

Sincronización MIMO Hamiltoniana usando Ampliación de Muestreo Hamiltonian MIMO Synchronization by using up-sampling

J.C. Núñez-Pérez ^{a,*}, M.A. Estudillo-Valdez ^a, A. Calvillo-Téllez ^a

^aInstituto Politécnico Nacional, IPN-CITEDI, Tijuana, Baja California, México.

Resumen

En este artículo se presenta una metodología para realizar una sincronización simultánea con 10 osciladores distintos, cinco de los cuales son en 3D y otros cinco en 4D utilizando el mismo oscilador esclavo. La sincronización se consigue al muestrear cada uno de los 10 osciladores lo que reduce la calidad de los osciladores maestro, sin embargo, los resultados de correlación demostraron que la similitud se mantiene en todo momento por encima del 99% para los diez osciladores. El sistema observador se conforma de un sistema de ecuaciones generalizado que permite la reconfiguración de sus formas de onda para imitar múltiples osciladores caóticos. Finalmente, se diseñó un sistema didáctico que para manipular los parámetros de los osciladores a sincronizar, así como las ganancias de sincronización y condiciones iniciales. El sistema de ecuaciones presentado en este artículo permite simular los osciladores caóticos de Lorenz, Chen, Liu, Rossler, cuatro alas, dos alas, entre otros.

Palabras Clave: Caos, Chen, Lorenz, Matlab, sincronización.

Abstract

This article presents a methodology to perform a simultaneous synchronization with 10 different oscillators, five of them are in 3D and the other five in 4D, using the same slave oscillator. The synchronization is achieved by sampling each of the 10 oscillators, which reduces the quality of the master oscillators, however, the correlation results showed that the similarity is always maintained above 99% for all the ten oscillators. The observer system is made up of a generalized system of equations that allows reconfiguring its waveforms to mimic multiple chaotic oscillators. Finally, a didactic system was designed to manipulate the parameters of the oscillators to be synchronized, as well as the synchronization gains and initial conditions. The system of equations presented in this article allows simulating the chaotic oscillators of Lorenz, Chen, Liu, Rossler, four wings, two wings, among others.

Keywords: Chaos, Chen, Lorenz, Matlab, synchronization.

1. Introducción

El manejo masivo de información a través de las diferentes redes de comunicación, telefonía móvil, WIFI, Bluetooth, Zigbee y para diversas aplicaciones desde el público en general, comunicaciones comerciales, marítimas y por avión, etc, y vienen seguidas de un progreso en técnicas de infiltración indeseadas o interceptación de datos sensibles.

Un tipo de modulación que ha sido estudiada ampliamente y que mejora la capacidad de encriptado de información consiste en utilizar portadoras caóticas a partir de osciladores caóticos. Sin embargo, ya se han reportado técnicas que permiten la demodulación de la información modulada mediante técnicas caóticas. Tales técnicas de penetración son conocidas como ataques de fuerza bruta, ataque de criptoanálisis diferencial, entre otras.

Adicionalmente, en la actualidad se vive una era de la información, en donde cada vez aparecen nuevas tecnologías como el cómputo en la nube (Cloud Computing), internet de las cosas (IoT) y los datos masivos (Big Data). Entre las anteriores tecnologías se generan cantidades enormes de datos que necesitan ser transmitidas desde un usuario hasta un destino de almacenamiento o hacia otro usuario. Por lo tanto, es necesario el uso de sistemas que garanticen aspectos como integridad de la información, y sobre todo confidencialidad durante su transmisión.

El software desarrollado en este artículo presenta una comunicación con sincronización MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), es decir, que permite una sincronización simultánea entre múltiples sistemas maestro con distintos osciladores caóticos y un solo sistema observador para aplicación en sistemas de seguridad. El oscilador del sistema

*Autor para la correspondencia: nunez@citedi.mx

Correo electrónico: nunez@citedi.mx (José Cruz Núñez-Pérez), mestudillo@citedi.mx (Miguel Angel Estudillo-Valdez), calvillo@citedi.mx (Andrés Calvillo Téllez).

esclavo se basa en un oscilador reconfigurable que se acopla a sistemas 3D (3 Dimensiones) y 4D (4 Dimensiones) en una sincronización Hamiltoniana con topología maestro-esclavo. Mientras que los sistemas maestros son modelos de ecuaciones independientes tales como los reportados en (Rossler, 1976), (Lorenz, 1963), (Hu, 2013), (Qi, 2015) y generan formas de onda en tres dimensiones, como los osciladores de Rossler, Lorenz, Chen, Liu, cuatro alas; y sistemas en cuatro dimensiones tales como el de Qi, Qiang, Dadras, Leilei, entre otros (Lai, 2018), (Abedini, 2014), (Zhou, 2016).

La contribución de este software consta de un algoritmo que sincroniza un sistema esclavo con múltiples sistemas maestros distintos, ya sean en 3D o 4D y genera salidas proporcionales a la cantidad de transmisores (sistemas maestros) conectados al receptor (sistema esclavo).

2. Marco Teórico

En esta sección se explican los fundamentos teóricos de los osciladores caóticos, la importancia del oscilador reconfigurable como sistema esclavo y el proceso de sincronización MIMO.

2.1. Características de los sistemas caóticos

1. Deterministas: pueden ser representados mediante modelos matemáticos, por tanto, no son modelos aleatorios.
2. Sensibilidad a las condiciones iniciales: una ligera variación al comienzo de las iteraciones o durante la evolución de este genera una configuración totalmente distinta en las formas de onda.
3. Impredecibles: por ejemplo cuando no se conocen los aspectos de su configuración, tales como el método numérico, parámetros de control, condiciones iniciales, condiciones de punto fijo o punto flotante, tamaño de paso y longitud de palabra.
4. Baja autocorrelación: un segmento de señal caótica difiere en sus formas de onda respecto de segmentos de la misma longitud y de la misma señal en diferentes fases de tiempo.

2.2. Métricas de Similitud

La auto-correlación es utilizada para medir la similitud de un segmento de señal en diferentes desfases de tiempo de la misma señal. Si los segmentos son similares, el coeficiente de autocorrelación será cercano a 1, aunque una similitud invertida arrojaría un coeficiente cercano a -1. Por el contrario, un valor cercano a 0 indica una baja autocorrelación, la autocorrelación de dos señales en tiempo discreto se puede obtener a partir de la ecuación (1),

$$r_x[l] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot x[m+l], \quad (1)$$

en donde x es la señal por verificar, m equivale a la posición actual y l corresponde con el desfase aplicado.

