

Radiación de cuerpo negro en un escenario de mundos brana Blackbody radiation in a brane world scenario

V. E. Cerón ^{a,*}, Omar Pedraza ^a, L. A. López ^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

En este trabajo se analiza el problema de la radiación de cuerpo negro considerando la acción $4D$ efectiva proveniente de la acción $6D$ de un campo de norma libre en una geometría no factorizable, donde las dos dimensiones extra son compactas, pero con diferente topología. Nuestro punto de partida es la descomposición de Kaluza-Klein de la acción de Maxwell $6D$ en dos sectores en $4D$. El primer sector contiene una acción $4D$ de Maxwell sin masa, mientras que el segundo produce un conjunto infinito de campos de norma $4D$ masivos. Los resultados obtenidos muestran que la ley de Stefan-Boltzmann estándar es dada por el modo cero más términos correctivos provenientes de la torre Kaluza-Klein.

Palabras Clave: Agujero negro, Dimensiones Extra, ley de Stefan-Boltzmann.

Abstract

In this work, we analyze the problem of black body radiation in a effective action $4D$ that arises from the action $6D$ of a free gauge field in a non-factorizable geometry, where the two extra dimensions are compact, but with different topology. Our starting point is the Kaluza-Klein decomposition of the $6D$ Maxwell action into two sectors in $4D$. The first sector contains a $4D$ massless Maxwell action, while the second yields an infinite set of a $4D$ massive gauge fields. The results obtained show that the standard Stefan-Boltzmann law is given by the zero mode plus corrective terms from the Kaluza-Klein tower.

Keywords: Black hole, Extra dimensions, Stefan-Boltzmann law.

1. Introducción

La historia de la física de las dimensiones extras comienza con los trabajos de Nordstrom (1914), T. Kaluza (1921) y O. Klein (1926). Después, en la década de los 80's, la idea de las dimensiones extra fue revivida por el descubrimiento de la teoría de cuerdas. Sin embargo, las dimensiones extra consideradas entonces eran extremadamente pequeñas, del orden de la longitud de Planck M_{pl}^{-1} ($\sim 10^{-33}$ cm) y por lo tanto no observables. Sin embargo, en la década de los 90's aparecieron nuevos escenarios donde las dimensiones extra podían ser grandes e incluso infinitas y aun permanecer ocultas. En todos estos modelos, nuestro espacio-tiempo de cuatro dimensiones es una brana, es decir, una rebanada de un universo de dimensión mayor a cuatro, donde se supone que la materia ordinaria está atrapada en la brana.

La presencia de dimensiones extra conduce a muchas implicaciones fenomenológicas que pueden probarse desde la cos-

mología hasta los agujeros negros y la gravedad (ver, por ejemplo, Servant y Tait (2003); Cheng *et al.* (2002); Appelquist *et al.* (2001); Dimopoulos y Landsberg (2001); Giddings y Thomas (2002)).

Por otro lado, la posibilidad de obtener información de modelos con dimensiones extra estudiando fenómenos físicos a bajas energías, ha sido considerada en estos escenarios como por ejemplo, el efecto Casimir ha sido considerado por Linares *et al.* (2008); Teo (2009); Cheng (2008); Frank *et al.* (2007), el estudio del corrimiento Lamb ha sido abordado por Morales-Tecotl *et al.* (2007), y la radiación de cuerpo negro fue estudiado por Ramos y Boschi-Filho (2014); Alnes *et al.* (2007); Cardoso y Castro (2005).

En particular, una característica común de los escenarios con dimensiones extra es la modificación de la relación estándar de la dispersión. En este sentido, se ha considerado el problema de la radiación de cuerpo negro para un espacio-tiempo de $(4 + D)$ dimensiones en los trabajos realizados por Ramos y

*Autor para correspondencia: vceron@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: vceron@uaeh.edu.mx (Victoria E. Cerón Angeles), omarp@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza Ortega), lalopez@uaeh.edu.mx (Luis A. López Suarez)).

Historial del manuscrito: recibido el 17/03/2023, última versión-revisada recibida el 17/05/2023, aceptado el 17/05/2023, en línea (postprint) desde el 23/05/2023, publicado el 05/07/2023. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v11i21.10704>



Boschi-Filho (2014) donde se supone que el escenario es separable en la forma $M_{4+D} = M_4 \times M_D$, donde M_4 es nuestro mundo $4D$ y M_D es la variedad asociada con las dimensiones extras. Aquí se supone que el campo electromagnético permea en todo el espacio-tiempo de $(4+D)$ dimensiones y en este escenario, la potencia total radiada debería depender de la dimensionalidad del espacio-tiempo. El problema de la radiación de cuerpo negro también ha sido considerado en un espacio-tiempo de $(n+1)$ dimensional por Nozari y Anvari (2012); Husain *et al.* (2013a) y por Bosso y Vega (2022) donde las dimensiones extras son consideradas a través el principio de incertidumbre generalizado, donde los términos de corrección a la ley de Stefan-Boltzmann contienen solo las potencias pares de la temperatura. El problema de la radiación de cuerpo negro en un espacio-tiempo de κ -Minkowski y en un espacio-tiempo de $AdS_5 \times S^5$ se estudió en Kim *et al.* (2007) y también en Ramos y Filho (2014). También se ha estudiado el problema de radiación de cuerpo negro en teorías de cuantización polimérica Husain *et al.* (2013b) y en teorías de estadísticas generalizadas Moradpour *et al.* (2022). En todos estos modelos, las dimensiones extras producen diferentes relaciones de dispersión.

