

## Regulación de energía de un vehículo submarino no tripulado Energy regulation of an underwater unmanned vehicle

J. Sandoval <sup>a,\*</sup>, C. Higuera <sup>a</sup>, V. Santibáñez <sup>b</sup>, J. Villalobos-Chin <sup>b</sup>

<sup>a</sup>División de Estudios de Posgrado e Investigación, Tecnológico Nacional de México/I. T. de La Paz, 23080, La Paz, B.C.S., México.

<sup>b</sup>División de Estudios de Posgrado e Investigación, Tecnológico Nacional de México/I. T. de La Laguna, 27000, Torreón, Coah. México.

### Resumen

Recientemente, la regulación de energía se introdujo como un nuevo objetivo de control para robots manipuladores, basado en un enfoque de moldeo de energía más inyección de amortiguamiento. En el presente trabajo, este reciente enfoque se aplica para lograr regulación de energía de un vehículo autónomo submarino no tripulado (VAS). El controlador propuesto es diseñado utilizando inyección de amortiguamiento parcial para generar oscilaciones en el VAS a lo largo de los ejes de las propelas que lo impulsan. El usuario puede establecer una frecuencia y una amplitud deseada a través de ganancias explícitas del controlador. Una ventaja del controlador propuesto es que requiere menos esfuerzo de control que un controlador de seguimiento de trayectoria con inyección de amortiguamiento total, lo que puede ser útil para minimizar el consumo de energía del VAS. Se muestran simulaciones numéricas en un modelo de VAS de seis grados de libertad totalmente actuado para ilustrar el desempeño del controlador propuesto.

**Palabras Clave:** Regulación de energía, inyección de amortiguamiento, oscilaciones, vehículo submarino autónomo, teoría de Lyapunov.

### Abstract

Recently, energy regulation was introduced as a new control objective for robot manipulators, which is based on an energy shaping plus damping injection approach. The theoretical framework is applied in this paper to achieve energy regulation of an autonomous underwater unmanned vehicle (AUV). The proposed controller is designed using partial damping injection to generate oscillations in the AUV along the axes, where the user can set a desired frequency and amplitude through explicit controller tuning guidelines. An advantage of the proposed controller is that it requires less control effort than a trajectory tracking controller with full damping injection, which can be useful in minimizing AUV power consumption. Numerical simulations on a fully actuated six degree-of-freedom AUV model are shown to illustrate the performance of the proposed controller.

**Keywords:** Energy regulation, damping injection, oscillations, underwater unmanned vehicle, Lyapunov theory.

### 1. Introducción

El control de vehículos submarinos no tripulados ha sido un campo de intensa investigación en la última década (e.g. García-Molleda et al. (2022); Cho et al. (2020); Donaire et al. (2017); Guerrero et al. (2020, 2019b,a); Sahoo et al. (2019)). Varios métodos de diseño de control han sido reportados en la literatura, principalmente para el seguimiento de trayectorias bajo diferentes criterios de diseño (por ejemplo, Valentinis et al. (2015b,a, 2013); Mohan and Kim (2015); Perez et al. (2013); García-Molleda et al. (2022); Chen et al. (2016); Jia et al. (2020)). Recientemente, se introdujo un nuevo objetivo

de control llamado *regulación de energía* en (Sandoval et al., 2022) para el control de robots manipuladores, que se basa en un enfoque alternativo de moldeo de energía más inyección de amortiguamiento.

Una comparación del regulador de energía propuesto (con inyección de amortiguamiento parcial) y el controlador *par calculado* (con inyección de amortiguamiento total) concluyó que el primero exige un par menor que el segundo para lograr la misma trayectoria oscilatoria. Este ahorro de energía puede deberse a que el regulador de energía utiliza, en parte, la energía natural del sistema de malla abierta para producir el movimiento oscilatorio deseado. Este hecho demostró ser útil para reducir

\* Autor para correspondencia: [jesus.sg@lapaz.tecnm.mx](mailto:jesus.sg@lapaz.tecnm.mx)

**Correo electrónico:** [jesus.sg@lapaz.tecnm.mx](mailto:jesus.sg@lapaz.tecnm.mx) (Jesús Alberto Sandoval-Galarza), [cesar.hv@lapaz.tecnm.mx](mailto:cesar.hv@lapaz.tecnm.mx) (César Higuera-Verdugo), [vasantibanezd@lalaguna.tecnm.mx](mailto:vasantibanezd@lalaguna.tecnm.mx) (Victor Adrián Santibáñez-Dávila), [jorgevillaloboschin@gmail.com](mailto:jorgevillaloboschin@gmail.com) (Jorge Alberto Villalobos-Chin).

**Historial del manuscrito:** recibido el 04/04/2023, última versión-revisada recibida el 16/06/2023, aceptado el 26/06/2023 publicado el 11/09/2023. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial2.10875>



el consumo de energía del robot manipulador (Sandoval et al., 2022).

El presente trabajo es una aplicación del marco teórico mostrado en (Sandoval et al., 2022) para el control de un VAS de seis grados de libertad. La novedad del esquema propuesto radica en el hecho de que la aplicación es sobre un vehículo submarino no tripulado en lugar de un robot manipulador, y en el mejor conocimiento de los autores no existe un esquema similar para el control de esta clase de vehículos submarinos. En particular, la regulación de energía con amortiguamiento parcial es capaz de inducir oscilaciones del VAS alrededor de uno o más ejes de desplazamiento. A su vez, el amortiguamiento parcial significa que, para aquellos propulsores elegidos por el usuario, el controlador propuesto no les inyectará amortiguamiento.

