



Cinemática inversa basada en gradiente descendente cuaterniónico para cadenas cinemáticas Inverse Kinematics Based on Quaternionic Descending Gradient for Kinematic Chains

L. R. Lechuga-Gutierrez ^{a,*}, O.A. Domínguez-Ramírez ^b

^aCRIP. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Av. Insurgentes Sur 1582, Col. Crédito Constructor, Alcaldía Benito Juárez, C.P. 03940, Ciudad de México.

^bCentro de Investigación en Tecnologías de Información y Sistemas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

Se propone un algoritmo generalizado para encontrar la cinemática inversa de posición y velocidad de cadenas cinemáticas con articulaciones giratorias de n-DOF. Para ello, se utiliza la técnica del gradiente descendente, encontrando el ajuste cercano en sistemas redundantes utilizando la condición actual, con posibilidad de computar una nueva trayectoria con el propósito de evitar obstáculos. La validación numérica se realiza con dos cadenas cinemáticas, explicando de forma gráfica e intuitiva el método propuesto, de igual manera se presenta una validación experimental en tareas de guiado háptico local utilizando un dispositivo háptico de 3 DOF.

Palabras Clave: Cuaterniones, cinemática de robots, manipuladores de robots, interfaces hápticas, problema del camino más corto.

Abstract

A generalized algorithm is proposed to find the inverse kinematics of position and velocity of kinematic chains with revolute joints of n-DOF. To this end, the descending gradient technique is used, finding the near setting in redundant systems using the current condition, with possibility to compute a new trajectory with the propose to obstacle avoidance. The numerical validation is carried out with two kinematic chains, explaining the proposed method in a graphical and intuitive way, in the same way an experimental validation in local haptic guidance tasks is presented using a 3-DOF haptic device.

Keywords: Quaternions, Robot kinematics, Robots Manipulators, Haptic interfaces, Shortest path problem.

1. Introducción

EL control de movimiento de robots manipuladores con percepción propioceptiva articular, particularmente en tareas de seguimiento de trayectorias, requiere del conocimiento de las relaciones cinemáticas existentes entre el espacio de configuraciones admisibles articular y el espacio de trabajo operacional. El problema de la cinemática directa corresponde en determinar cuál es la posición y orientación del efector final del robot manipulador, en función de las variables articulares. Este problema generalmente se resuelve con artificios trigonométricos y geométricos, o bien; un método sistemático es el propuesto por Denavit-Hartenberg Spong *et al.* (2020), para solución en cadenas cinemáticas complejas. Por otro lado, una forma natural e intuitiva de manejar las rotaciones es el uso del álgebra de cuaterniones Campa *et al.* (2006); Aspragathos y Dimitros (1998); Radavelli *et al.* (2012). El método de rotación y orientación de

un sistema por medio de cuaterniones se introdujo formalmente en una publicación de Shoemake en 1985 Shoemake (1985). Los cuaterniones manejan las rotaciones considerando cuatro números reales dentro de un espacio vectorial hipercomplejo (dos números complejos envueltos dentro de un tercero); y cuyo concepto fue creado por Hamilton (1866), logrando expresar rotaciones en tres dimensiones. Mas recientemente, Hart *et al.* (1994), establecen un sentido geométrico mas intuitivo. Por otro lado, la cinemática inversa de posición, permite determinar el movimiento de una cadena de articulaciones para asegurar que el efector final esté ubicado en una posición y orientación operacional cartesiana específica. El cálculo de la cinemática inversa representa un problema complejo, ya que consiste en resolver una serie de ecuaciones cuya solución generalmente no es única Zhang *et al.* (2013). Los métodos clásicos empleados para su obtención, resultan ser complicados y de alto costo

*Autor para correspondencia: luis.lechuga@conacyt.mx

Correo electrónico: luis.lechuga@conacyt.mx (Luis R. Lechuga-Gutierrez), omar@uaeh.edu.mx (Omar Arturo Domínguez-Ramírez),

Historial del manuscrito: recibido el 08/11/2022, última versión-revisada recibida el 08/11/2022, aceptado el 08/11/2022, publicado el 11/11/2022. DOI: <https://doi.org/10.29057/icbi.v10iEspecial5.10205>



computacional en su evaluación, sobre todo para cierto tipo de robots manipuladores con tareas que requieren de mayor espacio de configuraciones admisibles, y por lo tanto, mayor número de grados de libertad Huang *et al.* (2012). Diversos métodos reportados en la literatura, resuelven el problema de la cinemática inversa, a pesar del costo computacional y la complicación de la implementación de sus algoritmos numéricos Zhang *et al.* (2013); Huang *et al.* (2012); Zhang *et al.* (2018).

1.1. Organización del Artículo

La sección 2, documenta el preliminar matemático de la teoría asociada al álgebra de cuaterniones, y el principio de rotación. La sección 3, presenta el método para obtención del modelo cinemático directo de posición basado en álgebra de cuaterniones; así como, el método para la obtención de los modelos cinemático inverso de posición y de velocidad, basado en el *gradiente descendente*. La sección 4, establece el resultado experimental del método propuesto aplicado a una interfaz háptica Geomagic Touch de tres grados de libertad de posición. La sección 4.3, presenta el resultado de la evaluación experimental asociado al control de movimiento (regulación global), así como la contribución del método propuesto para el mapeo de una trayectoria operacional al espacio articular y su derivada temporal; así mismo, la cinemática directa que establece el comparativo de la tarea del robot y su ejecución en tiempo real. Y finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones.

2. Teoría de Cuaterniones

El álgebra cuaternionica \mathbb{H} fue inventada por W. R. Hamilton en 1843 Hamilton (1853, 1866). Cuando intentó durante casi diez años encontrar un sistema algebraico que sirviera para el espacio \mathbb{R}^4 . Curiosamente, el formalismo actual del álgebra vectorial fue simplemente extraído del producto cuaternionico de dos vectores por Gibbs en 1901, tal que $ab = a \cdot b + a \times b$ Bayro-Corrochano (2010). Los cuaterniones unitarios proporcionan una notación matemática para representar orientaciones y rotaciones de objetos en tres dimensiones. En comparación con los ángulos de Euler, son más simples de componer y evitan el problema del bloqueo de cardán Vince y Vince (2010). En comparación con las matrices de rotación, son más eficientes y más estables numéricamente. Los cuaterniones son útiles en aplicaciones de gráficos por computadora, robótica, navegación y mecánica orbital satelital Goldman (2010); Lechuga-Gutiérrez *et al.* (2018); Yu *et al.* (2011). Un cuaternión se puede expresar como el conjunto:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2 \subset \mathbb{R}^4 \quad (1)$$

donde i, j, k son conocidos como *los imaginarios principales*, que obedecen las reglas de Hamilton:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \quad (2)$$

La multiplicación de estas bases imaginarias no es conmutativa, y se realiza como un producto cruzado con la relación: $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$.

