediante (6), con $\tau = 1$, $(k_p, k_d, k_i) = (3, 2, 1)$.

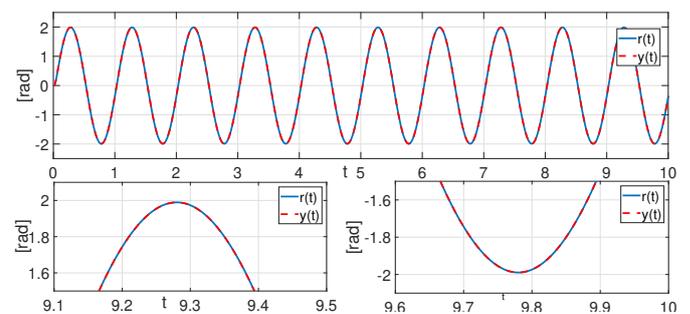


Figura 6: Respuesta del sistema (1) en lazo cerrado con la ley de control (8), sintonizada mediante (6), con $\tau = 31$, $(k_p, k_d, k_i) = (2883, 92, 29791)$.

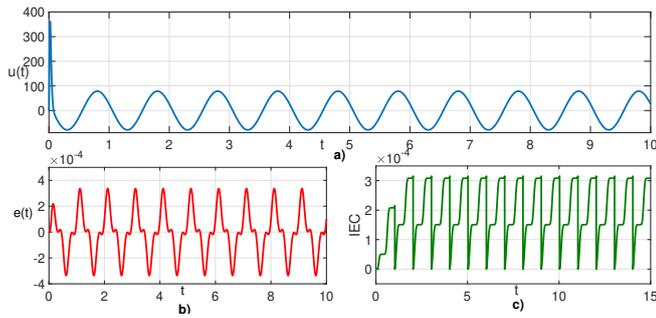


Figura 7: a) Señal de control $u(t)$, b) Señal del error $e(t)$, c) IEC, del sistema en lazo cerrado con la ley de control (8), sintonizada mediante (6), con $\tau = 31$, $(k_p, k_d, k_i) = (2883, 92, 29791)$.

5. Conclusiones

En el presente trabajo, se propuso un esquema de control para el seguimiento de trayectoria de un péndulo simple considerando desconocidos los pares gravitacionales del sistema. La ley de control basada en la técnica de prealimentación que complementa a una realimentación de estado más acción inte-

gral, demostró ser capaz de resolver el problema de seguimiento, incluso, cuando no se cuenta con el modelo real de la planta. Como trabajo futuro se planea establecer una estrategia de sintonización del esquema de control propuesto tal que la amplitud del control sea implementable físicamente. Además, se planea comparar los resultados obtenidos con otras estrategias de control reportadas en la literatura tal como los modos deslizantes o el control por rechazo activo de perturbaciones.

Agradecimientos

El trabajo de todos los autores fue apoyado por el proyecto CONACYT A1-S-24796, México.

Referencias

- Åström, K. J. y Hägglund, T. (2009). *Control PID avanzado*. Pearson, Madrid.
- Barrientos, A. (2007). Fundamentos de robótica.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear systems*, printice-hall. *Upper Saddle River, NJ*, 3.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Spong, Mark W and Hutchinson, Seth and Vidyasagar, Mathukumalli and others (2006). *Robot modeling and control*, volumen 3. Wiley New York.
- Tippens, P. (2007). *Conceptos y aplicaciones*. México: *Mc GrawHill*.