En este contexto, el objetivo de este trabajo es investigar algunas consecuencias de los escenarios de mundos brana. Específicamente, se estudia la radiación de cuerpo negro en un escenario extendido de Randall-Sundrum por una coordenada espacial con topología S^1 . En este escenario se obtiene la acción efectiva en $4D$ a partir de la acción de un campo de norma libre en $6D$.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la sección 2 se muestran algunas características básicas de la geometría no factorizable en $6D$ y entonces, usando la descomposición de Kaluza-Klein (KK) podemos expresar la acción de Maxwell $6D$ en dos términos, el modo cero KK y una torre de modos de excitación de KK, es decir, el primer término representa un campo de norma $4D$ sin masa (fotones), mientras que el segundo término representa campos de norma $4D$ masivos. Una ventaja de la descomposición KK, es que ahora se puede analizar el problema únicamente en cuatro dimensiones. Es bien conocido que en $6D$ los fotones tienen cuatro grados de libertad, por lo que al realizar la descomposición de KK, se debe de conservar el mismo número de grados de libertad.

El sector sin masa contiene el término de Maxwell $4D$ que produce las dos polarizaciones habituales (dos grados de libertad), más dos campos escalares sin masa, los cuales dan un total de cuatro grados de libertad. Sin embargo, la elección de la paridad Z_2 elimina uno de los dos campos escalares sin masa. Mientras que para el sector masivo, también es bien conocido que los campos de norma con masa tienen dos grados transversales y un grado longitudinal de libertad (tres grados de libertad), así como también, aparece un campo escalar masivo, lo cual indica que se tiene un total de cuatro grados de libertad.

En la Sección 3 se presenta el análisis de la radiación de cuerpo negro para el sector masivo, utilizando los resultados de Torres-Hernández (1985) sobre radiación de cuerpo negro para fotones masivos. En este trabajo, se determina la ley de Stefan-Boltzmann efectiva para un escenario modificado de Randall-Sundrum en el régimen de bajas energías en términos de modos de ligeros, así, podemos truncar los modos masivos de KK de las dimensiones compactas, esto significa que la escala de

energía asociada una coordenada compacta es mucho más grande que la escala de energía asociada a la otra coordenada compacta. Para el sector sin masa, la radiación de cuerpo negro está muy bien descrita por la ley de Planck, aquí se mostrara brevemente este análisis. El final de la sección 3, está dedicada a la generalización de la ley de Stefan-Boltzmann. Finalmente en la sección 4 se muestra el análisis numérico y gráfico de los resultados obtenidos en este trabajo.

2. Acción de un campos de norma libre en un escenario Randall–Sundrum–1

La métrica del escenario Randall–Sundrum–1 es dado por (ver Teo (2009))

$$ds_{6D}^2 = G_{MN} dx^M dx^N = e^{-2\sigma} \left[\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (dx^4)^2 \right] - (dx^5)^2$$

$$\sigma = \kappa |x^5| . \tag{1}$$

Aquí los índices romanos denotan las coordenadas del espacio-tiempo $6D$, $x^M = (x^\mu, x^4, x^5)$, mientras que los índices griegos denotan las coordenadas $4D$, $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ en la signatura del espacio-tiempo plano $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$. Este escenario considera dos dimensiones extra espaciales, ambas compactas pero con diferente topología. La cuarta coordenada espacial se compactifica a un círculo de radio R , así, podemos expresar x^4 como $x^4 = R\theta$, donde θ puede tomar valores en el intervalo $[0, 2\pi)$, mientras que la quinta coordenada x^5 se compactifica en el orbifold S^1/Z_2 (esto significa que cumple dos propiedades, $x^5 = x^5 + 2\pi r$, y $x^5 \rightarrow -x^5$) siendo r el radio de compactificación de x^5 . Aquí, κ^{-1} es el radio del espacio $6D$ Anti-de Sitter AdS_{6D} .

Esta métrica puede ser obtenida como una solución asintótica a las ecuaciones de Einstein en $6D$ con una constante cosmológica global negativa y dos 4-branas, una 'visible' y otra 'oculta', con tensiones opuestas y localizadas en los puntos fijos del orbifold S^1/Z_2 , es decir, en $x^5 = 0$, y $x^5 = \pi r$.