2.1. Rotaciones con Cuaterniones

Una aplicación para los cuaterniones corresponde a los vectores rotativos, tal es el caso de la graficación computacional Vince y Vince (2010). Por ejemplo, sea $P(1, P_0i, P_1j, P_2k)$ un vector, que se desea rotar un ángulo θ alrededor de un eje arbitrario (cuyo vector unitario es \mathbf{v}). El cuaternión que representa la rotación viene dado por:

$$Q = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{v} \quad (3)$$

y la ecuación que describe el movimiento está dado por

$$P' = Q \otimes P \otimes \bar{Q} \quad (4)$$

donde \otimes representa la multiplicación cuaterniónica, mientras que \bar{Q} se refiere al conjugado del cuaternión Q ,

$$\bar{Q} = \cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{v} \quad (5)$$

La representación de un cuaternión en la fórmula de Euler es:

$$e^{\pm\frac{\theta}{2}\mathbf{v}} = \cos\frac{\theta}{2} \pm \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{v} \quad (6)$$

Existe un marco matemático derivado del álgebra de cuaterniones llamado dual-quaternion que se puede utilizar para obtener la cinemática directa de un manipulador con elementos prismáticos Yang *et al.* (2019), para este artículo solo se tratará la arquitectura de cadenas cinemáticas con articulaciones de revolución.

3. Método del Gradiente Descendente Cuaterniónico

La cinemática en el área de la robótica, corresponde al estudio del movimiento del robot sin atender las causas que lo originan (aplicación de fuerzas externas). El espacio operacional o espacio de trabajo, representa la región de operación o ejecución de la tarea del robot; y el espacio articular corresponde a los movimiento angulares que la cadena cinemática adquiere por grado de libertad, registrados a través de la percepción propioceptiva (generalmente codificadores ópticos). El modelo matemático relativo a la cinemática, responde al mapeo de las distintas configuraciones entre los espacios antes descritos. Un problema del control articular de robots con tareas en el espacio operacional, es la solución de la cinemática inversa; diversas contribuciones en la literatura reportan estrategias basadas en la síntesis del modelo matemático o bien, métodos numéricos con alto costo computacional Zhang *et al.* (2013); Huang *et al.* (2012); Zhang *et al.* (2018). En esta sección, se presenta un algoritmo generalizado para la solución numérica del problema de la cinemática inversa, con alto desempeño y estabilidad computacional.

3.1. Cinemática Directa e Inversa

La cinemática directa permite verificar el desempeño que un robot tiene en su espacio operacional a partir de un control articular. La cinemática inversa permite definir la referencia de seguimiento articular a partir de la planificación de movimiento que el robot debe desarrollar en el espacio operacional Spong *et al.* (2020); Silva *et al.* (2009).

3.1.1. Cinemática Directa

La cinemática directa corresponde al conjunto de ecuaciones que permiten calcular la posición y velocidad operacional que el efector final adquiere durante una tarea de seguimiento o regulación, en función de las variables articulares (instrumentación asistida con la percepción propioceptiva articular) Spong *et al.* (2020). Para esto y de manera recursiva, es factible el uso del álgebra de cuaterniones dado el manejo de rotaciones en articulaciones del sistema robótico; en la literatura se promueven resultados novedosos en este contexto Campa *et al.* (2006); Aspragathos y Dimitros (1998); Radavelli *et al.* (2012). En algunos casos, se han realizado estudios con herramientas matemáticas isomorfas a los cuaterniones pero en el marco del álgebra geométrica (Motortes Geométricos) Bayro-Corrochano y Kähler (2000). En este trabajo, el recurso de la cinemática directa, se aborda tan sólo como una extensión de los trabajos citados; tal que el enfoque de la contribución corresponde al cálculo de la cinemática inversa de manipuladores basado en teoría asociada al gradiente descendente Curry (1944) inspirada en el álgebra de cuaterniones.

3.1.2. Cinemática Inversa

La planificación de la tarea de un sistema robótico articulado, generalmente se desarrolla en el espacio de trabajo o espacio operacional; sin embargo, la existencia de la percepción propioceptiva a base de sensores asociados a las articulaciones del robot, representa el diseño e implementación de una estrategia de control de movimiento en el espacio articular. El mapeo instantáneo de la tarea del robot al espacio articular, implica la aplicación de la cinemática inversa de posición y diferencial (velocidad y aceleración). De tal modo que la convergencia en el espacio articular, corresponde a la convergencia en el espacio operacional; los perfiles de movimiento pueden ser corroborados con la aplicación de la cinemática directa (Sección 3.1.1). Esta tarea, es complicada cuando el caso de estudio asume configuraciones redundantes; en el presente trabajo, se propone la solución de la inversa a partir del gradiente descendente con tan solo el conocimiento del Jacobiano analítico y el error operacional.

3.2. Gradiente Descendente y la Solución Numérica de la Cinemática Inversa

3.2.1. Gradiente Descendente

El gradiente descendente de una función multidimensional $f(x)$ con $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ donde d es el número de dimensiones, representa la forma en que la función varía con respecto a una de sus d dimensiones. De esta manera, el gradiente g_{x_1} expresa la forma en que la función $f(x)$ varía con respecto a x_1 Jiménez *et al.* (2016); Curry (1944). Dicho gradiente se define apropiadamente como:

$$g_{x_1} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \quad (7)$$

y determina un mínimo de la función, ya sea local o no, utilizando la ecuación siguiente:

$$x_1(h) = x_1(h-1) - \alpha \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \quad (8)$$

donde $x_1(h-1)$ es el valor anterior de la variable x_1 en la función $f(x)$ y $x_1(h)$ corresponde al valor actual de x_1 , que en $f(x)$ tiende a un mínimo local respecto a x_1 .