La correlación cruzada mide la similitud entre dos o más señales tanto en tiempo simultáneo, como desfasadas en el

tiempo. Su magnitud puede ser negativa lo que indica una similitud invertida, y positiva que indica el nivel de similitud sin inversión. Un coeficiente de 1 indica una similitud total entre ambas señales, y ninguna similitud cuando el coeficiente es 0, este coeficiente se puede calcular mediante la ecuación (2),

$$C_{xy} = \frac{\sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=0}^N (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (2)$$

en donde las señales a comparar son $\bar{x} = \sum_{i=0}^N x_i/N$, $\bar{y} = \sum_{i=0}^N y_i/N$, N es la longitud de la señal y $C_{xy} \in (-1,1)$. En la Figura 1(a) se observa un diagrama de autocorrelación típica de un oscilador caótico. Para un desfase de cero se puede notar la alta autocorrelación, sin embargo, cuando las señales comienzan a desfasarse la similitud descende rápidamente. Mientras que en la Figura 1(b) se muestra un diagrama típico de correlación cruzada, en donde se aprecia que solo hay similitud cuando hay cero muestras desplazadas en una señal caótica. Sin embargo, la similitud decae rápidamente al desplazar la señal cierto número de muestras tanto hacia la izquierda como a la derecha.

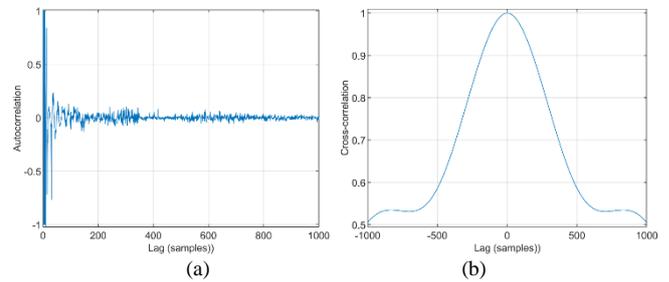


Figura 1. (a) Auto-correlación típica de un oscilador caótico y (b) Diagrama típico de correlación cruzada en una señal caótica.

2.3. Exponentes de Lyapunov

Una métrica que determina el comportamiento caótico en un oscilador es la divergencia entre trayectorias cercanas, esto se puede comprobar mediante los exponentes de Lyapunov y del cual existen diversas técnicas para su obtención (Wu, 2015), (Dubeibe, 2013), (Zhou, 2021). El exponente de Lyapunov es una representación del comportamiento de una señal evaluada en trayectorias cercanas, el cual indica que 1) si el exponente resulta negativo hay convergencia entre trayectorias, 2) si es positivo es porque existe una divergencia exponencial, en cuyo caso se dice que el sistema puede ser caótico, a mayor convergencia o divergencia existente con mayor rapidez se llegará a los puntos de estabilidad o al caos. En una función existirán tantos exponentes de Lyapunov como ecuaciones de estado en el sistema. Partiendo de un sistema 3D se asignan arbitrariamente las condiciones iniciales de las ecuaciones (3) y (4),

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 1, \quad (3) \\ x_3(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4(0) &= x_1(0) + \delta \\ x_5(0) &= 1 \\ x_6(0) &= 1 \end{aligned}, \quad (4)$$

en donde x_1, x_2, \dots, x_6 son condiciones iniciales evaluadas en distintos instantes de tiempo, siendo δ un diferencial de paso del orden de 1×10^{10} . De este modo se aseguran dos conjuntos de condiciones iniciales muy cercanas.

Evaluando la función n veces por cada punto, a estos se le extrae la diferencia absoluta y entonces se tiene una distancia total descrita por la ecuación (5),

$$D_n = |f_n(x_1 + \delta) - f_n(x_1)|, (5)$$

Lo cual provoca que D_n crezca exponencialmente mientras n se incrementa, por lo que es posible establecer que,

$$\frac{D_n}{\delta} = \frac{|f_n(x_1 + \delta) - f_n(x_1)|}{\delta} = e^{\lambda n}, (6)$$

de modo que si se despeja λ se tiene una expresión que depende de las diferencias inicialmente cercanas de dos trayectorias como se muestra en la ecuación (7),

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|f_n(x_1 + \delta) - f_n(x_1)|}{\delta} \right), (7)$$

debido a que n representa un gran número de iteraciones es posible representar mediante una sumatoria,

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)|, (8)$$

puesto que este modelo tiene límite cuando $n \rightarrow \infty$ se establece que la expresión queda como se muestra en la ecuación (9). Sobre la cual se puede deducir que si el resultado del logaritmo en el parámetro es positivo la divergencia en las trayectorias será tal que el sistema será considerado caótico (Zhang, 2018),

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| \right\}. (9)$$

3. Sistema de Sincronización MIMO

El procedimiento para que un receptor se pueda sincronizar a múltiples transmisores se basa en el principio de sincronización Hamiltoniana convencional. Posteriormente, un algoritmo multiplexa las diferentes entradas hacia un oscilador reconfigurable mientras guarda en memoria resultados previos del resto de transmisores.

3.1. Osciladores de los Sistemas Maestro

En la Tabla 1, de acuerdo con las referencias (Zhang, 2012), (Hu, 2013), (Wang, 2010), (Lorenz, 1963), (Wang, 2019), se muestran cinco sistemas de ecuaciones de 3 dimensiones con sus respectivos parámetros y condiciones iniciales utilizadas

Tabla 1. Osciladores caóticos tridimensionales.

Oscilador caótico	Sistema de Ecuaciones	Mayor Exponente de Lyapunov	Parámetros
Lorenz	$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$	0.798	$a = 16$ $r = 45$ $b = 4$
Cuatro alas	$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + ey \\ \dot{y} = cx + dy - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$	5.823	$a = 14$ $b = 43$ $c = -1$ $d = 16$ $e = 4$
Chen-Lee	$\begin{cases} \dot{x} = ax - yz \\ \dot{y} = by + xz \\ \dot{z} = cz + dxy \end{cases}$	2.741	$a = 5$ $b = -10$ $c = -0.38$ $d = 0.33$
Sakarya	$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + yz \\ \dot{y} = -x - y + axz \\ \dot{z} = z + bxy \end{cases}$	0.09	$a = 0.4$ $b = -0.3$
Newton-Leipnik	$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + byz \\ \dot{y} = -x + ay + cxz \\ \dot{z} = dz - cxy \end{cases}$	0.1302	$a = -0.4$ $b = 10$ $c = 5$ $d = 0.175$

En la Figura 2 se muestran las formas de onda de los osciladores de la Tabla 1 en el plano x - y - z .