La acción $6D$ para el campo de norma libre en la métrica RSI-1, es descrito por

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^4 \int_{-\pi r}^{\pi r} dx^5 \sqrt{-G} G^{MR} G^{ND} F_{MN} F_{RD} + L_{g.f.} , \tag{2}$$

aquí $\sqrt{-G} = \sqrt{|(G_{MN})|} = e^{-5\sigma}$, F_{MN} es el tensor de intensidad de campo $6D$ dado por $F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M$ y $L_{g.f.}$ es la acción de fijamiento de norma, la cual toma la siguiente forma

$$L_{g.f.} = -\frac{1}{2} \int d^6x \sqrt{-G} \left[G^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu + G^{44} \partial_4 A_4 + e^{3\sigma} G^{55} \partial_5 \left(e^{-3\sigma} A_5 \right) \right]^2 , \tag{3}$$

este término desacopla las ecuaciones de campo asociadas a la acción del campo de norma libre en una norma covariante (el término de fijamiento se asemeja al fijamiento de norma de Lorentz, pero tiene una estructura diferente en la coordenada x^5). Como se mostró en el trabajo de Chang *et al.* (2000), se requiere de una condición de frontera invariante de norma, es decir, $F_{5M} = \partial_5 A_M - \partial_M A_5 = 0$ en $x^5 = 0$ y $x^5 = \pi r$. Esto es, A_μ y A_4 tienen simetría par bajo Z_2 , es decir, la proyección Z_2 implica condiciones de frontera tipo Neumann, para A_μ y A_4 , así se

tiene

$$\begin{aligned} \partial_5 A_\mu(x^\mu, x^4, x^5 = 0) &= \partial_5 A_\mu(x^\mu, x^4, x^5 = \pi r) = 0, \\ \partial_5 A_4(x^\mu, x^4, x^5 = 0) &= \partial_5 A_4(x^\mu, x^4, x^5 = \pi r) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

mientras que la componente A_5 es impar bajo Z_2 , así, se tiene que la condición de frontera para A_5 es de tipo Dirichlet

$$A_5(x^\mu, x^4, x^5 = 0) = A_5(x^\mu, x^4, x^5 = \pi r) = 0. \quad (5)$$

La elección de paridad Z_2 , elimina A_5 de la teoría en la 4-brana, pero no perturba la invariancia de norma de la acción en la teoría efectiva de 4-dimensional. Por lo cual, en este análisis se puede considerar la norma $A_5 = 0$, (ver el trabajo de Davoudiasl *et al.* (2000) para más detalle) por simplicidad.

Integrando por partes (2) sobre x^4 y x^5 , se tiene

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \int d^6 x \left[e^{-\sigma} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2e^{-\sigma} A^\mu \partial_\mu \partial_\nu A^\nu \right. \\ &\quad - 2e^{-\sigma} A_\mu \partial_4 \partial^4 A^\mu - 2A_\mu \partial_5 (e^{-3\sigma} \partial^5 A^\mu) \\ &\quad + 2e^{-\sigma} (\partial_\mu A_4)^2 - 2e^{-\sigma} A_4 \partial_4 \partial^4 A^4 \\ &\quad \left. - 2A_4 \partial_5 (e^{-3\sigma} \partial^5 A^4) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Debido a que las coordenadas x^4 y x^5 están compactificadas en un círculo de radio R y r , respectivamente, entonces se puede considerar un desarrollo de Fourier en estas coordenadas para los campos de norma A_μ y A_4 , de la siguiente forma

$$A_{\mu,4} = \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{\mu,4}^{(\eta,m)}(x) \frac{\chi^\eta(x^5)}{\sqrt{r}} \frac{e^{i\frac{m}{R}x^4}}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (7)$$

Sustituyendo esta expresión de KK de los campos de norma en la acción (6) e integrando sobre x^4 y x^5 se obtiene la siguiente acción efectiva 4D

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4} \sum_{\eta=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int d^4 x \left[F_{\mu\nu}^{(\eta,m)} F^{\mu\nu(\eta,m)} \right. \\ &\quad - 2A^{\mu(\eta,m)} \partial_\mu \partial_\nu A^{\nu(\eta,m)} + 2 \left(\frac{m^2}{R^2} + m_\eta^2 \right) A_{\mu(\eta,m)} A^{\mu(\eta,m)} \\ &\quad \left. + 2 (\partial_\mu A_4^{(\eta,m)})^2 + 2 \left(\frac{m^2}{R^2} + m_\eta^2 \right) A_4^{(\eta,m)} A_4^{(\eta,m)} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

con $F_{\mu\nu}^{(\eta,m)} = \partial_\mu A_\nu^{(\eta,m)} - \partial_\nu A_\mu^{(\eta,m)}$, y además se ha considerando que $\chi^n(y)$ satisface la siguiente condición de ortonormalización

$$\frac{1}{r} \int_{-\pi r}^{\pi r} e^{-\sigma} \chi^\eta(x^5) \chi^n(x^5) dx^5 = \delta_{\eta n}, \quad (9)$$

y que también $\chi^n(y)$ cumple la ecuación diferencial

$$\partial_5 (e^{-3\sigma} \partial_5 \chi^n) = -m_\eta^2 e^{-\sigma} \chi^n. \quad (10)$$

Aquí m_η corresponden al espectro de los modos para la coordenada y , con unidades de masa. Si $m_\eta = 0$, la expresión (10) se reduce a la siguiente condición

$$\partial_5 \chi^0(x^5) = A e^{3\kappa|x^5|}, \quad (11)$$

donde A es una constante arbitraria que se puede determinar imponiendo condiciones de frontera en la brana. De acuerdo a (4),