3.2.2. Cinemática Inversa de Posición

El gradiente descendente representa la base de aprendizaje en muchas áreas de ingeniería Jones (2005), que consiste en encontrar un parámetro que minimice una función de costo (función de error). La aplicación de este método para encontrar la cinemática inversa es descrita a continuación:

$$\vec{\theta}(h) = \vec{\theta}(h-1) - \alpha \frac{\partial E_c(h-1)}{\partial \vec{\theta}} \quad (9)$$

donde $\theta(h) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de ángulos asociados a la cadena cinemática en el instante h y $\theta(h-1) \in \mathbb{R}^n$ es el vector en un instante anterior, α es la tasa de aprendizaje o en este caso, una tasa de ajuste para la velocidad de convergencia, y $\frac{\partial E_c}{\partial \theta}$ es el gradiente de la función de coste que se desea minimizar $E_c \in \mathbb{R}^n$ con respecto a θ :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_c}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

donde E_c se propone de acuerdo con el criterio de regresión lineal, con el método de mínimos cuadrados Hamming (2012), por lo que se obtiene:

$$E_c = \frac{(P_d - P_f)^2}{2}, \quad \{P_d, P_f\} \in \mathbb{H} \quad (11)$$

siendo P_d y P_f el punto y la posición deseados del efector final del manipulador respectivamente (ambos son cuaterniones) y específicamente P_f es la evaluación de la cinemática directa, es decir:

$$E_c = \frac{[(P_{dx} - P_{fx})\mathbf{i} + (P_{dy} - P_{fy})\mathbf{j} + (P_{dz} - P_{fz})\mathbf{k}]^2}{2} \quad (12)$$

y como $Q^2 = Q \otimes \tilde{Q}$, la ecuación Ec.12 es:

$$E_c = \frac{(P_{dx} - P_{fx})^2 + (P_{dy} - P_{fy})^2 + (P_{dz} - P_{fz})^2}{2} \quad (13)$$

entonces:

$$E_c = \frac{E_x^2}{2} + \frac{E_y^2}{2} + \frac{E_z^2}{2} \quad (14)$$

así que la ecuación 10 es descrita por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_c}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_3} \\ \vdots \\ \frac{\partial E_c}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} E_x \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_1} + E_y \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_1} + E_z \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_1} \\ E_x \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_2} + E_y \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_2} + E_z \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_2} \\ E_x \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_3} + E_y \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_3} + E_z \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_3} \\ \vdots \\ E_x \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_n} + E_y \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_n} + E_z \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$= -[E_x \quad E_y \quad E_z] \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_{fx}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_{fy}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial P_{fz}}{\partial \theta_n} \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde la ecuación Ec.16 queda representada de la manera siguiente:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \vec{\theta}} = -EJ \quad (17)$$

siendo $J \in \mathbb{R}^n$ y representa la matriz Jacobiana analítica del sistema robótico, y E es el vector de error. Por lo que la ecuación Ec.9 queda reducida de la siguiente manera:

$$\vec{\theta}(h) = \vec{\theta}(h-1) + \alpha EJ \quad (18)$$

3.2.3. Cinemática Inversa de Velocidad

La cinemática inversa del modelo de velocidad determina la velocidad de las variables articulares a partir de la velocidad de la coordenada operacional deseada en el espacio de trabajo. Este modelo generalmente se obtiene calculando el inverso de la matriz Jacobiana y multiplicándolo por el vector de velocidad operacional. Y en caso de que la matriz Jacobiana no sea cuadrada, se aplica la pseudo-inversa Fuente *et al.* (2014); Radavelli *et al.* (2015). En esta sección se presenta que es posible obtener la cinemática inversa de la velocidad de una manera alternativa. Si el vector de velocidad articular $\vec{\theta}(h)$ en el instante h , es:

$$\vec{\theta}(h) = \frac{\vec{\theta}(h) - \vec{\theta}(h-1)}{\Delta t} \quad (19)$$

donde Δt es el tiempo de muestreo, por lo tanto, de la ecuación Ec.18 se tiene:

$$\vec{\theta}(h) - \vec{\theta}(h-1) = \alpha EJ \quad (20)$$

dividiendo la Ec.20 entre Δt , se tiene:

$$\frac{\vec{\theta}(h) - \vec{\theta}(h-1)}{\Delta t} = \frac{\alpha EJ}{\Delta t} \quad (21)$$

proponiendo $\beta = \frac{\alpha}{\Delta t}$, entonces la ecuación final para obtener la cinemática inversa de la velocidad:

$$\vec{\theta}(h) = \beta EJ \quad (22)$$

3.3. Ejemplo: Modelo Cinemático Inverso para un Robot Planar de 2 Grados de Libertad

Con el propósito de validación numérica del método propuesto, una cadena cinemática de 2 grados de libertad, representativa de un manipulador robótico planar, es empleada. Se establecen dos experimentos numéricos, y se visualiza el desempeño gráfico del método asociado a la ecuación Ec.18. Se encuentra un conjunto de configuraciones admisibles en el espacio articular y que, de manera instantánea, el robot debe adquirir para alcanzar la referencia en el espacio operacional. La solución de la cinemática inversa no siempre es única, tal y como en la Figura 1 se describe.

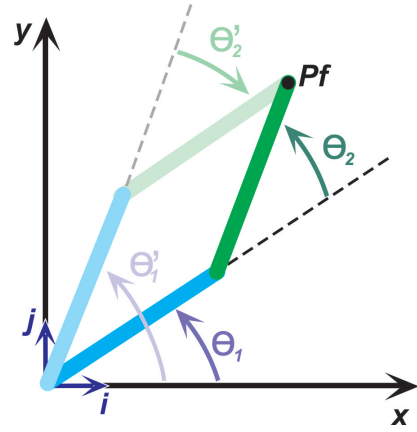


Figura 1: Configuraciones codo arriba y codo abajo respecto a P_f .

Los parámetros para el caso de aplicación, son: **i**) longitud de los eslabones: $L_1 = 0,1m$ y $L_2 = 0,1m$; **ii**) condición inicial en el espacio articular: $\theta_1 = -100^\circ$ y $\theta_2 = 30^\circ$, y **iii**) referencia en el espacio operacional: $P_d = [P_{dx} \quad P_{dy}] = [0,0292 \quad 0,1267]m$. El sistema de 2 grados de libertad propuesto, es mostrado en la Figura 1; en donde ambos ejes de rotación, son $v_1 = 1 + 0i + 0j + 1k$ y $v_2 = 1 + 0i + 0j + 1k$ paralelos al eje z en la dirección k . Por lo tanto, los cuaterniones que definen la rotación respecto a los ejes v_1 y v_2 , son: $Q_1 = \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} k$, y $Q_2 = \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} k$. Por lo que, la cinemática directa de posición cuaterniónica, para el caso del ejemplo, es:

$$P_f = Q_1 L_{Q1} \widetilde{Q}_1 + Q_2 L_{Q2} \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1, \quad (23)$$

en donde, $L_{Q1} = 1 + L_1 i + 0j + 0k$ y $L_{Q2} = 1 + L_2 i + 0j + 0k$ para la condición inicial articular en cero. La matriz Jacobiana analítica (a partir de la definición Spong *et al.* (2020); Silva *et al.* (2009)), y considerando a la Ec.23, así como a los vectores cuaterniónicos asociados a cada eje de rotación (θ_1 y θ_2), es descrita a continuación:

$$J = \begin{bmatrix} J_{Q1} \\ J_{Q2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} k Q_1 L_{Q1} \widetilde{Q}_1 + k Q_2 L_{Q2} \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1 \\ Q_1 k Q_2 L_{Q2} \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

donde k es el cuaternión de rotación. Simplificando los productos cuaterniónicos en la Ec. 24, la matriz Jacobiana analítica definida en términos de las variables articulares (θ_1 y θ_2), es:

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

en donde $s_1 = \text{sen}(\theta_1)$, $s_{12} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$, $c_1 = \text{cos}(\theta_1)$, $c_{12} = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)$.

