DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI

ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 11 No. 21 (2023) 103-108

La relación pitagórica entre los radios de una corona circular
Pythagorean relationship between the radii of a circular crown

R. Flores-Cruz

Área Académica de Ciencias de la Tierra y Materiales, Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Carretera Pachuca-Tulancingo, Km. 8, 42184 Hgo.

Resumen

Uno de los teoremas más importantes de la matemática, por ser una herramienta básica en la resolución de problemas geométricos es el teorema de Pitágoras. Este enuncia que en un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa, por lo que se establece una relación geométrica específica para triángulos rectángulos; sin embargo, de forma más general una relación pitagórica señala que "La suma de los cuadrados de dos números **A** y **B** es igual al cuadrado de un tercero **C**", por lo tanto, esta relación es posible encontrarla en diversos contextos geométricos, como en el caso de dos circunferencias concéntricas (una corona circular), por este motivo en el presente artículo se muestra la deducción de la relación pitagórica existente entre los radios de una corona circular, así como los tres casos que pueden darse en esta situación. También se presenta una construcción geométrica que puede obtenerse basándose en la relación pitagórica de tres circunferencias y como a partir de esta se pueden ir deduciendo o aplicando diferentes teoremas.

Palabras Clave: Relación pitagórica, Círculos, Corona circular, Deducción.

Abstract

One of the most important theorems of mathematics, as it is a basic tool in solving geometric problems, is the Pythagorean theorem. Which states that in a right triangle the sum of the squares of its legs is equal to the square of its hypotenuse, so a specific geometric relationship is established for right triangles, however, more generally a Pythagorean relationship states that "The sum of the squares of two numbers A and B is equal to the square of a third C", therefore, this relationship can be found in various geometric contexts, such as in the case of two concentric circles (a circular crown), for this reason in this article the deduction of the existing Pythagorean relationship between the radii of a circular crown, as well as the three cases that can be realized in this situation. It also presents a geometric construction that can be obtained hard in the Pythagorean relationship of three circles and how different theorems can be deduced or applied from this.

Keywords: Pythagorean relationship, Circles, Circular crown, Deduction.

1. Introducción

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas más importantes y fundamentales que se conocen, este es utilizado en diversas áreas de la ciencia para la resolución de problemas en matemáticas, ingeniería y física como lo muestra Okun (2008) donde aparece este teorema aplicado a la teoría de la relatividad. Su enunciado establece la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo, dice que ***"En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado (el lado opuesto al ángulo recto) es igual a la suma del cuadrado de sus dos catetos restantes".*** Esta relación matemática es tan importante y "simple" que es conocida prácticamente desde las primeras civilizaciones, tablillas de arcilla de la civilización de Babilonia muestran gráficamente la aplicación del teorema de Pitágoras, como afirma Ortiz (2005), así como una aproximación numérica de la hipotenusa del triángulo rectángulo dibujado sobre una de estas tablillas. A pesar de que este era utilizado por las primeras civilizaciones, fue un conocimiento mayormente empírico y estimado numéricamente mediante algoritmos, ya que no existía como tal una concepción propia de un teorema para expresarlo y demostrarlo como posteriormente lo harían los griegos, como sugiere Zúñiga (2003). Una demostración matemática según la definición de Zermeño (2014) puede definirse como "Un argumento que prueba la veracidad de un enunciado

*Autor para la correspondencia: fl335558@uaeh.edu.mx
Correo electrónico: fl335558@uaeh.edu.mx (Rommel Flores-Cruz).

Historial del manuscrito: recibido el 06/03/2023, última versión-revisada recibida el 22/05/2023, aceptado el 23/05/2023, en línea (postprint) desde el 25/05/2023, publicado el 05/07/2023. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v11i21.10655

matemático utilizando deducciones lógicas a partir de conocimientos previamente aceptados” (p. 2), pero no fue hasta que Tales de Mileto, quien es considerado como el primer griego en axiomatizar y definir las matemáticas griegas, como señala González (2017), comenzó a extender la idea de lo que es un teorema, mediante sus propias contribuciones con los “teoremas de Tales”. Pitágoras pudo aprovechar esta idea para posteriormente establecer la relación entre los lados de un triángulo rectángulo en forma de teorema.