χ^0 satisface la condición de frontera de Neumann en $x^5 = 0, \pi r$, por lo que el modo cero es una constante e implementando la condición de ortonormalidad (9) se tiene

$$\chi^0(x^5) = \sqrt{\frac{\kappa}{1 - e^{-\pi r \kappa}}}. \quad (12)$$

Mientras que para los modos excitados ($m_\eta \neq 0$), es conveniente realizar el siguiente cambio de variable $z = \frac{m}{\kappa} e^\sigma$ y redefinir a $\chi(z)$ como $\chi(z) = \left(\frac{m}{\kappa z}\right)^{\frac{3}{2}} f(z)$ en Ec. (10), lo cual conduce a

$$\left[z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] f(z) = 0. \quad (13)$$

Las soluciones de (13) pueden expresarse en términos de las funciones Bessel de orden 3/2, de la siguiente forma

$$\chi^\eta(x^5) = e^{\frac{3}{2}\sigma} N_1 \left[J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^\sigma \right) + b_1 Y_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^\sigma \right) \right], \quad (14)$$

donde N_1 y b_1 son constantes. N_1 se puede obtener usando la condición de ortogonalidad (9), la cual no es importante para el propósito de este trabajo. La función χ^η satisface la condición de frontera $\partial_{x^5} \chi^\eta|_{0,\pi r} = 0$, la cual permite determinar el espectro de masas. Así se puede escribir la siguiente relación

$$\partial_{x^5} \left(e^{\frac{3}{2}\sigma} N_1 \left[J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^\sigma \right) + b_1 Y_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^\sigma \right) \right] \right) \Big|_{0,\pi r} = 0. \quad (15)$$

La expresión anterior se reduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} \right) + b_1 Y_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} \right) &= 0, \\ J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^{\kappa \pi r} \right) + b_1 Y_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^{\kappa \pi r} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Este sistema tiene una solución no trivial, únicamente si el determinante

$$J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} \right) Y_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^{\kappa \pi r} \right) - Y_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} \right) J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{m_\eta}{\kappa} e^{\kappa \pi r} \right) = 0, \quad (17)$$

se anula, y por lo tanto el espectro de masas m_η puede ser obtenido de las raíces de (17). Si asumimos $\pi \kappa r \gg 1$ y $m_\eta \ll \kappa$, el argumento de las funciones Bessel deben de satisfacer

$$m_\eta = \eta \bar{\kappa} \pi, \quad \bar{\kappa} = \kappa e^{-\kappa \pi r}. \quad (18)$$

Es interesante señalar que la expresión (8) muestra que la acción de Maxwell 6D es equivalente a una teoría 4D con una torre infinita de campos de norma y campos escalares, con masas m^2/R^2 y $m_\eta = \eta \bar{\kappa} \pi$. La masa efectiva $m_{m_\eta}^2 = \frac{m^2}{R^2} + m_\eta^2$ recoge las dos contribuciones independientes correspondientes a las dos dimensiones extra compactas, respectivamente. La reescritura de la acción 6D en la forma (8) se le llama la descomposición de Kaluza-Klein.

3. Espectro de cuerpo negro

La descomposición de Kaluza-Klein de la acción de Maxwell 6D obtenida en la sección anterior, conlleva a dos sectores en 4D. El primero de ellos, el sector sin masa contiene la acción de Maxwell 4D, así como a un campo escalar sin masa $A_4^{(0,0)}$ en

4D. Mientras que el segundo sector, contiene a un conjunto infinito de campos de norma y de campos escalares con masas $\frac{m^2}{R^2} + m_\eta^2$, a estos campos se les suele llamar la torre de KK.

Cabe mencionar que los campos escalares $A_4^{(\eta,m)}$ no contribuyen a la radiación de cuerpo negro, porque las condiciones de frontera en los campos de norma no imponen ninguna condición a los campos escalares y por lo tanto son campos libres en todo el espacio-tiempo 4D.

Para este análisis de la radiación de cuerpo negro, se inicia con el sector sin masa y posteriormente se aborda el sector masivo.

3.1. Sector sin masa

En el sector sin masa tenemos las cuatro componentes del campo de norma habituales ($\eta = 0, m = 0$ y, por lo tanto, $m_{m\eta} = 0$) más dos campos escalares 4D sin masa adicionales. Sin embargo, debido a que la coordenada x^5 tiene una simetría S^1/Z_2 , A_5 no tiene modo cero, mientras que A_4 sí. Por lo tanto, solo tenemos un campo escalar sin masa 4D adicional $A_4^{(0,0)}$.

Para estudiar la radiación de cuerpo negro se considerará el ensamble de fotones sin masa en una cavidad de volumen V con paredes reflectantes ideales a temperatura T . Este sistema está comunicado con el exterior por un pequeño orificio bidimensional. Las ondas electromagnéticas en el interior de la cavidad pueden tratarse como ondas estacionarias. Aquí, por simplicidad, consideramos una cavidad con forma de caja de lado L y además elegimos un sistema de coordenadas ortogonales con origen en uno de los vértices de la cavidad.