La Ec. 25, es requerida para el cálculo de la cinemática inversa de posición y velocidad (Ecs. 18 y 22); de la misma manera la función de error asociado con este sistema, es:

$$E = \begin{bmatrix} E_x & E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{dx} - P_{fx} & P_{dy} - P_{fy} \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde P_{fx} y P_{fy} son las coordenadas operacionales para x y y respectivamente (Ec. 23), las coordenadas operacionales deseadas corresponden a P_{dx} y P_{dy} para la posición del efector final.

A partir de la ecuación (Ec.18), se establece la expresión de ajuste para la cinemática inversa:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1(h) \\ \theta_2(h) \end{bmatrix}^T &= \begin{bmatrix} \theta_1(h-1) + \alpha(E \otimes J_{Q1}) \\ \theta_2(h-1) + \alpha(E \otimes J_{Q2}) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1(h-1) + \alpha(E_x J_{11} + E_y J_{21}) \\ \theta_2(h-1) + \alpha(E_x J_{12} + E_y J_{22}) \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (27)$$

donde $\theta_1(h)$ y $\theta_2(h)$ representan a las variables articulares θ_1 y θ_2 en el instante h , tal que $\theta_1(h-1)$ y $\theta_2(h-1)$ acontecen en un instante previo $h-1$. En el anexo ??, se presenta el segmento de código en Matlab versión R2018b asociado al cálculo numérico de la cinemática inversa cuaterniónica. La Figura ?? permite verificar el desempeño de la cinemática del robot manipulador de ejemplo, a partir de la condición inicial $P_0 = [P_{x0} \ P_{y0}] = [0,0168 \ -0,1925]m$ y las diferentes configuraciones que asume en el cálculo instantáneo de la coordenadas operacionales $P_f = [P_{fx} \ P_{fy}]$, hasta adquirir la condición deseada $P_d = [P_{dx} \ P_{dy}] = [0,0292 \ 0,1267]m$. La prueba de convergencia numérica, se aprecia con el gráfico del error cuadrático medio E_c . En el experimento numérico, se asume la solución codo abajo, logrando la convergencia en 30 iteraciones para un paso $\alpha = 33$. La Figura 2, presenta el comportamiento del campo vectorial asociado al gradiente del error cuadrático medio E_c ; así como la conducta de las variables articulares en cada instante, a partir de la condición inicial y, hasta alcanzar la configuración deseada. Las curvas de nivel en el plano de fase (θ_1 vs θ_2), permiten visualizar la existencia de dos mínimos locales relativos a las dos soluciones que puede adquirir la configuración del robot de ejemplo (codo abajo y codo arriba). La solución depende de la condiciones inicial y deseada. En este gráfico es posible evidenciar la solución codo abajo dadas la condición inicial en ($\theta_{01} = -100^\circ$, $\theta_{02} = -30^\circ$) y condición deseada en ($\theta_{d1} = 27,5634^\circ$, $\theta_{d2} = 98,9129^\circ$). El cálculo de la cinemática inversa, basado en el teorema del gradiente descendente, encuentra la configuración articular más cercana a la condición inicial. Para ejemplificar en el caso de estudio, se propone una segunda condición inicial en $P_0 = [P_{x0} \ P_{y0}] = [0,0469 \ -0,1751]m$ con la misma coordenada operacional deseada. En la Figura ??, se presenta el desempeño en el espacio operacional (configuración final en codo arriba), así como el gráfico del error cuadrático medio E_c como prueba de convergencia numérica. La Figura ?? presenta el comportamiento del campo vectorial asociado al gradiente del error cuadrático medio E_c ; así como la conducta de las variables articulares en cada instante, a partir de la condición inicial en ($\theta_{01} = -50^\circ$, $\theta_{02} = -50^\circ$) y condición deseada en ($\theta_{d1} = 126,4531^\circ$, $\theta_{d2} = -98,9089^\circ$). Las curvas de nivel en el plano de fase (θ_1 vs θ_2), permite visualizar la selección del segundo mínimo local y que representa la configuración codo arriba.

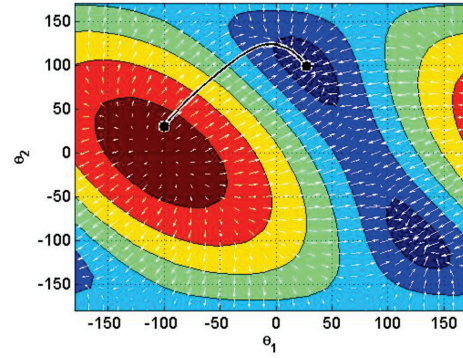


Figura 2: Gradiente del error cuadrático medio E_c en el espacio articular en configuración codo abajo.

4. Validación Experimental: Planificación Operacional y Guiado Háptico Pasivo

Un dispositivo háptico, como el que se emplea para la demostración experimental (Geomagic Touch Silva *et al.* (2009)) en tareas de regulación global (guiado háptico pasivo Dominguez-Ramirez (2003)), es un mecanismo de eslabones articulados que permite la interacción con mundos virtuales dinámicos, así como reales en entornos locales o remotos. Las tareas de interacción física hombre-robot y aplicación de protocolos de neurorehabilitación con este tipo de dispositivos, como en Turijan-Rivera *et al.* (2013b) y Turijan-Rivera *et al.* (2013a), requieren de tareas de seguimiento de trayectorias. La percepción propioceptiva de un dispositivo háptico acontece en el espacio articular, tal que las estrategias de control de movimiento (posición y velocidad variantes en el tiempo) son en el espacio articular. La planificación de protocolos de guiado háptico pasivo, tal y como se describe en la literatura, corresponden a trayectorias en el espacio operacional (ecuaciones paramétricas). Con este propósito, se determina la cinemática inversa de posición y velocidad cuaterniónicas para mapear la referencia en el espacio articular, como entrada para una ley de control PID (proporcional-integral-derivativa) Spong *et al.* (2020).