Posterior a la demostración elaborada por Pitágoras surgieron diversas maneras de llegar a una expresión equivalente, partiendo de diferentes planteamientos al utilizado por Pitágoras, como en el caso de Euclides quien elabora su propia demostración en el libro de “Los Elementos de Euclides” de acuerdo con Urbaneja (2008), o como las elaboradas por: Pappus, Thâbit Ibn Qurra, Bhaskara y Anaricio-Göpel, estos son algunos de los autores de algunas de las demostraciones más conocidas; sin embargo, existen muchas más que se encuentran recopiladas en el libro titulado “The Pythagorean Proposition” elaborado por Loomis (1968), donde se registran aproximadamente 367 demostraciones, entre todas ellas, demostraciones algebraicas y geométricas, el libro fue publicado el 1968 por lo que es posible que en la actualidad existan muchas más. No obstante, es importante resaltar que el teorema de Pitágoras establece una relación tal que la suma del cuadrado del lado $\boldsymbol{A}$ y el cuadrado del lado $\boldsymbol{B}$ son iguales al cuadrado de $\boldsymbol{C}$**,** siendo este teorema aplicable solo si se trata de triángulos rectángulos; sin embargo, visto como una relación algebraica o de forma más específica como una relación pitagórica que relaciona el cuadrado de un número $\boldsymbol{A}$ con el cuadrado de un número $\boldsymbol{B}$, tal que la suma de estos son iguales al cuadrado de $\boldsymbol{C}$, es posible encontrarla en otros contextos geométricos, como en el caso presentado en este artículo, donde se muestra la relación pitagórica entre los radios de dos circunferencias circunscritas, es decir, en una corona circular, además se muestran los tres casos posibles en función del área de esta corona, finalmente se señala cómo a partir de un triángulo rectángulo cuyos lados representan los radios de tres circunferencias diferentes, se puede obtener un triángulo semejante a este, el cual puede utilizarse para poder tratar diferentes teoremas.

2. Relación pitagórica en corona circular

Se consideran dos circunferencias concéntricas y radios distintos de tal forma que **R** > **r**, siendo **R** el radio exterior y **r** el radio interior. La figura formada por estas circunferencias es denominada como una corona circular, figura (1).

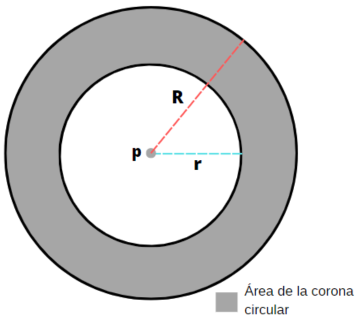

Figura 1: Región de la corona circular.

El área de la corona circular puede expresarse como la diferencia de áreas $\boldsymbol{\Delta A}$ entre una circunferencia $\boldsymbol{C_2}$ de radio $\boldsymbol{r}$ y otra $\boldsymbol{C_3}$ de radio $\boldsymbol{R}$, de la siguiente manera:

$$\Delta A = A_3 - A_2 \qquad (1)$$

Esta diferencia $\boldsymbol{\Delta A}$ de la Ecuación (1) puede interpretarse como el área de un tercer círculo $\boldsymbol{C_1}$, es decir, si $\boldsymbol{C_1}$ de área $\boldsymbol{A_1}$ es igual a la diferencia de áreas entre $\boldsymbol{A_2}$ y $\boldsymbol{A_3}$**,** entonces su radio puede obtenerse de la siguiente manera:

$$r_1 = \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} \qquad (2)$$

Por lo que el área de la corona circular es equivalente al área de un tercer círculo de radio $\boldsymbol{r_1}$**,** como gráficamente puede observarse en la Figura 2.

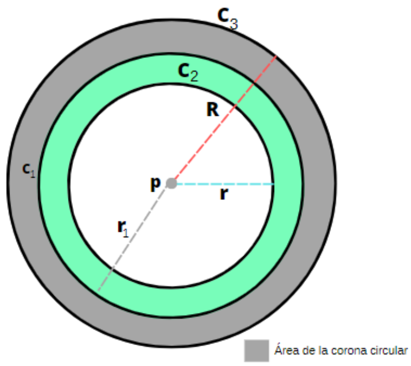

Figura 2: Tercer círculo circunscrito con área igual a la de la corona circular.