Según las condiciones de frontera, las componentes del campo eléctrico deben desaparecer en las paredes de la cavidad, por lo que los fotones tendrán sus vectores de onda k_i dados por

$$k_i = \frac{\pi n_i}{L}. \quad (19)$$

Aquí $n_i = 1, 2, 3, \dots$ representa los posibles modos de vibración. El número total de modos en el intervalo $[k, k + dk]$ es dado por

$$N(k)dk = \lambda \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk, \quad (20)$$

donde λ es la polarización del fotón y tiene un valor de dos en 4D. Reescribiendo (20) en el espacio ν , se tiene

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3} d\nu. \quad (21)$$

Entonces, usando la energía promedio por modo

$$\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (22)$$

se puede escribir a la densidad de energía espectral como

$$U(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} d\nu. \quad (23)$$

En mecánica cuántica se tiene la relación entre radiancia (energía emitida por unidad de área por unidad de tiempo) y densidad de energía dada por un factor puramente geométrico, así entonces se tiene

$$R(T) = \frac{c}{4} U(T) = \int_0^\infty R(T, \nu) d\nu, \quad (24)$$

donde la radiancia espectral $R(T, \nu)$ is

$$R(T, \nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (25)$$

Para la evaluación de (24) realizamos el cambio de variable $x = h\nu/k_B T$ y usamos la identidad matemática

$$\int_0^\infty \frac{x^d}{e^x - 1} dx = \Gamma(d+1) \zeta(d+1), \quad (26)$$

con $\Gamma(z)$ la función gamma y $\zeta(z)$ es la función zeta de Riemann. De esta forma, se es fácil llegar al siguiente resultado

$$R(T) = \sigma_B T^4, \quad \sigma_B = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}. \quad (27)$$

3.2. Sector masivo

En el caso en el que el fotón posea masa, entonces, en presencia de paredes perfectamente reflectantes, un gas de fotones tendrá dos grados de libertad transversales y uno longitudinal. Sorprendentemente, las tres polarizaciones no producen tres modos discretos, sino solo dos modos discretos.

De acuerdo al trabajo realizado por Bass y Schrodinger (1955), ellos argumentaron que la interacción del modo longitudinal del fotón con la materia sería tan débil, que difícilmente contribuye al equilibrio de la radiación térmica en una cavidad, es decir, las paredes de la cavidad son transparentes para los modos longitudinales. La razón es la tremenda contracción de Lorentz de los campos longitudinales al pasar del marco en reposo de un fotón masivo al marco en reposo de la cavidad.

Los modos discretos son modos no penetrantes donde las componentes del campo eléctrico son cero tanto en el interior como en las paredes de la cavidad. Para satisfacer estas condiciones de frontera, tenemos la siguiente relación en términos del número de onda

$$k_i = \frac{\pi n_i}{L}, \quad (28)$$

donde n_i son enteros. El número de los modos con k en el rango $[k, k + dk]$ (Torres-Hernández (1985)) es dado por

$$N(k, m_{eff}) dk = \frac{V}{\pi^2} k \sqrt{k^2 - m_{eff}^2} dk, \quad m_{eff}^2 = \frac{m^2}{R^2} + n^2 \kappa^2 \pi^2. \quad (29)$$

Donde se han incluido ambas polarizaciones y la masa efectiva del fotón m_{eff} . Expresando (29), se puede reescribir el número total de modos con frecuencias entre ν y $\nu + d\nu$ como

$$N(\nu, m_{eff}) d\nu = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \sqrt{1 - \frac{c^2 m_{eff}^2}{4\pi^2 \nu^2}} d\nu. \quad (30)$$

Así la densidad de energía es

$$U(T, m_{eff}) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_u^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \sqrt{1 - \frac{u^2}{\nu^2}} d\nu, \quad u = \frac{c m_{eff}}{2\pi}. \quad (31)$$

Nuevamente, se expresa a la densidad de energía en término de la radiancia

$$R(T, m_{eff}) = \frac{c}{4} U(T, m_{eff}) = \int_u^\infty R(T, m_{eff}, \nu) d\nu, \quad (32)$$

con la correspondiente radiación espectral dada por

$$R(T, m_{eff}, \nu) = \frac{2\pi h \nu^2 \sqrt{\nu^2 - u^2}}{c^2 e^{h\nu/k_B T} - 1}. \quad (33)$$

usando la expresión

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{\ell=1}^{\infty} e^{-x\ell}, \quad (34)$$

se puede expresar a (32) como

$$R(T, m_{eff}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\pi h}{c^2} \int_u^{\infty} \nu^2 e^{-\frac{h\nu\ell}{k_B T}} \sqrt{\nu^2 - u^2} d\nu. \quad (35)$$

El siguiente paso en el cálculo es notar que la integral se puede reescribir en términos de la derivada de la variable $\beta = 1/k_B T$, por lo que se tiene

$$R(T, m_{eff}) = - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\pi}{c^2 \ell} \frac{d}{d\beta} \int_u^{\infty} \nu e^{-\beta h\nu\ell} \sqrt{\nu^2 - u^2} d\nu. \quad (36)$$