4.1. Cinemática Directa del Dispositivo Háptico Geomagic Touch

La cinemática directa de posición cuaterniónica, del dispositivo háptico Geomagic Touch (DH-GT), es determinada a partir de las Figuras 6 y 7 Silva *et al.* (2009). Los parámetros del DH-GT son: **i)** $L_1 = L_2 = 0,135m$ y representan la longitud de sus eslabones; y **ii)** $A = 0,035m$, $L_4 = L_1 + A$ y $L_3 = 0,025m$, corresponden a variables auxiliares. Las ecuaciones que describen la condición inicial ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$), son: $L_{Q1} = 1 + 0i + 0j + L_1k$ y $L_{Q2} = 1 + 0i - L_2j + 0k$; cuyos vectores de rotación son: $v_1 = 0i + 1j + 0k$, $v_2 = 1i + 0j + 0k$ y $v_3 = 1i + 0j + 0k$ respectivamente. Q_1 , Q_2 y Q_3 corresponden a los cuaterniones que definen la rotación respecto a los ejes v_1 , v_2 y v_3 , son definidos a continuación: $Q_1 = \cos \frac{\theta_1}{2} + \sin \frac{\theta_1}{2} \mathbf{j}$, $Q_2 = \cos \frac{\theta_2}{2} + \sin \frac{\theta_2}{2} \mathbf{i}$ y $Q_3 = \cos \frac{\theta_3}{2} + \sin \frac{\theta_3}{2} \mathbf{i}$.

La Figura 7, establece un marco ortonormal de referencia en el

origen (como manipulador robótico); sin embargo, cómo dispositivo háptico es representado en la coordenada operacional asociada al punto P_2 . Una transformación de coordenadas de posición es establecida a través del cuaternión $Q_d = 0 + 0i + L_3j - L_4k$. La cinemática directa de posición cuaterniónica del DH-GT, es definida a continuación:

$$P_f = Q_1 Q_2 L_1 \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1 + Q_1 Q_3 L_2 \widetilde{Q}_3 \widetilde{Q}_1 + Q_d \quad (28)$$

$$= \begin{bmatrix} -s_1(L_1 c_2 + L_2 s_3) \\ L_3 + L_1 s_2 - L_2 c_3 \\ -L_4 + c_1(L_1 c_2 + L_2 s_3) \end{bmatrix}$$

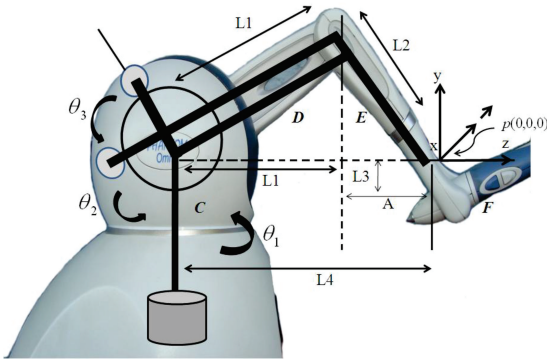


Figura 6: Cadena cinemática del dispositivo háptico Geomagic Touch Silva et al. (2009)

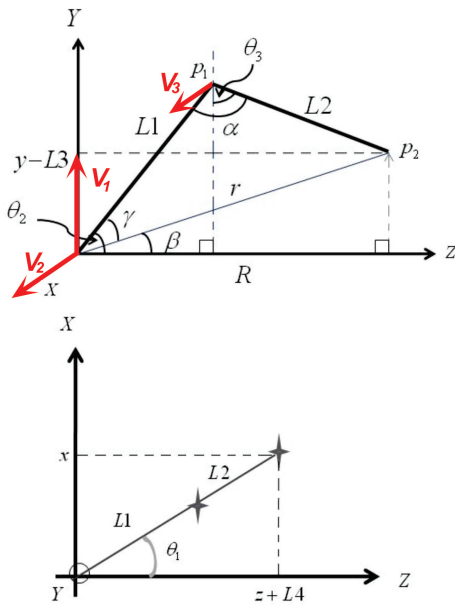


Figura 7: Proyección ortogonal geométrica del DH-GT respecto a los planos (Y-X)-Z y X-Z.

4.2. Cinemática Inversa del Dispositivo Háptico Geomagic Touch

La cinemática inversa de posición cuaterniónica del DH-GT, es determinada a partir de la condición inicial $P_0 = [P_{x0} \ P_{y0} \ P_{z0}] = [-0,0614 \ -0,2236 \ -0,1306]m$ y las diferentes

configuraciones que asume en el cálculo instantáneo de la coordenadas operacionales $P_f = [P_{fx} \ P_{fy} \ P_{fz}]$, hasta adquirir la condición deseada $P_d = [P_{dx} \ P_{dy} \ P_{dz}] = [0 \ 0 \ 0]m$. La prueba de convergencia numérica, se aprecia con el gráfico del error cuadrático medio E_c . El experimento numérico, verifica la convergencia en 30 iteraciones para un paso $\alpha = 19$ (Figura 8). La Figura 9, presenta el comportamiento del campo vectorial asociado al espacio articular; así como el desempeño en el espacio operacional en cada instante, a partir de la condición inicial y, hasta alcanzar la configuración deseada. En la Figura 8 es posible evidenciar la solución de la inversa a partir de la condición inicial en $(\theta_{01} = 1rad, \theta_{02} = 0rad, \theta_{03} = -1rad)$ y condición deseada en $(\theta_{d1} = -0,3122rad, \theta_{d2} = 1rad, \theta_{d3} = 0,735rad)$. Tal y como advierten las ecuaciones de la cinemática inversa (Ecs. 18 y 22), la matriz Jacobiana cuaterniónica (Ec. 29) que deriva en la definición de los elementos de la matriz Jacobiana analítica J_{ij} para el DH-GT de la prueba experimental; son descritos a continuación:

$$J = \begin{bmatrix} J_{Q1} \\ J_{Q2} \\ J_{Q3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} jQ_1 Q_2 L_1 \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1 + jQ_1 Q_3 L_2 \widetilde{Q}_3 \widetilde{Q}_1 \\ Q_1 i Q_2 L_1 \widetilde{Q}_2 \widetilde{Q}_1 \\ Q_1 i Q_3 L_2 \widetilde{Q}_3 \widetilde{Q}_1 \end{bmatrix}^T \quad (29)$$

$$J_{11} = -s_1(L_1 c_2 + L_2 s_{23})$$

$$J_{21} = 0$$

$$J_{31} = c_1(L_1 c_2 + L_2 s_{23})$$

$$J_{12} = -c_1(L_1 s_2 + L_2 c_{23})$$

$$J_{22} = L_1 c_2 + L_2 s_{23}$$

$$J_{32} = -s_1(L_1 s_2 + L_2 c_{23})$$

$$J_{13} = c_1(L_1 c_2 + L_2 c_{23})$$

$$J_{23} = L_1 s_2 + L_2 s_{23}$$

$$J_{33} = s_1(L_1 c_2 + L_2 s_{23})$$

en donde $s_1 = \text{sen}(\theta_1)$, $s_2 = \text{sen}(\theta_2)$, $s_{23} = \text{sen}(\theta_2 + \theta_3)$, $c_1 = \text{cos}(\theta_1)$, $c_2 = \text{cos}(\theta_2)$, $c_{23} = \text{cos}(\theta_2 + \theta_3)$. La ecuación de error operacional, empleada para el cálculo de la cinemática inversa es:

$$E = [E_x \ E_y \ E_z] \quad (30)$$

$$= [P_{dx} - P_{fx} \ P_{dy} - P_{fy} \ P_{dz} - P_{fz}]$$

donde P_{fx} , P_{fy} y P_{fz} son las coordenadas operacionales para x , y y z respectivamente (Ec. 28), las coordenadas operacionales deseadas corresponden a P_{dx} , P_{dy} y P_{dz} para la posición del efector final. A partir de la ecuación (Ec.18), se establece la expresión de ajuste para la cinemática inversa del DH-GT:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(h) \\ \theta_2(h) \\ \theta_3(h) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \theta_1(h-1) + \alpha(E \otimes J_{Q1}) \\ \theta_2(h-1) + \alpha(E \otimes J_{Q2}) \\ \theta_3(h-1) + \alpha(E \otimes J_{Q3}) \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \theta_1(h-1) + \alpha(E_x J_{11} + E_y J_{21} + E_z J_{31}) \\ \theta_2(h-1) + \alpha(E_x J_{12} + E_y J_{22} + E_z J_{32}) \\ \theta_3(h-1) + \alpha(E_x J_{13} + E_y J_{23} + E_z J_{33}) \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

En donde $E \otimes J_{Qn}$ representa el producto cuaterniónico; por

otro lado, $\theta_1(h)$, $\theta_2(h)$ y $\theta_3(h)$ representan a las variables articulares θ_1 , θ_2 y θ_3 en el instante h , tal que $\theta_1(h-1)$, $\theta_2(h-1)$ y $\theta_3(h-1)$ acontecen en un instante previo $h-1$.

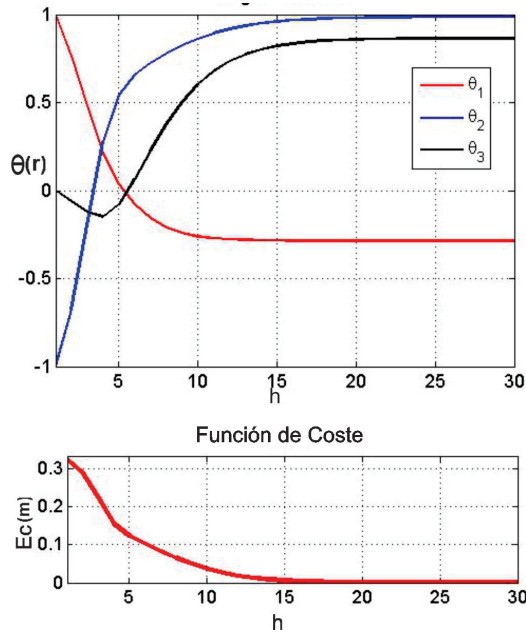


Figura 8: Desempeño de las variables articulares $\theta_1(h)$, $\theta_2(h)$ y $\theta_3(h)$ en el instante h ; y la convergencia del error cuadrático medio E_c .

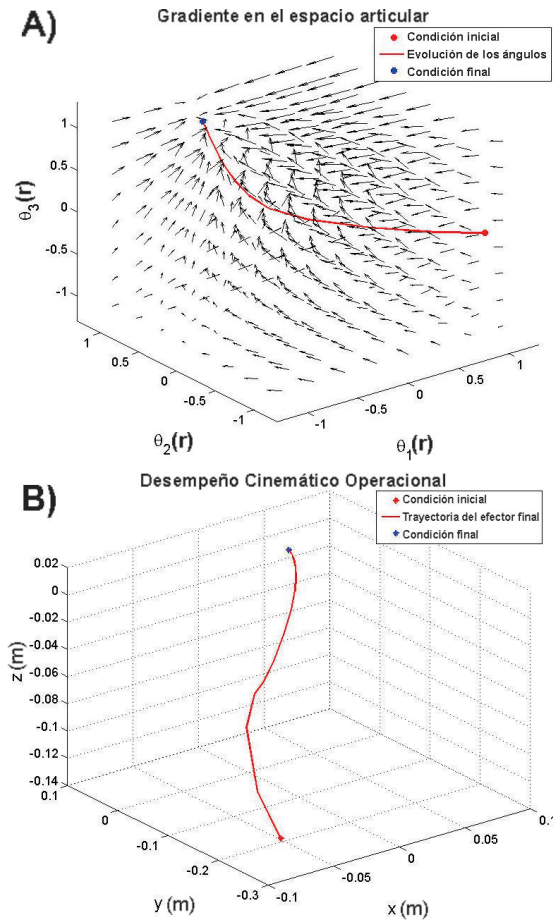


Figura 9: Desempeño en el espacio de trabajo de las coordenadas operacionales $P_{fx}(h)$, $P_{fy}(h)$ y $P_{fz}(h)$ en el instante h .

4.3. Prueba Experimental en Control de Movimiento

En sistemas de interacción física hombre-robot (HRpI), en que el operador humano es guiado de forma pasiva en el espacio operacional Dominguez-Ramirez (2003)Turijan-Rivera *et al.* (2013b), tiene múltiples aplicaciones (por ejemplo: entrenamiento, entretenimiento, exploración guiada, diagnóstico y rehabilitación física). La tarea de control de movimiento, representa garantizar el seguimiento de trayectorias operacionales definidas como consigna; considerando que el diseño del control se establece en el espacio articular (dada la señal suministrada por la percepción propioceptiva), la cinemática inversa de posición y velocidad es requerida. Con este propósito, se establece la tarea del dispositivo háptico Geomagic Touch (Figura 6) en lazo cerrado con un control PID (Proporcional Integral Derivativo) para sistemas MIMO Spong *et al.* (2020). Para ello, la tarea y parámetros de control son definidos a continuación:

4.3.1. Tarea de Guiado Háptico

La tarea de guiado háptico pasivo, corresponde al seguimiento de una circunferencia en el espacio operacional, y cuya función vectorial deseada es definida como:

$$\vec{P}_d(x_d, y_d, z_d) = (r \cos(\omega t))\hat{i} + 0\hat{j} + (r \sin(\omega t))\hat{k} \quad (32)$$

en donde $r = 0,035m$, $\omega = \frac{\pi}{4} \frac{r}{s}$ y t corresponde al tiempo en segundos. El tiempo de muestreo $h = 0,001s$.