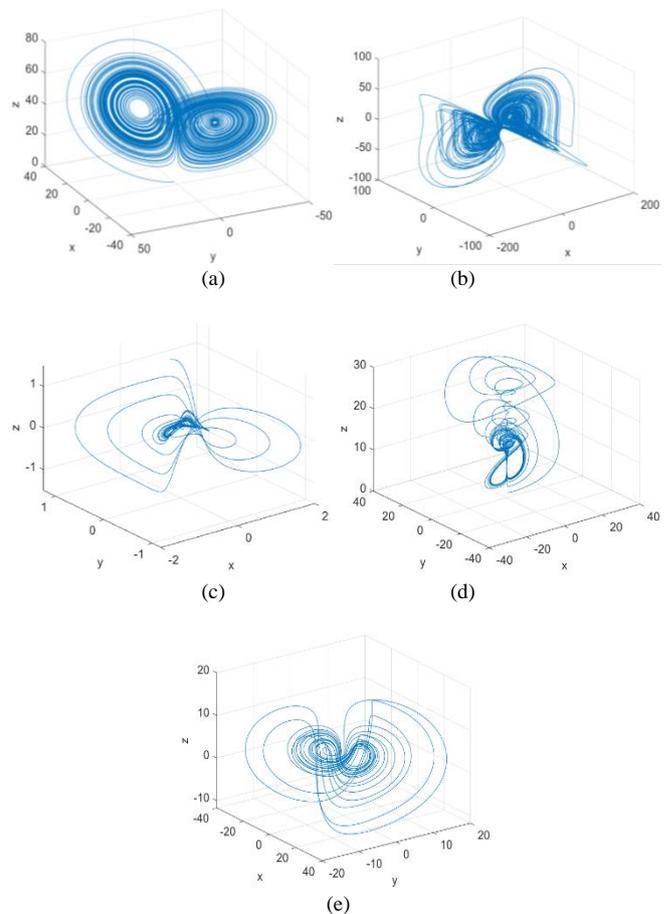


Figura 2. Oscilador (a) Lorenz, (b) 4 alas, (c) Newton-Leipnik, (d) Chen-Lee, (e) Sakarya.

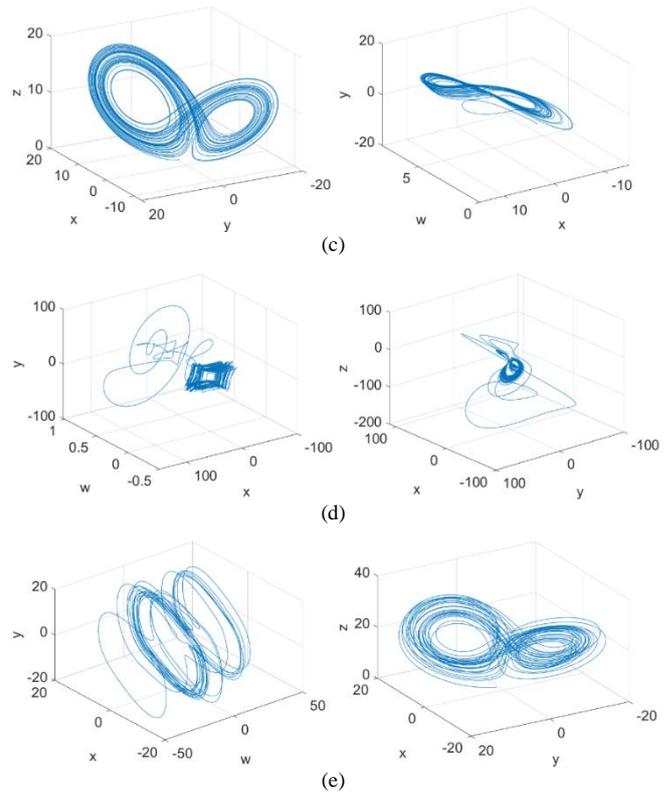
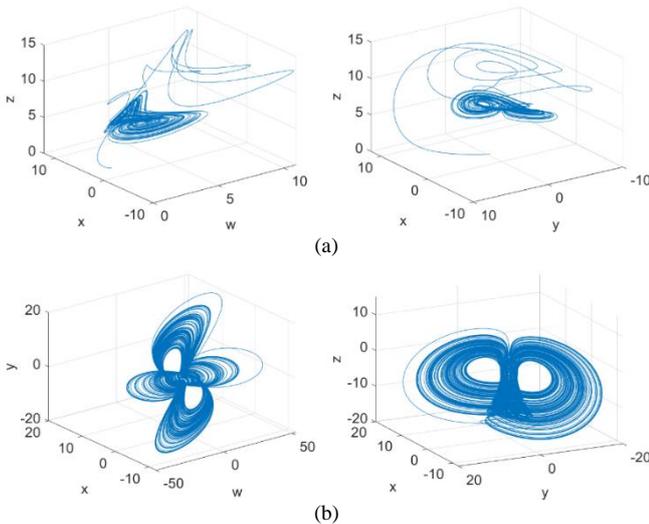
Por otro lado, en la Tabla 2 se muestran 5 conjuntos de ecuaciones para la generación de osciladores en 4D, sus parámetros y condiciones iniciales utilizadas (Qi, 2006), (Effati, 2014), (Zhou, 2016), (Abedini, 2014), (Lai, 2018), (Zhang, 2018).

Tabla 2. Osciladores caóticos en hiperplano.

Oscilador caótico	Sistema de Ecuaciones	Mayor Exponente de Lyapunov	Parámetros
Qi	$\begin{cases} \dot{w} = aw + xyz \\ \dot{x} = b(y - x) + yzw \\ \dot{y} = c(x + y) - xzw \\ \dot{z} = -z + ywx \end{cases}$	3.3152	$\begin{cases} a = -10 \\ b = 30 \\ c = 10 \end{cases}$
Dadras	$\begin{cases} \dot{w} = aw + by \\ \dot{x} = cx - yz \\ \dot{y} = xz + dy \\ \dot{z} = exy + fz + gxw \end{cases}$	1.844	$\begin{cases} a = 0.05 \\ b = -0.2 \\ c = 8 \\ d = -43.75 \\ e = 2 \\ f = -10 \\ g = 5 \end{cases}$
Leilei	$\begin{cases} \dot{w} = ax + byz \\ \dot{x} = c(y - x) \\ \dot{y} = dx - y - xz + w \\ \dot{z} = xy - ez \end{cases}$	1.33	$\begin{cases} a = 8 \\ b = 0.1 \\ c = 10 \\ d = 20 \\ e = 8/3 \end{cases}$
Liu	$\begin{cases} \dot{w} = ax + byz \\ \dot{x} = c(y - x) \\ \dot{y} = dx - y - xz + w \\ \dot{z} = xy + ez + ywx \end{cases}$	0.75	$\begin{cases} a = 8 \\ b = 0.1 \\ c = 10 \\ d = 20 \\ e = 8/3 \end{cases}$
Qiang	$\begin{cases} \dot{w} = ayz \\ \dot{x} = b(y - x) \\ \dot{y} = xz + w \\ \dot{z} = c - xy \end{cases}$	0.4980	$\begin{cases} a = 3 \\ b = 10 \\ c = 10 \end{cases}$

Fuente: elaboración propia.