Se sabe que la región delimitada por la circunferencia $\boldsymbol{C_3}$ es igual a:

$$A_3 = \pi R^2 \qquad (3)$$

Esto también puede verse como la suma de las áreas de la circunferencia $\boldsymbol{C_2}$ y la región de la corona circular o también como:

$$A_3 = \pi r^2 + \pi r_1^2 \qquad (4)$$

Por lo tanto:

$$\pi R^2 = \pi r^2 + \pi r_1^2 \qquad (5)$$

Simplificando:

$$\pi R^2 = \pi(r^2 + r_1^2) \qquad (6)$$

$$R^2 = \pi \frac{(r^2 + r_1^2)}{\pi} \qquad (7)$$

$$R^2 = r^2 + r_1^2 \qquad (8)$$

De la expresión (8) se obtiene una relación que establece que el cuadrado de los radios de las circunferencias C_2 y C_1 es igual al cuadrado del radio de la circunferencia C_3 .

Entonces, de la Ecuación (1) se puede deducir la expresión que se utiliza para calcular el área de la corona circular, quedando de la siguiente forma:

$$\Delta A = \pi R^2 - \pi r^2 \qquad (9)$$

$$\Delta A = \pi (R^2 - r^2) \qquad (10)$$

La Ecuación (10) puede aplicarse si se conocen los radios de las circunferencias iniciales, además determina de forma directa el área de la tercera circunferencia, por lo tanto, el área de la circunferencia C_1 también es:

$$A_1 = \pi (R^2 - r^2) \qquad (11)$$

Gráficamente la tercer circunferencia de la corona circular puede verse en la figura (3), dado que los radios R y r forman entre sí un triángulo regtángulo pAB siendo p el centro de la corona círcular, el tercer lado de este triángulo, es decir, el cateto adyacente (r_1) es el resultado de la resta del cuadrado de los radios de la expresión (11), en otras palabras es el resultado de aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que forman los radios.

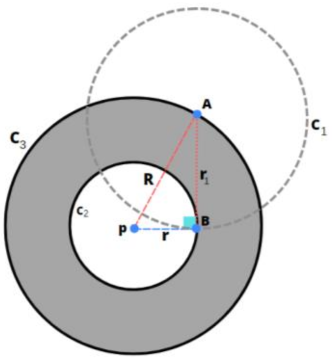

Figura 3: Representación geométrica de la relación pitagórica en corona circular.

Si se coloca el círculo C_1 concéntrico a la corona circular y se traza un radio r_1 perpendicular al radio r en el punto $\mathbf{p}$ se obtiene un triángulo rectángulo pBD, que es congruente con el triángulo pAB y, por lo tanto, el segmento $\overline{BD}$ es igual al radio R.

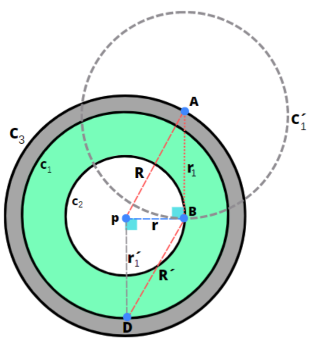

Figura 4: Representación geométrica de la relación pitagórica en corona circular y el área equivalente en forma de círculo concéntrico.

La Figura 4 muestra un caso donde $r_1 > \mathbf{r}$ porque el área de la corona circular, es decir, el área de C_1 es mayor que la de C_2 , por lo tanto, mientras más próximo sea el valor de r a $\mathbf{R}$, el área de la corona circular será menor y en consecuencia el radio podrá ser $r > r_1$, también es posible el caso en el que $r_1 = \mathbf{r}$, donde el área de la corona circular es la misma que la de las circunferencias C_1 y C_2, mientras que el área de C_3 es el doble de cualquiera de las dos circunferencias. Figura 5.