Para calcular la integral, usamos la relación

$$\int_u^{\infty} x(x^2 - u^2)^{\eta-1} e^{-\mu x} dx = \frac{2^{\eta-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}-\eta} u^{\eta+\frac{1}{2}} \Gamma(\eta)}{\sqrt{\pi}} K_{\eta+\frac{1}{2}}(\mu u), \quad (37)$$

donde $K_\nu(z)$ es la función modificada de Bessel y $\Gamma(z)$ es la función Gamma. De esta forma se tiene

$$\begin{aligned} R(T, m_{eff}) &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\pi}{c^2 \ell} \frac{d}{d\beta} \left[\frac{c^2 m_{eff}^2}{4\pi^2 h \ell} \frac{1}{\beta} K_2 \left(\frac{\beta \ell h c m_{eff}}{2\pi} \right) \right] \\ &= - \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{m_{eff}^2}{2\pi h \ell^2} \frac{d}{d\beta} \left[\frac{1}{\beta} K_2 \left(\frac{\beta \ell h c m_{eff}}{2\pi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Usando la propiedad $z \partial_z K_\nu(z) = -z K_{\nu-1}(z) - \nu K_\nu(z)$, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} R(T, m_{eff}) &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{m_{eff}^2}{2\pi} \left[\frac{3k_B^2 T^2}{h \ell^2} K_2 \left(\frac{\ell h c m_{eff}}{2\pi k_B T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_B T c m_{eff}}{2\pi \ell} K_1 \left(\frac{\ell h c m_{eff}}{2\pi k_B T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

En la siguiente subsección consideraremos la contribución del sector masivo y sin masa para la radiancia.

3.3. Ley de Stefan-Boltzmann

La razón total de emisión de energía de cuerpo negro por segundo por unidad de área $R_T(T)$ se obtiene sumando la contribución $R(T)$ del sector sin masa y la contribución $R(T, m_{eff})$ del sector masivo:

$$\begin{aligned} R_T(T) &= \sigma_B T^4 + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\eta=\ell=1}^{\infty} \frac{c^2}{h^2} \left(\frac{m^2}{R^2} + \eta^2 \bar{\kappa}^2 \pi^2 \right) \\ &\quad \left[\frac{3k_B^2 T^2}{h \ell^2} K_2 \left(\frac{\ell c^2}{2\pi k_B T} \sqrt{\frac{m^2}{R^2} + \eta^2 \bar{\kappa}^2 \pi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k_B T c^2}{2\pi h \ell} \sqrt{\frac{m^2}{R^2} + \eta^2 \bar{\kappa}^2 \pi^2} \right. \\ &\quad \left. K_1 \left(\frac{\ell c^2}{2\pi k_B T} \sqrt{\frac{m^2}{R^2} + \eta^2 \bar{\kappa}^2 \pi^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (40)$$

La prima indica que el término con $m = 0$, ha sido suprimido. En este punto es conveniente introducir una aproximación, es decir, la contribución de la coordenada extra compacta x^4 en la masa $m_{m\eta}$, es dada en términos del espectro discreto m^2/R^2 . Aquí la física cuatro dimensional está asociada al modo sin masa $\eta = m = 0$, mientras que para $m \neq 0$ se tiene una torre infinita de modos masivos discretos, lo cual es una manifestación de la coordenada extra x^4 . Estos modos masivos pueden ser suprimidos en el régimen a bajas energías si $R^{-1} \ll \kappa$. Entonces en el régimen de bajas energías se puede considerar la siguiente aproximación ($R^{-1} \ll \kappa$), por lo que solo el modo cero de la coordenada compacta x^4 es el único relevante. Bajo esta consideración, se tiene

$$R_T(T) = \left[\sigma_B + \Delta\sigma'_B \left(\frac{T}{T_c} \right) \right] T^4, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta\sigma'_B \left(\frac{T}{T_c} \right) &= \frac{15\sigma_B}{4\pi^4} \sum_{\eta=\ell=1}^{\infty} \left[3 \left(\frac{\eta T_c}{\ell T} \right)^2 K_2 \left(\frac{\eta \ell T_c}{2T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta^3}{2\ell} \left(\frac{T_c}{T} \right)^3 K_1 \left(\frac{\eta \ell T_c}{2T} \right) \right], \quad T_c = \frac{hc\bar{\kappa}}{k_B}. \end{aligned} \quad (42)$$

Donde (41) expresa la ley modificada de Stefan-Boltzmann, y el primer término entre paréntesis es la contribución del modo cero ($\eta = m = 0$), mientras que el segundo término, es un término correctivo proveniente de la torre Kaluza-Klein de la sexta coordenada.

4. Análisis Numérico

En la sección anterior se presentó una expresión para la ley de Stefan-Boltzmann en modelos de Randall Sundrum extendidos en una dimensión compacta. Esta expresión depende de dos parámetros libres adicionales: el radio $6D$ del espacio Anti-de Sitter κ^{-1} y el tamaño de la coordenada x^5 , r . Por lo que se emplearan a κr y κ como parámetros del modelo (los cuales están codificados en T_c).

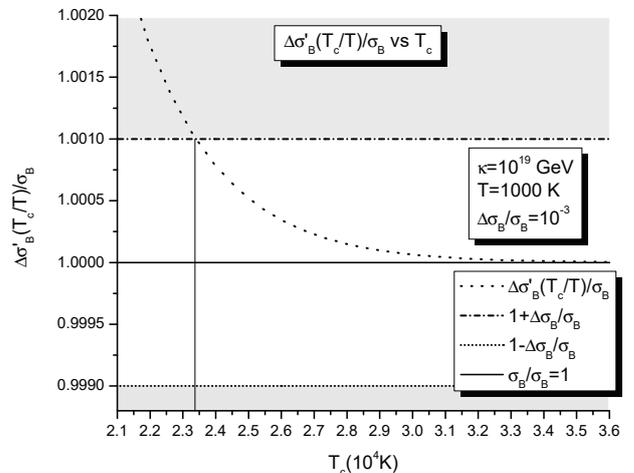


Figura 1: Comparación entre el error fraccional $\Delta\sigma_B/\sigma_B \sim 10^{-3}$ (banda blanca, ver Torres-Hernández (1985)) y la ley modificada de Stefan-Boltzmann.