En la Figura 3 se muestran las formas de onda de los osciladores de la Tabla 2 en tres vistas tridimensionales distintas.



Figuran 3. Osciladores en 4 dimensiones (a) Qi, (b) Qiang, (c) Liu 4D, (d) Dadras, (e) Leilei.

Para fines prácticos las condiciones iniciales de los osciladores en las Tablas 1 y 2 se establecieron en “1” para todas las ecuaciones de estado.

3.2. Sincronización Hamiltoniana

En esta sección es utilizado el oscilador de cuatro alas de la Tabla 1 mostrado en la ecuación (10) para desarrollar las ecuaciones que permiten una sincronización Hamiltoniana,

$$\left. \begin{cases} \dot{x} = ax + by + cyz \\ \dot{y} = dy - xz \\ \dot{z} = ez + fxy \end{cases} \right\}, (10)$$

en donde (a, b, c, d, e, f) son los parámetros de control y (x, y, z) son las variables de estado, se considera el siguiente sistema no lineal en la forma Hamiltoniana Generalizada,

$$\dot{x} = J(x) \frac{\partial H}{\partial x} + S(x) \frac{\partial H}{\partial x}, x \in R^n, (11)$$

en donde $H(x)$ describe una función de energía que está definida globalmente positiva. El vector gradiente de H se denota con $\partial H / \partial x$ y se utiliza una función de energía de la forma $H(x) = (1/2)x^T Mx$. Además, las matrices cuadradas $J(x)$ y $S(x)$ satisfacen $J(x) + J^T(x) = 0$ y $S(x) = S^T(x)$. Por otro lado, si se considera una clase especial de sistemas hamiltonianos generalizados con campos vectoriales desestabilizadores, se obtiene la ecuación (12),

$$\begin{aligned} \dot{x}_m &= J(y) \frac{\partial H}{\partial x_m} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial x_m} + F(y), x_m \in R^n \\ y &= C \frac{\partial H}{\partial x_m}, y \in R^n \end{aligned} \quad , (12)$$

en donde C corresponde con una matriz constante, I corresponde con una matriz simétrica diagonal constante y F corresponde con una función independiente y que forma parte del oscilador caótico. Al seleccionar las variables x_e y η como vector de estado y vector estimados a la salida se genera un sistema observador a partir de la ecuación (12) representado por la ecuación (13) con un vector K conocido como el vector ganancia del observador,

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= J(y) \frac{\partial H}{\partial x_e} + (I + S) \frac{\partial H}{\partial x_e} + F(y) + K(y - \eta) \\ \eta &= C \frac{\partial H}{\partial x_e} \end{aligned} \quad , (13)$$

a partir de la ecuación (12) y (13) se puede desarrollar el proceso de sincronización de manera estructurada como se presenta a continuación.

- Primero se obtiene la función de energía seleccionando la función de energía cuadrática mostrada en la ecuación (14),

$$H(x) = \frac{1}{2} [ax^2 + by^2 + z^2], (14)$$

a su vez el vector gradiente de la ecuación (14) se muestra en la ecuación (15),

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = Px. (15)$$

En donde x corresponde con el vector de variables del oscilador.

- Segundo se obtienen las matrices J y S mediante la representación matricial del oscilador caótico modelado a través de la ecuación (10) resultando la ecuación (16),

$$Ax = \begin{bmatrix} a & b & cy \\ 0 & d & -x \\ fy & 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. (16)$$

La ecuación (16) se reescribe en términos de J y S generando la ecuación (17),

$$A = R \frac{\partial H}{\partial x} = [J(y) + S(y)] \frac{\partial H}{\partial x}, (17)$$

en donde R es una matriz auxiliar y que al ser despejada toma la forma de la ecuación (18),

$$R = AP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & cy \\ 0 & d/b & -x \\ fy/a & 0 & e \end{bmatrix}, (18)$$

a partir de la ecuación (18) se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$S(x) = \frac{1}{2}(R + R^T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{cy}{2} + \frac{fy}{2a} \\ \frac{1}{2} & \frac{d}{b} & \frac{-x}{2} \\ \frac{cy}{2} + \frac{fy}{2a} & \frac{-x}{2} & e \end{bmatrix}, (19)$$

$$J(x) = \frac{1}{2}(R - R^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{cy}{2} - \frac{fy}{2a} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-x}{2} \\ \frac{fy}{2a} - \frac{cy}{2} & \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix}, (20)$$

para este caso se considera la matriz C como se muestra en la ecuación (21),

$$C = [100]. (21)$$

- Tercero se realiza la sincronización de sistemas maestro observador, el sistema maestro se obtiene a partir de desarrollar las ecuaciones (12) y se muestra en la ecuación (22)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{cy}{2} - \frac{fy}{2a} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{-x}{2} \\ \frac{fy}{2a} - \frac{cy}{2} & \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax \\ by \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{cy}{2} + \frac{fy}{2a} \\ \frac{1}{2} & \frac{d}{b} & \frac{-x}{2} \\ \frac{cy}{2} + \frac{fy}{2a} & \frac{-x}{2} & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax \\ by \\ z \end{bmatrix}, (22)$$

de la ecuación (22) se desarrollan las multiplicaciones y se obtiene la ecuación (23)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{z}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{by}{2} + \frac{cyz}{2} - \frac{fyz}{2a} \\ -\frac{ax}{2} - \frac{xz}{2} \\ \frac{fyax}{2a} - \frac{cyax}{2} + \frac{byx}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax + \frac{by}{2} + \frac{cyz}{2} + \frac{fyz}{2a} \\ -\frac{ax}{2} + \frac{byd}{b} - \frac{xz}{2} \\ \frac{cyax}{2} + \frac{fyax}{2a} - \frac{byx}{2} + ez \end{bmatrix}, (23)$$

si las matrices de la ecuación (23) se suman resulta la ecuación (24) que corresponde con el sistema de ecuaciones del oscilador de cuatro alas original,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{m1} \\ \dot{y}_{m1} \\ \dot{z}_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cyz \\ yd - xz \\ fyx + ez \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Del mismo modo, el sistema observador queda representado a partir de desarrollar la ecuación (13) como se muestra en la ecuación (25),