4.3.2. Control PID

El control PID, cuya estructura es definida en la ecuación Ec. 33, permite garantizar regulación local a partir de la sintonización de sus ganancias de control en la región del equilibrio deseado Spong *et al.* (2020).

$$u(t) = K_p e_\theta(t) + K_i \int e_\theta(t) dt + K_d \dot{e}_\theta(t), \quad (33)$$

en donde $e_\theta(t) = \theta_d - \theta$ y $\dot{e}_\theta(t) = \dot{\theta}_d - \dot{\theta}$ representan a las ecuaciones de error articular (posición y velocidad); así como $K_p = K_p^T$; $K_d = K_d^T$; $K_i = K_i^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y corresponden a las matrices (diagonales y definidas positivas) de ganancias de control proporcional, derivativa e integral respectivamente. La sintonización empleada en el experimento es: i) $K_p(1,1) = 7$, $K_p(2,2) = 5,5$, $K_p(3,3) = 12,2$; ii) $K_d(1,1) = 0,007$, $K_d(2,2) = 0,008$, $K_d(3,3) = 0,009$; iii) $K_i(1,1) = 0,07$, $K_i(2,2) = 0,08$, $K_i(3,3) = 0,06$. La señal de control $u(t) = [u_1(t) u_2(t) u_3(t)]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, que mapea al vector de pares generalizados $u = J^T f$ (Nm); y $J^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ corresponde a la transposición de la matriz Jacobiana analítica; y $f = [f_x f_y f_z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ corresponde al vector de fuerzas de interacción en la coordenada operacional $P_f(x, y, z)$.

El diagrama de la Figura 10, ilustra el manejo del modelado cinemático directo e inverso de posición y velocidad cuaterniónicos para establecer una tarea de guiado háptico pasivo, es decir, el seguimiento de una trayectoria operacional cerrada a partir de las ecuaciones paramétricas de consigna $\vec{P}_d(x_d, y_d, z_d) = x_d(t)\hat{i} + y_d(t)\hat{j} + z_d(t)\hat{k}$.

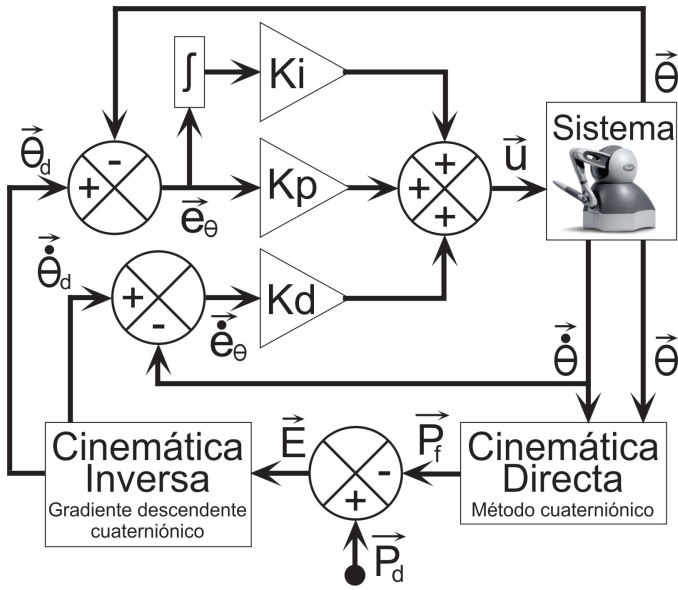


Figura 10: Cinemática inversa cuaterniónica en una tarea de guiado háptico pasivo

4.3.3. Resultados experimentales y discusión

El interés en la evaluación de una ley de control PID articular, a pesar de las limitaciones para garantizar regulación global (seguimiento de trayectorias), corresponde a validar experimentalmente al algoritmo numérico propuesta (cálculo de la cinemática inversa de posición y velocidad cuaterniónicas). El resultado experimental se corrobora tanto en el espacio articular (Figura 11), como en el espacio operacional o espacio de la tarea del dispositivo háptico (12).

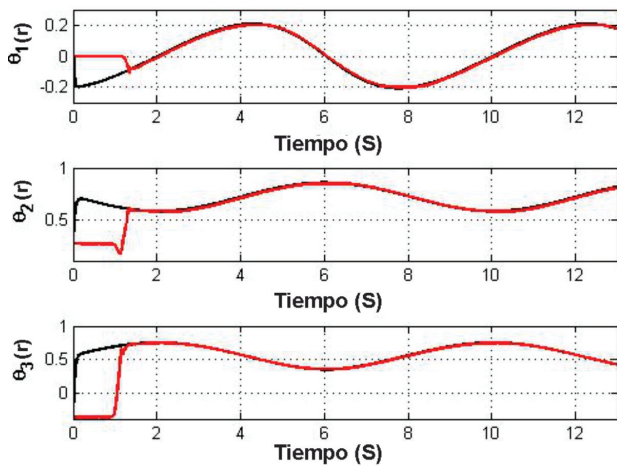


Figura 11: Desempeño del algoritmo de la cinemática inversa cuaterniónica (θ_{d1} , θ_{d2} y θ_{d3}) y la respuesta las variables articulares del DH-GT (θ_1 , θ_2 y θ_3).

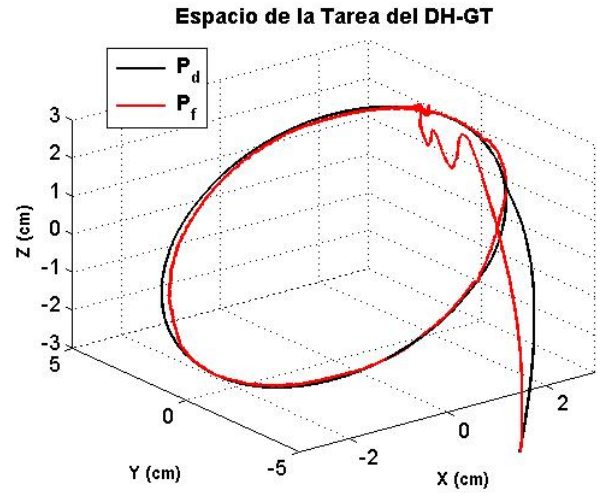


Figura 12: Seguimiento operacional a partir de un control PID articular.

La validación numérica y experimental, permiten garantizar la efectividad del método para sistemas robóticos complejos y de mayor número de grados de libertad; ya que de otro modo determinar un modelo cinemático, así como su implementación experimental resulta laborioso y con un alto costo computacional.