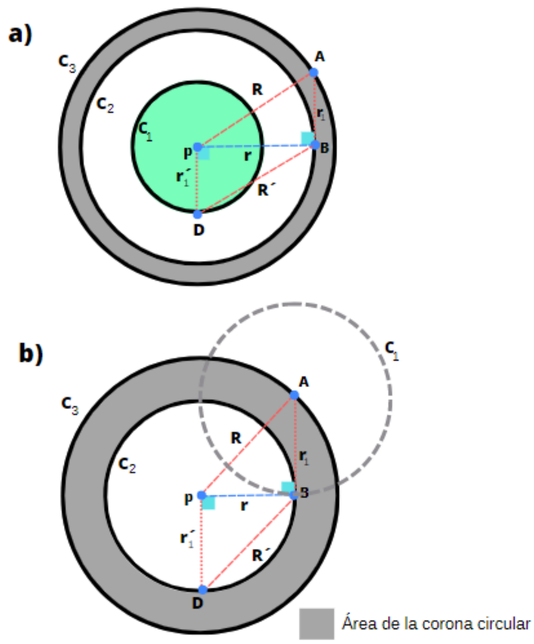

Figura 5: a) Caso donde $r > r_1$ b) Caso donde $r = r_1$.

3. Algunos teoremas importantes que pueden deducirse mediante esta relación

Una vez establecida la relación pitagórica existente entre los radios de una corona circular, si se traza a partir de los lados de un triángulo rectángulo tres circunferencias donde cada radio es igual a la longitud de cada lado del triángulo (Figura 6), se obtiene una construcción geométrica que resulta útil para aplicar de forma secuencial procedimientos matemáticos ya establecidos para la deducción de algunos teoremas de la geometría relacionados con triángulos rectángulos y circunferencias.

Primer teorema de Tales

A partir del triángulo pBD se trazan dos circunferencias C_1 y C_2 concéntricas en el vértice p, de radio r_1 y r respectivamente, la hipotenusa del triángulo pBD es igual al radio R del tercer círculo C_3 con centro en el vértice B. Si se extiende el radio r_1 hasta la intersección con la circunferencia C_3 coincide en un punto E, por lo tanto, el segmento $\overline{pE} = r_1$ y el segmento $\overline{BF} = R$ dado que representa el radio de C_3, esto genera un segmento $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{pE}$ y paralelo a $\overline{pB}$, se sabe del primer teorema de Tales que si se traza una línea paralela a cualquiera de los lados de un triángulo, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo inicial. Figura 6.

Entonces como existe una proporción entre los lados de dos triángulos semejantes, esto puede quedar expresado de la siguiente forma:

$$\frac{\overline{pB}}{pD} = \frac{\overline{EF}}{ED} \quad (12)$$

Entonces $\overline{EF}$ es:

$$\overline{EF} = \frac{\overline{pB}}{pD}\,\overline{ED} \quad (13)$$

O lo que es lo mismo:

$$\overline{EF} = \frac{r}{r_1}\,(2r_1) \quad (14)$$

$$\overline{EF} = 2r \quad (15)$$

Esto permite conocer todos los lados de los triángulos formados por los radios de las circunferencias aplicando el primer teorema de Tales.

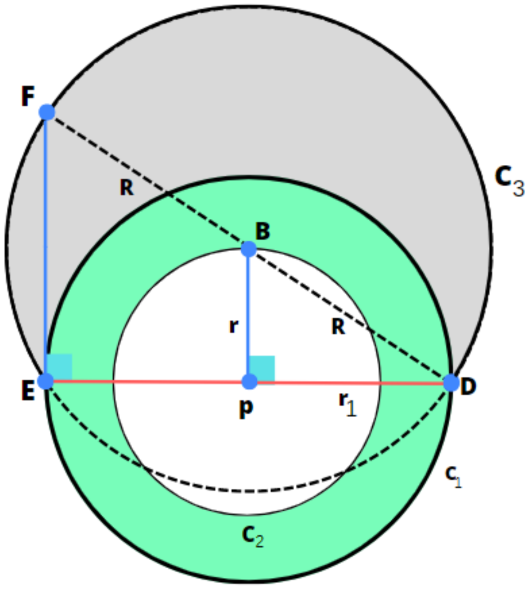

Figura 6: Triángulos rectángulos semejantes formado por los radios de tres circunferencias.