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{cy}{2} - \frac{fy}{2a} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{x}{2} \\ \frac{fy}{2a} - \frac{cy}{2} & \frac{x}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax \\ by \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{cy}{2} + \frac{fy}{2a} \\ \frac{1}{2} & \frac{d}{b} & -\frac{x}{2} \\ \frac{cy}{2} + \frac{fy}{2a} & -\frac{x}{2} & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax \\ by \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} (y - \eta), \quad (25)$$

en donde η es representado mediante la ecuación (26),

$$\eta = C \frac{\partial H}{\partial \xi}. \quad (26)$$

Al multiplicar las matrices de la ecuación (25) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{by}{2} + \frac{cyz}{2} - \frac{fyz}{2a} \\ -\frac{ax}{2} - \frac{xz}{2} \\ \frac{fyax}{2a} - \frac{cyax}{2} + \frac{byx}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax + \frac{by}{2} + \frac{cyz}{2} + \frac{fyz}{2a} \\ \frac{ax}{2} + \frac{byd}{b} - \frac{xz}{2} \\ \frac{cyax}{2} + \frac{fyax}{2a} - \frac{byx}{2} + ez \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(x_m - x_e) \\ k_2(y_m - y_e) \\ k_3(z_m - z_e) \end{bmatrix}, \quad (27)$$

finalmente, al sumar las matrices de la ecuación (27) se obtiene el sistema observador compacto

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{e1} \\ \dot{y}_{e1} \\ \dot{z}_{e1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cyz + k_1(x_{m1} - x_{e1}) \\ yd - xz + k_2(y_{m1} - y_{e1}) \\ fyx + ez + k_3(z_{m1} - z_{e1}) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Del mismo modo es posible implementar una sincronización Hamiltoniana para un sistema en hiperplano, partiendo del sistema de Qi de la Tabla 2 y retomándolo en la ecuación (29),

$$\begin{cases} \dot{w} = aw + xyz \\ \dot{x} = b(y - x) + yzw \\ \dot{y} = c(y + x) - xzw \\ \dot{z} = -z + ywx \end{cases}, \quad (29)$$

en donde (a, b, c) son los parámetros del sistema y (w, x, y, z) corresponden con las variables de estado, de la ecuación (29) se pueden generar un sistema maestro y esclavo representado por la ecuación (30) y (31), respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{m2} \\ \dot{x}_{m2} \\ \dot{y}_{m2} \\ \dot{z}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + xyz \\ b(y - x) + yzw \\ c(y + x) - xzw \\ -z + ywx \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{e2} \\ \dot{x}_{e2} \\ \dot{y}_{e2} \\ \dot{z}_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw + xyz + k_1(w_{m2} - w_{e2}) \\ b(y - x) + yzw + k_2(x_{m2} - x_{e2}) \\ c(y + x) - xzw + k_3(y_{m2} - y_{e2}) \\ -z + ywx + k_4(z_{m2} - z_{e2}) \end{bmatrix}, \quad (31)$$

3.3. Oscilador del Sistema Esclavo

El oscilador reconfigurable utilizado en esta investigación tiene la forma de la ecuación (32),

$$\dot{V} = P \cdot v \quad (32)$$

en donde \dot{V} corresponde con las ecuaciones de estado, P representa la matriz de coeficientes o parámetros del sistema y v es igual al vector de combinaciones implementadas entre las variables de estado. Las ecuaciones (33)-(35) son definiciones de la ecuación (32),

$$\dot{V} = [\dot{w} \quad \dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T, \quad (33)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} \\ w \\ p_{21} \\ x \\ p_{31} \\ y \\ p_{41} \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} \\ p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} \\ p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} \\ p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} p_{16} xy/w & p_{17}z & p_{18} xw/y & p_{19}y \\ p_{26} xy/w & p_{27}z & p_{28} xw/y & p_{29}y \\ p_{36} xy/w & p_{37}z & p_{38} xw/y & p_{39}y \\ p_{46} xy/w & p_{47}z & p_{48} xw/y & p_{49}y \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$v = [wxyz]^T. \quad (35)$$

Este nuevo sistema de ecuaciones contiene las variables necesarias para modelar los sistemas caóticos mencionados en las tablas 1 y 2 entre otros. A pesar de que una simulación en Matlab es una tarea relativamente sencilla de configurar, esto no sucede en sistemas embebidos que requieren de un proceso

de configuración en una tarjeta. En este caso es útil aplicar este tipo de sistemas.

4. Simulación de sincronización Hamiltoniana

A continuación, se describen los pasos necesarios para conseguir una sincronización con diez transmisores llamados *Master 1*, *Master 2*, ..., *Master 10*, asimismo el oscilador esclavo será nombrado como *Slave* durante el proceso descriptivo.

- a) Los sistemas *Master 1* a *Master 10* comienzan a generar sus formas de onda de manera simultánea.
- b) Durante la primera iteración el sistema *Slave* sincroniza el primer punto del sistema *Master 1* y transmite el resultado a la señal *oscilador 1*.
- c) En la segunda iteración el sistema *Slave* sincroniza el segundo punto del sistema *Master 2* y transmite el resultado a la señal *oscilador 2*.
- d) El paso del inciso c) se repite para los osciladores 3 al 10.
- e) En los muestreos de los osciladores maestros el sistema *Slave* cambia sus parámetros y su variable de transferencia para poder sincronizarse con otro sistema distinto sin perder la memoria de los osciladores anteriores.
- f) Las señales *oscilador 1* al *oscilador 10* tienen una cantidad de muestras 10 veces menor comparado con las señales *Master 1* y *Master 2*. Esto se debe a que el sistema esclavo realiza una multiplexación entre los diferentes sistemas maestros, con el fin de sincronizarse con cada uno de estos hasta conseguir sincronización completa con cada uno de los osciladores.

En la Figura 4 los sistemas *Maestro 1* a *Maestro 10* transmiten simultáneamente, por lo que no se requiere de técnicas TDMA (*Time Division Multiple Access*) para la comunicación. Por el contrario, se reduce la cantidad de muestreo para las señales del sistema *Esclavo*, adicionalmente, no se utilizan códigos de canal para diferenciar entre los canales de comunicación por lo que tampoco se requieren técnicas CDMA (*Code Division Multiple Access*). En su lugar se utilizan multiplexores que permiten al sistema de sincronización muestrear a los transmisores simultáneamente.

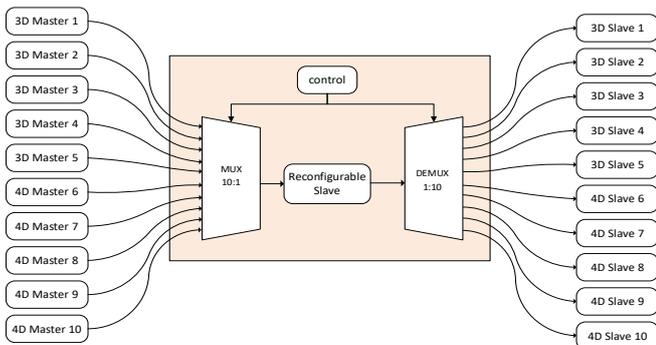


Figura 4. Sincronización MIMO utilizando un sistema esclavo con capacidad reconfigurable.