5. Conclusiones

En este artículo de investigación se describió la argumentación analítica, la validación numérica y la prueba experimental de la contribución que permite obtener el modelado cinemático directo e inverso de posición y velocidad, basado en álgebra de cuaterniones y en el método del gradiente descendente. La justificación del método propuesto, es sustentada a partir de que los métodos clásicos basados en herramientas de geometría y trigonometría; así como el método Denavit-Hartenberg; representan abundante trabajo algebraico para la síntesis de las ecuaciones cinemáticas; y alto costo computacional en la evaluación numérica. El cálculo de la cinemática inversa, requiere de tan sólo el conocimiento de la matriz Jacobiana analítica y de la ecuación de errores operacionales. La descripción del procedimiento que constituye al método del cálculo numérico de la solución de la inversa y su derivada temporal fue ejemplificado con una estructura robótica clásica como es el robot planar de 2 gdl. La cinemática inversa cuaterniónica, al emplear al método del gradiente descendente asegura como solución a la trayectoria articular mas corta entre la referencia y la condición inicial. Dado que la evaluación del método numérico para tareas de regulación y seguimiento puede ser en tiempo real, se desarrolló la validación experimental en un dispositivo háptico ampliamente empleado en laboratorios de investigación sobre estudios de interacción hombre robot, fue considerada por sus abundantes reportes y artículos de investigación que garantizan su utilidad. La tarea del dispositivo háptico empleado en la prueba experimental, es definida como un tipo de guiado háptico pasivo, es decir, implica el seguimiento de trayectorias operacionales; lo que permite garantizar un desempeño similar en robots manipuladores. El método propuesto es aplicable a cualquier mecanismo de eslabones articulados de n gdl, tales como:

dispositivos hápticos o robots manipuladores en distintas configuraciones.

Referencias

- Aspragathos, N. A. y Dimitros, J. K. (1998). A comparative study of three methods for robot kinematics. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 28(2):135–145.
- Bayro-Corrochano, E. (2010). *Geometric computing: for wavelet transforms, robot vision, learning, control and action*. Springer.
- Bayro-Corrochano, E. y Kähler, D. (2000). Motor algebra approach for computing the kinematics of robot manipulators. *Journal of Robotic Systems*, 17(9):495–516.
- Campana, R., Camarillo, K., y Arias, L. (2006). Kinematic modeling and control of robot manipulators via unit quaternions: Application to a spherical wrist. En *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 6474–6479. IEEE.
- Curry, H. B. (1944). The method of steepest descent for non-linear minimization problems. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(3):258–261.
- Dominguez-Ramirez, O. A., a. P.-V. V. (2003). Exploración guiada remota háptica de objetos deformables. En *Actas del Congreso y Exposición Internacional de Ingeniería Mecánica ASME 2003. Sistemas dinámicos y de control*, volumen 1-2, pp. 793–800. DC, Ee.UU. 15-21 de noviembre de 2003.
- Fuente, J., Santiago, J., Román, A., Dumitrache, C., y Casasanto, D. (2014). Handbook on robotics. *Siciliano, editor*, 25:1682–1690.
- Goldman, R. (2010). Rethinking quaternions. *Synthesis Lectures on Computer Graphics and Animation*, 4(1):1–157.
- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions: Containing a Systematic Statement of a New Mathematical Method; of which the Principles Were Communicated in 1843 to the Royal Irish Academy; and which Has Since Formed the Subject of Successive Courses of Lectures, Delivered in 1848 and Subsequent Years in the Halls of Trinity College, Dublin: With Numerous Illustrative Diagrams, and with Some Geometrical and Physical Applications*. Hodges and Smith.
- Hamilton, W. R. (1866). *Elements of quaternions*. London: Longmans, Green, & Company.
- Hamming, R. (2012). *Numerical methods for scientists and engineers*. Courier Corporation.
- Hart, J. C., Francis, G. K., y Kauffman, L. H. (1994). Visualizing quaternion rotation. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 13(3):256–276.
- Huang, J., Wang, X., Liu, D., y Cui, Y. (2012). A new method for solving inverse kinematics of an industrial robot. En *2012 International Conference on Computer Science and Electronics Engineering*, volumen 3, pp. 53–56. IEEE.
- Jiménez, E. V. C., Navarro, D. A. O., Cortés, M. A. D., y Enciso, J. V. O. (2016). *Optimización: Algoritmos programados con MATLAB*. Alpha Editorial.
- Jones, T. M. (2005). *AI Application Programming (Charles River Media Programming)*. Charles River Media, Inc.
- Lechuga-Gutiérrez, L., Medrano-Hermosillo, J., y Bayro-Corrochano, E. (2018). Quaternion spiking neural networks control for robotics. En *2018 IEEE Latin American Conference on Computational Intelligence (LA-CCI)*, pp. 1–6. IEEE.
- Radavelli, L., Simoni, R., De Pieri, E., y Martins, D. (2012). A comparative study of the kinematics of robots manipulators by denavit-hartenberg and dual quaternion. *Mecánica Computacional*, 31(15):2833–2848.
- Radavelli, L. A., Martins, D., De Pieri, E. R., y Simoni, R. (2015). Cinemática posicional de robôs via iteração e quatérnios. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, 3(1).
- Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. En *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 245–254.
- Silva, A. J., Ramirez, O. A. D., Vega, V. P., y Oliver, J. P. O. (2009). Phantom omni haptic device: Kinematic and manipulability. En *2009 Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference (CERMA)*, pp. 193–198. IEEE.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M. (2020). *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons.
- Turijan-Rivera, J., Machorro-Fernandez, F., Ruiz-Sanchez, F., Parra-Vega, V., y Dominguez-Ramirez, O. (2013a). Nasa-tlx assessment of modern close loop controllers in haptic guidance for assisted rehabilitation. En *Converging Clinical and Engineering Research on Neurorehabilitation*, pp. 243–247. Springer.
- Turijan-Rivera, J. A., Ruiz-Sanchez, F. J., Domínguez-Ramirez, O. A., y Parra-Vega, V. (2013b). Plataforma modular para la orientación háptica en rehabilitación pediátrica de discapacidades neuromusculares de las extremidades superiores. En *Converging Clinical and Engineering Research on Neurorehabilitation. Biosistemas y Biorobotic*, volumen 1, pp. 1–30. Springer, Berlín.
- Vince, J. y Vince, J. A. (2010). *Mathematics for computer graphics*, volumen 3. Springer.
- Yang, X., Wu, H., Li, Y., Kang, S., y Chen, B. (2019). Computationally efficient inverse dynamics of a class of six-dof parallel robots: Dual quaternion approach. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 94(1):101–113.
- Yu, P., Xia, K., y Li, J. (2011). A design of reconfigurable satellite control system with reaction wheels based on error quaternion model. En *2011 International conference on internet computing and information services*, pp. 215–218. IEEE.
- Zhang, J., Xu, W.-f., y Meng, D.-s. (2013). Inverse kinematics resolution method of redundant space manipulator based on arm angle parameterization. En *Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference*, pp. 6022–6027. IEEE.
- Zhang, X., Xiu, C., y Wang, X. (2018). 2018 chinese control and decision conference (ccdc).