Segundo teorema de Tales

En la Figura 7 se puede observar que los puntos DEF forman un triángulo rectángulo, dado que el ángulo **FED** es recto, además de que la hipotenusa del triángulo DEF es el segmento $\overline{DF}$ y por tanto igual a $2R$. El segundo teorema de Tales establece que ***"Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia forma un ángulo recto"***. Entonces si se traza un radio desde el punto B hasta E se tiene un segmento de recta de longitud R que divide el ángulo recto en dos partes y que forma dos triángulos BDE y BEF, con dos lados iguales cada uno de ellos, dado que dos de sus lados tienen la longitud del radio y, por lo tanto, ambos triángulos son isósceles y con dos ángulos iguales. Del triángulo BDE se deduce que $\angle EDB = \angle BED$ y de la misma forma para el triángulo BEF se obtiene $\angle BFE = \angle FEB$, si la suma de los ángulos del triángulo DEF se sabe que es igual a 180° y se le llama α y β a los ángulos (Figura 7), se tiene que la suma de todos los ángulos que forman el triángulo DEF es:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180° \quad (16)$$

$$2\alpha + 2\beta = 180° \quad (17)$$

$$\alpha + \beta = \frac{180°}{2} \quad (18)$$

Y, por lo tanto:

$$\alpha + \beta = 90° \quad (19)$$

Se sabía por semejanza de triángulos que el ángulo $DEF = 90°$; sin embargo, con la deducción del segundo teorema de Tales se comprueba este mismo resultado.

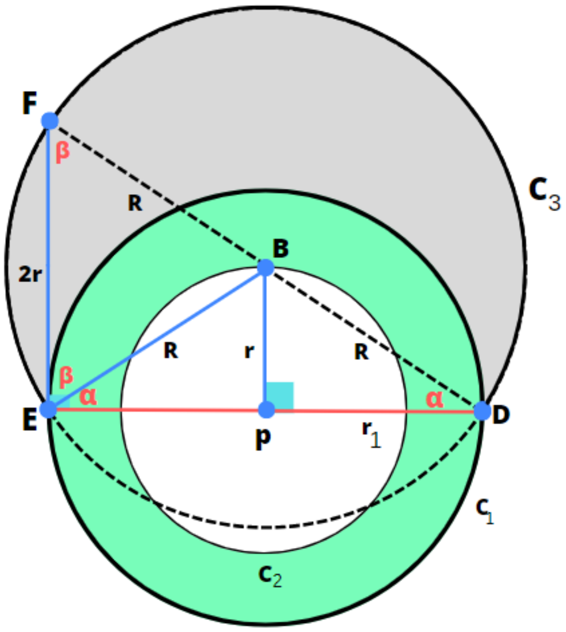

Figura 7: Planteamiento geométrico para el segundo teorema de Tales.

Ángulo inscrito en semicircunferencia

También se puede notar que el diámetro $\overline{DF}$ divide la circunferencia en dos partes iguales y, por lo tanto, también lo hace en dos arcos iguales (semicircunferencias), dado que la medida de la circunferencia es de 360°, el diámetro divide la circunferencia en dos arcos de 180°. Por el segundo teorema de Tales se sabe que el ángulo inscrito del triángulo DEF siempre es recto y por lo anterior se deduce que en los puntos D y F los segmentos $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ subtienden un arco de 180°, entonces se puede decir que ***"Todo ángulo inscrito en el diámetro una circunferencia siempre es recto"***, entonces si el ángulo inscrito en la circunferencia es $\angle FED = \theta$ y el arco $\widehat{DF} = 180°$, se puede decir que:

$$\theta = \frac{180°}{2} \quad (20)$$

Teorema de los catetos (Euclides)

De la Figura 8 en el triángulo $\boldsymbol{DEF}$ si se traza una perpendicular en $\boldsymbol{G}$, que es la intersección entre el segmento $\overline{\boldsymbol{BF}}$ y la circunferencia $\boldsymbol{C_1}$, se obtiene un segmento $\overline{\boldsymbol{EG}} = \boldsymbol{h}$ que divide el diámetro $\overline{\boldsymbol{DF}}$ en dos partes desiguales $\overline{\boldsymbol{FG}} = \boldsymbol{q}$ y otra $\overline{\boldsymbol{DG}} = \boldsymbol{p}$**,** además de dos triángulos $\boldsymbol{DEG}$ y $\boldsymbol{EFG}$ que son semejantes entre sí, por lo que aplicando el teorema de Tales se tiene que:

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{GD}} \qquad (21)$$

$$\overline{ED} * \overline{ED} = \overline{FD} * \overline{GD} \qquad (22)$$

Por lo tanto:

$$a^2 = p * c \qquad (23)$$

Para el otro cateto $\overline{\boldsymbol{EF}}$ esto es:

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} \qquad (24)$$

$$\overline{EF} * \overline{EF} = \overline{FD} * \overline{FG} \qquad (25)$$

Esto queda como:

$$b^2 = q * c \qquad (26)$$

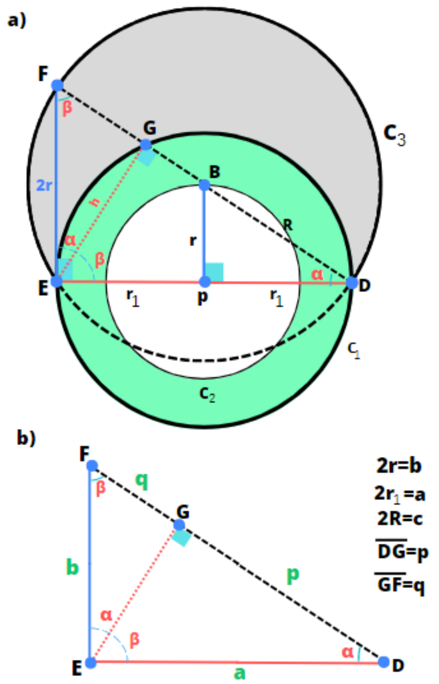

Figura 8: Planteamiento geométrico para el teorema de los catetos Euclides. a) Trazo mediante la figura inicial, b) Figura obtenida.

Teorema de la altura (Euclides)

Para obtener el teorema de la altura se sabe que el área del triángulo rectángulo $\boldsymbol{DEF}$ es:

$$A = \frac{a * b}{2} \qquad (27)$$

Pero también puede ser:

$$A = \frac{c * h}{2} \qquad (28)$$

Igualando las ecuaciones de área (27) y (28):

$$\frac{a * b}{2} = \frac{c * h}{2} \qquad (29)$$

Despejando:

$$h = \frac{a * b}{c} \qquad (30)$$

Si se eleva al cuadrado la ecuación (29) y se sustituye (23) y (26) se obtiene lo siguiente:

$$h^2 = p * q \qquad (31)$$

Los obtenidos resultados sobre los teoremas de Euclides, tanto el de los catetos como el de la altura (23, 26 y 31) coinciden con los mostrados por Serra, et al. (2020); sin embargo, en este caso se desarrollan a partir del teorema de Tales, utilizando un procedimiento ya conocido.

Desigualdad AM-GM

Esta desigualdad establece que la media aritmética $\boldsymbol{AM}$ de la forma:

$$AM = \frac{p + q}{2} \qquad (32)$$

Y la media geométrica $\boldsymbol{GM}$ de la forma:

$$GM = \sqrt{p * q} \qquad (33)$$

Satisface lo siguiente, si $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son números reales positivos, siempre se cumple que

$$\sqrt{p * q} \leq \frac{p + q}{2} \qquad (34)$$

En la Figura 9 se muestra el planteamiento para probar esta desigualdad, utilizando el mismo triángulo obtenido previamente en la circunferencia $\boldsymbol{C_3}$**,** para esto se traza el radio $\boldsymbol{R}$ perpendicular al segmento $\overline{\boldsymbol{DF}}$**,** dejando un segmento $\overline{\boldsymbol{BH}} = \boldsymbol{R}$, la longitud del diámetro se observa que también es la suma de $\boldsymbol{p + q}$**,** entonces el radio puede escribirse como:

$$R = \frac{p+q}{2} \quad (35)$$

Por lo tanto, se puede decir que en este caso el radio es igual a la media aritmética, de la ecuación (31) se sabe que el segmento h queda como:

$$h = \sqrt{p * q} \quad (36)$$

Entonces la Ecuación (36) es igual a la media geométrica de la Ecuación (33), como el segmento $\overline{BH}$ es paralelo a $\overline{EG}$, si $\overline{EG}$ se ubica en el punto B (el centro) $\overline{BH} = \overline{EG}$, pero en cualquier otro punto será $\overline{BH} \geq \overline{EG}$, lo que satisface la desigualdad (34). Mediante un proceso previamente establecido y similar al mostrado en el artículo de García (2017), en el que se llega a la misma conclusión.