Como se mencionó en la introducción, se han utilizado pruebas de baja energía para obtener información de modelos de dimensiones extra compactas. Por ejemplo, en Frank *et al.* (2008) se estudió la fuerza de Casimir entre dos placas paralelas en modelos Randall Sundrum con dimensiones extra compactas. Entonces, para una dimensión extra compacta ($6D$ en nuestro caso), el efecto Casimir establece un límite de $\kappa r \lesssim 20$, donde el parámetro κ se toma en la escala de Planck como 10^{19} GeV.

Para obtener un límite aproximado de κr , usamos la incertidumbre relativa en la constante de Stefan-Boltzmann σ_B . Por supuesto, no es una de las mejores cantidades físicas medidas, pero puede ayudar a proporcionar un límite superior para el parámetro κr . De acuerdo a las medidas del error fraccionario $\Delta\sigma_B/\sigma_B \sim 10^{-3}$ en $T = 1000$ K Torres-Hernández (1985) y usando $T_c = 23,392735 \times 10^3$ K como una función del parámetro κr implica que el límite superior para κr es alrededor de 20, como se ve en la figura 1 para $\kappa = 10^{10}$ GeV.

Por supuesto, el límite superior para κr depende del valor elegido para κ , por lo que si se considera la radiación efectiva en el plano $\kappa\text{-}\kappa r$ para un error fraccionario $\Delta\sigma_B/\sigma_B \sim 10^{-3}$ a $T = 1000$ K como se muestra en la Fig. 1. La región excluida después de permitir un error fraccionario $\sim 10^3$ multiplicado por $4\pi^4/15$ a la ley estándar de Stefan-Boltzmann está sombreada. El límite de la región excluida muestra la dependencia de k del límite superior κr .

Ahora consideremos el comportamiento de la Ec. (41) para altas temperaturas $T \gg T_c$ ($z = \eta\ell T_c/2T \ll 1$), el comportamiento de las funciones de Bessel modificadas son

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z}, \quad K_2 \approx \frac{2}{z^2}. \quad (43)$$

Introduciendo (43) y usando la función Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (44)$$

en (41), entonces se puede expresar a $R_T(T)$ como

$$R_T(T) \approx \sigma_B \left(1 + \frac{90}{\pi^4}\right) T^4, \quad T_c \ll T. \quad (45)$$

Para $T \gg T_c$ el efecto de las dimensiones extras en este escenario está codificado en un factor multiplicativo $\sigma_B \rightarrow \sigma_B \left(1 + \frac{90}{\pi^4}\right)$ en lugar del término aditivo.

Por otro lado, para temperaturas suficientemente bajas, $T \ll T_c$, el comportamiento de las funciones de Bessel modificadas es

$$K_1(z) \approx K_2 \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \quad (46)$$

Substituyendo este resultado en (41) y manteniendo únicamente los primeros términos en las sumas sobre η y ℓ (debido al comportamiento de la función exponencial), se obtiene el siguiente resultado

$$R_T(T) \approx \left\{1 + \frac{15}{8\pi^{7/2}} \left[\left(\frac{T_c}{T}\right)^{5/2} + \frac{27}{4} \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}\right] \exp\left[-\frac{T_c}{2T}\right]\right\} \sigma_B T^4, \quad T \ll T_c. \quad (47)$$

Aquí, para cualquier $T \ll T_c$, las funciones de Bessel modificadas en (41) se vuelven exponencialmente más pequeñas, por lo que, para bajas temperaturas, la ley efectiva de Stefan-Boltzmann (41) se reduce a su ya conocida forma (27).

5. Conclusión

En este trabajo se estudió la ley de radiación de cuerpo negro en los modelos de Randall Sundrum extendidos en una dimensión compacta, así como el límite superior del parámetro κr . Primero se analizó el problema de Maxwell $6D$ y luego se obtuvo el espectro KK del campo electromagnético en la teoría efectiva de 4 dimensiones.

Introduciendo la masa de los modos y encontrando primero la densidad de energía, luego la ley efectiva de Stefan-Boltzmann en este escenario como funciones de T_c (con $k \sim 10^{19}$ GeV) así como T . Los efectos de dependencia x^5 se incluyen solo en los términos de la función de Bessel y la contribución dominante surge cuando el argumento de las funciones de Bessel es pequeño, por lo que los primeros términos de la serie son dominantes. Así, para temperaturas superiores a T_c , las desviaciones en la ley estándar de Stefan-Boltzmann cobran relevancia, como se puede apreciar en (45), mientras que para temperaturas bajas la ley efectiva de Stefan-Boltzmann se reduce a la conocida ley de Stefan-Boltzmann (47).