En la Figura 5 se muestra el diagrama de iteraciones para una sincronización con dos osciladores. Sin embargo, Para esta artículo se utilizaron 10 sistemas maestros por lo que el

muestreo de los osciladores esclavos corresponde con $m/10$, es decir, la calidad de la señal se reduce en un divisor de 10. En la Figura 5(a) se muestra un ejemplo de funcionamiento de la sincronización y generación de las señales del esclavo respecto de dos señales maestro. En este caso, la representación entre iteraciones y muestreo es exagerada, pero demuestra adecuadamente el funcionamiento del método. Para el caso de dos sistemas maestro M1 y M2, el sistema esclavo solo tiene que muestrear entre el sistema M1 y M2, la señal concatenada contiene las muestras de ambos sistemas maestro. Con el fin de obtener las respectivas señales esclavo es necesario segmentar y concatenar las muestras correspondientes del sistema esclavo 1 y esclavo 2, tal como se muestra en las Figura 5(b) y 5(c).

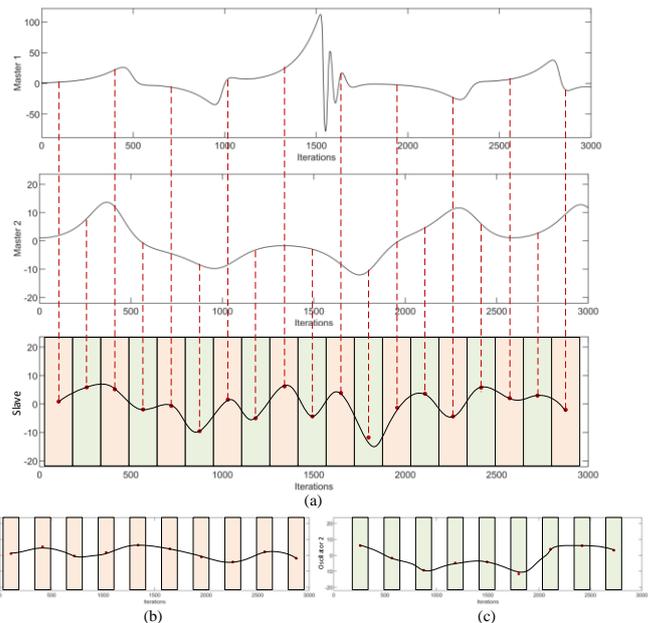
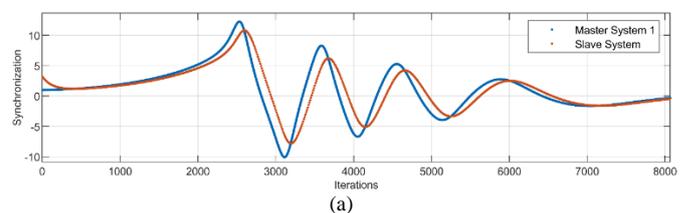


Figura 5. (a) Muestreo y sincronización con los sistemas maestro, (b) formas de onda del oscilador 1, (c) formas de onda del oscilador 2.

En la Figura 6(a) se muestra el inicio de generación de las formas de onda del sistema maestro y sistema esclavo, como se puede notar las condiciones iniciales son distintas, pero al transcurrir las iteraciones ambas señales tienden a sincronizarse. En la Figura 6(b) se muestra un fragmento de las señales *Maestro 1* y *Esclavo* tras 20 mil iteraciones. Es importante recalcar que el muestreo de la señal *Esclavo* tiene un muestreo de la mitad respecto del sistema *Maestro 1*. Sin embargo, el método de sincronización permite igualar las señales al cabo de un periodo determinado. Un aspecto importante para considerar es el desfase de las señales, ya que esta se desfasa en cierto grado por cada transmisor que se agregue a la sincronización. Dicho desfase se puede notar en las señales del sistema esclavo, que pueden ser compensadas en el receptor mediante un *buffer*.



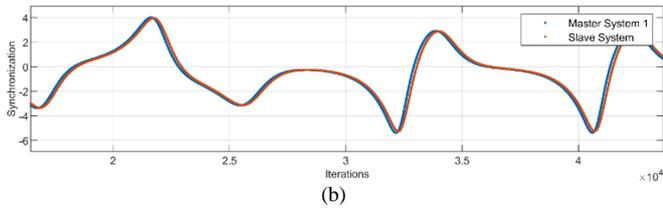


Figura 6. Sincronización con el Maestro 1, (a) inicio del proceso de sincronización, (b) sincronización después de 20 mil iteraciones.

En la Figura 7(a) se muestran las señales *Maestro 2* y *Esclavo* en las primeras iteraciones de sincronización. Se puede notar además que el sistema *Esclavo* tiende a converger rápidamente hacia la señal del sistema *Maestro 2*. Por otro lado, en la Figura 7(b) hay una zona de interés debido a la inestabilidad en las formas de onda que la sincronización activa revierte en posteriores iteraciones, esto se debe a que la sincronización se hace de manera intercalada. Es decir, que hay ciertos puntos que el observador no detecta, en consecuencia, es normal que el sistema requiera de más tiempo para conseguir la sincronización.

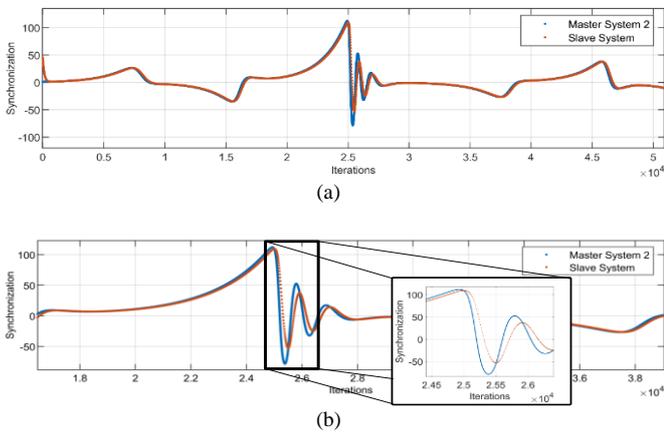


Figura 7. Sincronización (a) periodo inicial de sincronización, (b) zona de inestabilidad durante la sincronización.

En la Figura 8 se muestra un diagrama de periodos de muestreo del sistema esclavo para una sincronización con 10 sistemas maestro, sincronizando un punto de cada oscilador a la vez. Como se puede observar, hay nueve puntos que se pierden por cada punto muestreado, sin embargo, los cambios de fase de los osciladores maestro no son significativos en un lapso de 10 ciclos iterativos. Lo anterior permite al sistema de sincronización reducir el error de sincronización al cabo de las iteraciones a un nivel viable para diversas aplicaciones.