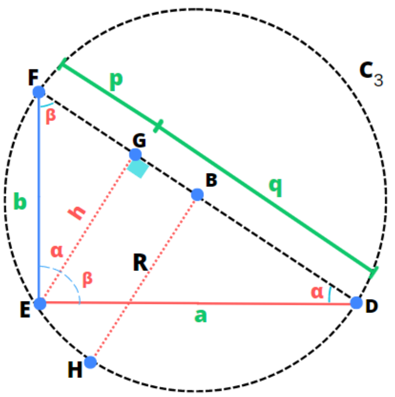

Figura 9: Desigualdad de la media geométrica y aritmética.

4. Resultados

Se obtuvo una deducción de la relación pitagórica entre los radios de una corona circular (8), además de una interpretación geométrica de esto, asimismo tres casos posibles donde:

Caso I
El área de la corona circular es mayor que el área delimitada por el radio de la circunferencia C_2 y, por lo tanto, $r_1 > \mathbf{r}$ (figura 4).

Caso II
El área de la corona circular es menor que el área delimitada por el radio de la circunferencia C_2 y, por lo tanto, $r_1 < \mathbf{r}$ (Figura 5, inciso a).

Caso III
El área de la corona circular es igual que el área delimitada por el radio de la circunferencia C_2 y, por lo tanto, $r_1 = \mathbf{r}$, entonces el área de C_3 es el doble del área de C_1 o de C_2 (Figura 5, inciso b).

También, se encontró que si a partir de un triángulo rectángulo pBD, se trazan dos círculos C_1 y C_2 concéntricos, de radios igual a los lados $\overline{pB}$ y $\overline{pD}$ respectivamente en el vértice p y este corresponde al ángulo recto, es posible trazar un tercer círculo C_3 con centro en el vértice B y radio igual a la hipotenusa $\overline{BD}$, donde se obtiene un triángulo $DEF \sim pBD$ si se extienden los segmentos $\overline{pD}$ y $\overline{BD}$ hasta la intersección con la circunferencia C_1 y C_3 según corresponda, de tal forma que se formen los diámetros, se traza una disposición de diferentes formas geométricas en la que se pueden aplicar y deducir secuencialmente diversos teoremas que involucran triángulos o circunferencias.

5. Conclusiones

El teorema de Pitágoras establece una relación entre los catetos de un triángulo rectángulo con su hipotenusa; sin embargo, la relación pitagórica se cumple en algunos otros contextos geométricos, como en el caso de dos círculos concéntricos (una corona circular), donde su área puede ser interpretada como el área de un tercer círculo de radio r_1 y por lo tanto los radios que forman la corona circular cumplen una relación pitagórica entre ellos. Esto se debe a que los radios de las dos circunferencias C_2 y C_3 que delimitan el área de la corona forman entre ellos un triángulo rectángulo con un tercer lado que es igual al radio r_1 que dibuja un tercer círculo que representa el área de la corona. Además de que, si se disponen tres circunferencias en los vértices de un triángulo rectángulo, tal y como se muestra en el presente trabajo, se pueden obtener algunos teoremas en geometría mediante procedimientos matemáticos previamente establecidos, algunos de ellos de forma explícita como lo es el segundo teorema de Tales, que aparece de forma gráfica como consecuencia de la disposición de tres circunferencias en un triángulo rectángulo.

Referencias

García, M., & de Amo Artero, E. (2017). Desigualdades entre las medias y sus aplicaciones.
L, G., & Vivas, M. (2017). El origen del método deductivo y algunos aportes de los griegos a la matemática de nuestros días. *Matemática*, *15*(1), 35-39.
O, E. S. (1968). The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified, and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of Proofs.
Okun, L. B. (2008). The theory of relativity and the Pythagorean theorem. *Physics-Uspekhi*, *51*(6), 622-631.
Ortiz, A. (2005). Historia de la matemática. Volumen 1. La matemática en la antigüedad.
Serra, J. E. M., et al. (2020). Formulaciones y demostraciones de los teoremas de los catetos y de la altura mediante teselaciones poligonales. Pensamiento Matemático.
Urbaneja, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años.
Zermeño, S. D. (2014). Pruebas y demostraciones. Cienciorama.
Zúñiga, Á. R. (2003). Historia y filosofia de las matemáticas. EUNED.