Cuando se impone la condición de que el resultado reproduzca las medidas experimentales, dentro de las incertidumbres conocidas en $\Delta\sigma_B/\sigma_B \sim 10^{-3}$ en $T = 1000$ K, encontramos que para valores de κ cerca de la escala de Planck, $\kappa r \lesssim 20$, el límite superior de κr disminuye cuando el valor de κ disminuye. Finalmente, nuestros resultados obtenidos para el parámetro κr son consistentes con los valores que existen en la literatura provenientes del efecto Casimir, $\kappa r \lesssim 16 \sim 20$. (ver el trabajo de Frank *et al.* (2007) para mayor referencia).

Referencias

- Alnes, H., Ravndal, F., y Wehus, I. K. (2007). Black-body radiation with extra dimensions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(47):14309.
- Appelquist, T., Cheng, H.-C., y Dobrescu, B. A. (2001). Bounds on universal extra dimensions. *Phys. Rev.*, D64:035002.
- Bass, L. y Schrodinger, E. (1955). Must the photon mass be zero? *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 232(1188):1–6.
- Bosso, P. y Vega, J. M. L. (2022). Minimal length phenomenology and the black body radiation. *Class. Quant. Grav.*, 39(17):175001.
- Cardoso, T. R. y Castro, A. S. d. (2005). The blackbody radiation in a D-dimensional universes. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 27:559 – 563.
- Chang, S., Hisano, J., Nakano, H., Okada, N., y Yamaguchi, M. (2000). Bulk standard model in the Randall-Sundrum background. *Phys.Rev.*, D62:084025.
- Cheng, H.-b. (2008). The Casimir force on a piston in the spacetime with extra compactified dimensions. *Phys. Lett.*, B668:72–77.
- Cheng, H.-C., Matchev, K. T., y Schmaltz, M. (2002). Radiative corrections to Kaluza-Klein masses. *Phys. Rev.*, D66:036005.
- Davoudiasl, H., Hewett, J., y Rizzo, T. (2000). Bulk gauge fields in the Randall-Sundrum model. *Phys.Lett.*, B473:43–49.
- Dimopoulos, S. y Landsberg, G. L. (2001). Black holes at the LHC. *Phys. Rev. Lett.*, 87:161602.
- Frank, M., Saad, N., y Turan, I. (2008). The Casimir Force in Randall Sundrum Models with q+1 dimensions. *Phys. Rev.*, D78:055014.
- Frank, M., Turan, I., y Ziegler, L. (2007). The Casimir Force in Randall Sundrum Models. *Phys. Rev. D*, 76:015008.

- Giddings, S. B. y Thomas, S. D. (2002). High-energy colliders as black hole factories: The End of short distance physics. *Phys. Rev.*, D65:056010.
- Husain, V., Seahra, S. S., y Webster, E. J. (2013a). High energy modifications of blackbody radiation and dimensional reduction. *Phys. Rev. D*, 88:024014.
- Husain, V., Seahra, S. S., y Webster, E. J. (2013b). High energy modifications of blackbody radiation and dimensional reduction. *Phys. Rev. D*, 88(2):024014.
- Kaluza, T. (1921). On the Problem of Unity in Physics. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972.
- Kim, H.-C., Rim, C., y Yee, J. H. (2007). Blackbody radiation in kappa-Minkowski spacetime. *Phys. Rev.*, D76:105012.
- Klein, O. (1926). Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, 37:895–906. [Surveys High Energ. Phys.5,241(1986)].
- Linares, R., Morales-Tecotl, H. A., y Pedraza, O. (2008). Casimir force for a scalar field in warped brane worlds. *Phys. Rev.*, D77:066012.
- Moradpour, H., Ziaie, A. H., Lobo, I. P., Morais Graça, J. P., Sharma, U. K., y Jahromi, A. S. (2022). The third law of thermodynamics, non-extensivity and energy definition in black hole physics. *Mod. Phys. Lett. A*, 37(12):2250076.
- Morales-Tecotl, H. A., Pedraza, O., y Pimentel, L. O. (2007). Low-energy effects in brane worlds: Liennard-Wiechert potentials and Hydrogen Lamb shift. *Gen. Rel. Grav.*, 39:1185–1202.
- Nordstrom, G. (1914). On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields. *Phys. Z.*, 15:504–506.
- Nozari, K. y Anvari, F. (2012). Black body radiation in a model universe with large extra dimensions and quantum gravity effects.
- Ramos, R. y Boschi-Filho, H. (2014). The size of compact extra dimensions from blackbody radiation laws. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 393:261 – 267.
- Ramos, R. y Filho, H. B. (2014). The Blackbody Radiation Laws in the $AdS_5 \times S^5$ Spacetime.
- Servant, G. y Tait, T. M. P. (2003). Is the lightest Kaluza-Klein particle a viable dark matter candidate? *Nucl. Phys.*, B650:391–419.
- Teo, L. P. (2009). Casimir Effect in Spacetime with Extra Dimensions: From Kaluza-Klein to Randall-Sundrum Models. *Phys. Lett.*, B682:259–265.
- Torres-Hernández, J. (1985). Photon mass and blackbody radiation. *Phys. Rev. A*, 32:623–624.