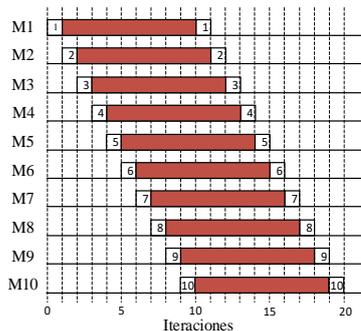


Figura 8. Periodos de espera para el muestreo de los sistemas maestro.

Por otro lado, en la Figura 9 se muestra un diagrama de errores mostrando solo dos osciladores. Cuando se realizan el muestreo y sincronización con el maestro 1, el error desciende a su mínimo local, mientras que para los otros osciladores maestro el error comienza a ascender, solo cuando el sistema esclavo vuelve a muestrear el oscilador del maestro 1 el error disminuye, al cabo de ciertas iteraciones este error comienza a amortiguarse hasta ser despreciable.

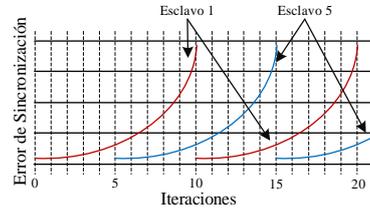


Figura 9. Amplitud del error en el cambio de parámetros.

En la Figura 10 se muestra el segmento inicial de un par de señales maestro-esclavo sincronizándose con un muestreo de $m/10$. Como se mencionó anteriormente, la calidad de las señales disminuye en un divisor de 10 para un sistema de sincronización con 10 sistemas maestro. Del mismo modo se puede interpretar que el ancho de los escalones de sincronización es de 10 iteraciones para cada señal, sin embargo, un análisis de correlación indica una similitud de 99.58%.

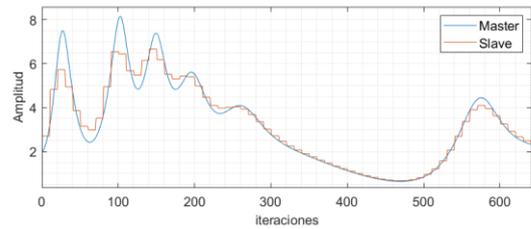
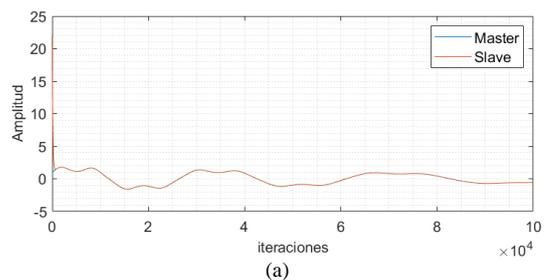


Figura 10. Sincronización maestro esclavo con muestreo de $m/10$ y una correlación del 99.58%.

Por otro lado, en la Figura 11(a) el enlace presentó una correlación del 88.85, siendo este valor el de menor correlación durante las pruebas. Lo anterior se debe a la diferencia exagerada en las condiciones iniciales asignadas intencionalmente para observar la convergencia durante la sincronización, sin embargo, en sucesivas iteraciones se aprecia una similitud casi perfecta entre maestro-esclavo, tal como lo muestra la Figura 11(b).



(a)

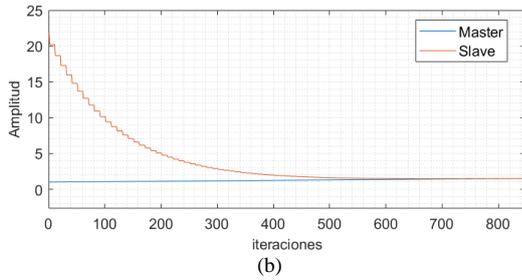


Figura 11. Convergencia en la sincronización maestro esclavo del enlace 8.

En la Tabla 3 se muestra la correlación obtenida entre los sistemas maestro y esclavo, siendo este último generado con una fracción de $1/10$ muestras respecto al sistema maestro. Como se puede observar, la máxima correlación entre sistemas maestro-esclavo es de 100%, mientras que la menor es del 99.58% y una muestra anormal de 88.85% preparada intencionalmente para observar su convergencia de sincronización. Aún bajo estas circunstancias, retirando las primeras 200 iteraciones del análisis de correlación, periodo en el cual la sincronización alcanza una convergencia mayor, se alcanza una similitud del 99.5%.

Tabla 3. Correlación entre los 10 enlaces maestro esclavo.

Enlace	Correlación maestro-esclavo (%)
1	99.68
2	99.99
3	99.99
4	99.58
5	100
6	99.99
7	99.86
8	88.85
9	99.93
10	100

Otra perspectiva que se puede analizar en el proceso de sincronización son los diagramas de error de fase entre los diez sistemas maestro-esclavo mostrados en la Figura 12. Como se puede notar, el enlace 8 presenta un diagrama de error de fase con distinta inclinación a los demás sistemas, esto se debe a la diferencia significativa entre condiciones iniciales de ese enlace. Sin embargo, se puede notar que hay una rápida convergencia de sincronización (línea horizontal) y continuando con una sincronización superior al 99% en el resto de las iteraciones (diagonal vertical).

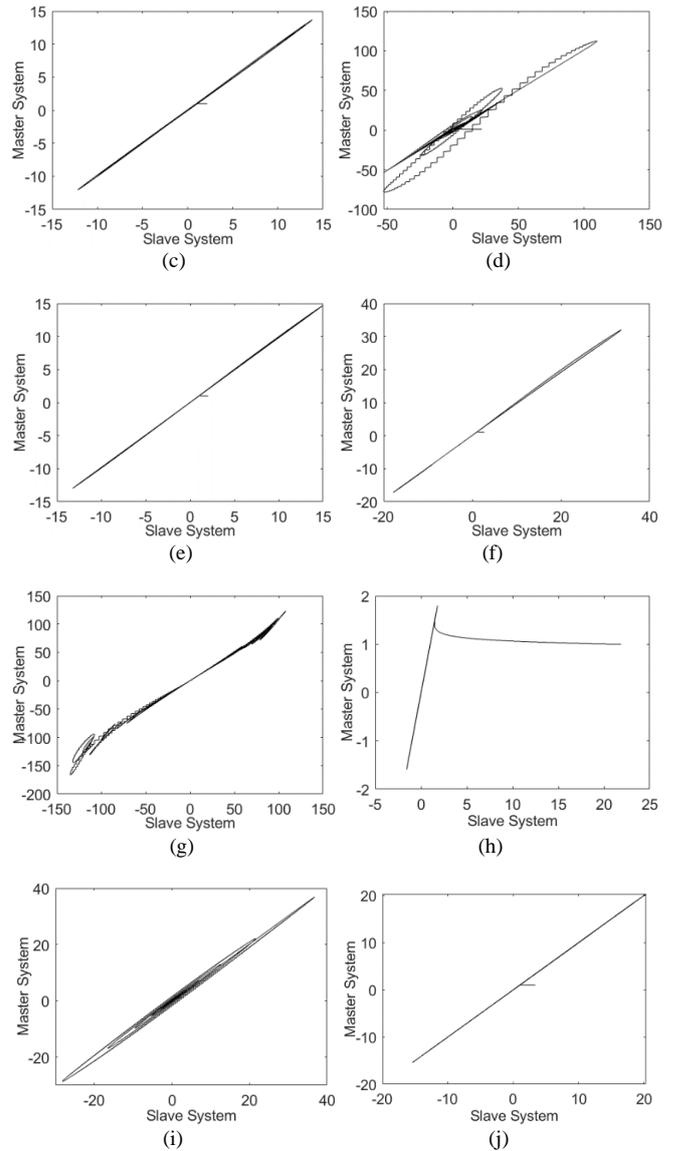
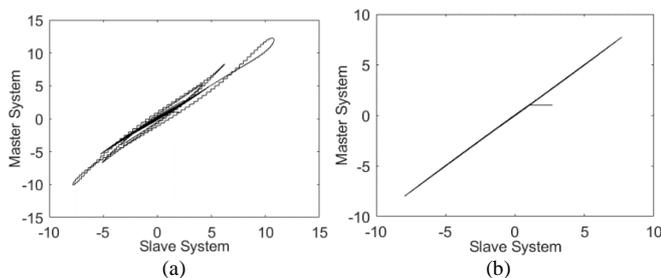


Figura 12. Error de fase para los sistemas maestro-esclavo, (a) sistema 1, (b) sistema 2, (c) sistema 3, (d) sistema 4, (e) sistema 5, (f) sistema 6, (g) sistema 7, (h) sistema 8, (i) sistema 9 y (j) sistema 10.

5. Conclusiones

En esta investigación se ha conseguido una sincronización simultánea entre un sistema esclavo y 10 sistemas maestro al utilizar un oscilador reconfigurable para muestrear señales de osciladores en 3 y 4 dimensiones. Las simulaciones demostraron la funcionalidad del sistema, sin embargo, también demostraron que una de las desventajas es que, a mayor número de sistemas maestros sincronizados, el muestreo para cada señal esclavo reduce su muestreo y por lo tanto la calidad de estas, pero en una escala que se puede considerar casi despreciable. Para esta investigación se diseñó una interfaz gráfica que facilita la configuración de los parámetros y las condiciones iniciales de los sistemas maestro-esclavo, así como la visualización de sus diagramas de fase en diferentes planos y error de fase. Como se mencionó anteriormente, el muestreo de los osciladores maestro disminuye la calidad de las señales sincronizadas, sin embargo, en el caso estudiado donde existen diez osciladores se consigue una correlación mínima y máxima del 99.58% y

100% entre la señal maestro y señal esclavo-muestreada respectivamente. Adicionalmente, como trabajo futuro y recomendación general se obtendría un mejor desempeño al eliminar el periodo de convergencia de la sincronización para conseguir una correlación superior entre las señales. Por otro lado el oscilador aquí presentado podría ser de gran utilidad implementado en sistemas embebidos debido a sus propiedades de reconfiguración en sus formas de onda.

Agradecimientos

Los autores agradecen el Instituto Politécnico Nacional por el apoyo recibido mediante el proyecto SIP 20230135.

Referencias

- Abedini, M., Gomroki, M., Salarieh, H., Meghdari, A., (2014). Identification of 4D Lü hyper-chaotic system using identical systems synchronization and fractional adaptation law. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 38, pp. 4652-4661.
- Dubeibe, F. L., (2013). Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica. *Revista colombiana de Física*, no. 1, vol. 45, pp. 151-155.
- Effati, S., Saberi, J., Saberi, H., (2014). Optimal and adaptive control for a kind of 3D chaotic and 4D hyper-chaotic systems. *Applied Mathematical Modeling*, no. 2, vol. 38, pp. 759-774.
- Hu, H., Liu, N., Ding, N., (2013). Pseudorandom sequence generator based on the Chen chaotic system. *Computer Physics Communications*, no. 3, vol. 184, pp. 765-768.
- Lai, Q., Nestor, T., Kengne, J., Zhao, X. W., (2018). Coexisting attractors and circuit implementation of a new 4D chaotic system with two equilibria. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 107, pp. 92-102.
- Lorenz, E. N., (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, vol. 20, pp. 130-141.
- Qi, G., Chen, G., (2015). A spherical chaotic system. *Nonlinear Dynamics*, no. 81, vol. 2015, pp 1381-1392.
- Qi, G., Chen, G., (2006). Analysis and circuit implementation of a new 4D chaotic system. *Physics letters A*, no. 4, vol. 352, pp. 386-397.
- Rossler, O. E., (1976). An equation for continuous chaos. *Physics letters*, no. 5, vol. 57, pp. 397-398.
- Wang, M., *et al.*, (2019). Dynamics and circuit implementation of a four-wing memristive chaotic system with attractor rotation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, no. 111, vol. 2019, pp. 149-159.
- Wang, Z., *et al.*, (2010). A new type of four-wing chaotic attractors in 3-D quadratic autonomous systems. *Nonlinear Dynamics*, no. 60, vol. 2010, pp. 443-457.
- Wu, G., Baleanu, D., (2015). Jacobian matrix algorithm for Lyapunov exponents of the discrete fractional maps. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, no. 22, vol. 2015, pp. 95-100.
- Zhang, K., Wang, H., Fang, H., (2012). Feedback control and hybrid projective synchronization of a fractional-order Newton-Leipnik system. *Common Nonlinear Sci Number Simulat*, no. 1, vol. 17, pp. 317-328.
- Zhang, S., *et al.*, (2018). Generating one to four-wing hidden attractors in a novel 4D no-equilibrium chaotic system with extreme multistability. *Chaos*, no. 28, vol. 2018, pp. 1-11.
- Zhou, L., Chen, Z., Wang, Z., Wang, J., (2016). On the analysis of local bifurcation and topological horseshoe of a new 4D hyper-chaotic system. *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 91, pp. 148-156.
- Zhou, S., Wang, X., (2021). Simple estimation method for the largest Lyapunov exponent of continuous fractional-order differential equations. *Physica A*, vol. 563, pp. 1-11.