El efecto de un amortiguamiento nulo en el propulsor seleccionado es la generación de oscilaciones del VAS alrededor del eje en el que se localiza el propulsor. Además, la frecuencia y amplitud de las oscilaciones pueden ser especificadas por el usuario por medio de una conveniente sintonía de las ganancias del controlador. Por ejemplo, por medio del amortiguamiento que se inyecta a los propulsores de manera parcial vía el controlador, se puede generar una trayectoria senoidal alrededor de uno de los ejes del VAS, similar a la que se consigue con un controlador por moldeo de energía y amortiguamiento total para seguimiento de trayectorias, como es el caso del control *par calculado*. Este comportamiento oscilatorio puede ser útil para desplazar el VAS desde la superficie hacia una profundidad deseada siguiendo algún movimiento particular (por ejemplo, un movimiento helicoidal), lo que puede requerir menos esfuerzo de control que un controlador de seguimiento de trayectoria con inyección de amortiguamiento total. Esto equivale a decir que un caso particular del control de seguimiento de trayectorias también se puede lograr a través de la regulación de energía.

La contribución del presente artículo es un regulador de energía para controlar un VAS totalmente actuado, tal que es posible producir un movimiento del tipo oscilatorio con menor esfuerzo que el producido por un controlador por moldeo de energía con inyección de amortiguamiento total y, por tanto, un menor consumo de energía. El controlador propuesto se diseña por medio de un enfoque de moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, caracterizado por un adecuado cambio de coordenadas.

A lo largo del presente documento, usamos la notación  $(\cdot)_{6 \times 6}$  para indicar una matriz de  $6 \times 6$ , con  $I_{6 \times 6}$  como la matriz identidad y  $0_{6 \times 6}$  la matriz de ceros; mientras que  $\mathbf{0}_6 \in \mathbb{R}^6$  es el vector de ceros  $6 \times 1$ , y  $\det[A]$  denota el determinante de la matriz cuadrada  $A$ .

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se presenta el modelo dinámico del VAS totalmente actuado en formulación hamiltoniana. La sección 3 muestra el diseño del controlador propuesto basado en un enfoque por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, junto con el análisis de estabilidad. Los resultados de simulación para el VAS se muestran en la sección 4. Finalmente, ofrecemos algunos comentarios finales en la sección 5.

## 2. Vehículo submarino

El modelo dinámico del VAS utilizado en este trabajo corresponde a un prototipo construido en el Instituto Tecnológico de La Paz (Higuera et al., 2022). Es decir, los valores numéricos de sus parámetros son de un vehículo físico y no ficticio, por tanto, eventualmente se buscará validar experimentalmente el desempeño del controlador propuesto. Una fotografía de ese prototipo se muestra en la Figura 1.

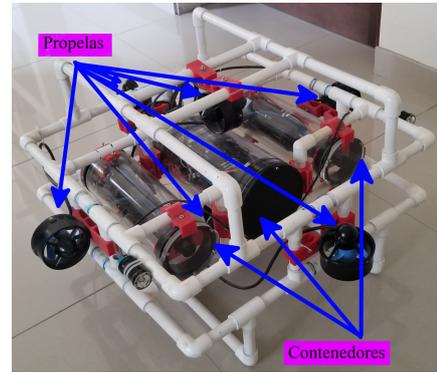


Figura 1: Vehículo submarino TecNM-LPZ-01

### 2.1. Modelo dinámico

Las posiciones del VAS se denotan como  $x$ ,  $y$  y  $z$ , y sus orientaciones se definen como  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  (ángulos de Euler). La postura del VAS (posición más orientación) con respecto al marco inercial (marco fijo en tierra, ver Figura 2) está definida por el vector:

$$\boldsymbol{\eta} = [x \ y \ z \ \phi \ \theta \ \psi]^T. \quad (1)$$

El movimiento del vehículo en relación con su estructura fija viene dado por  $u$ ,  $v$  y  $w$  como las velocidades lineales a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente, y  $p$ ,  $q$  y  $r$  como las velocidades angulares alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Agrupando las variables anteriores, se define el siguiente vector:

$$\mathbf{v} = [u \ v \ w \ p \ q \ r]^T. \quad (2)$$

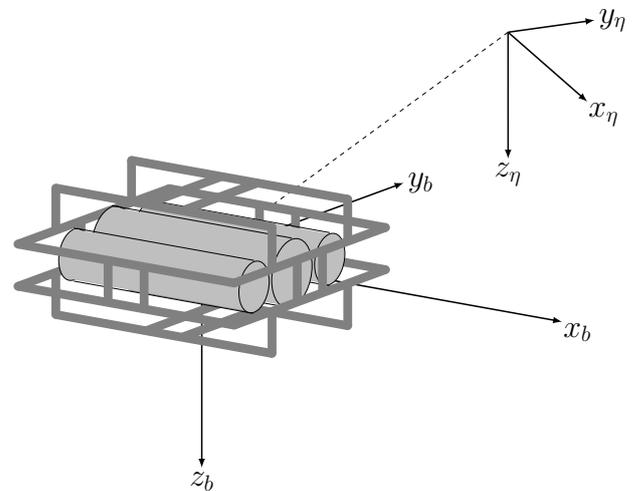


Figura 2: Marcos de referencia fijo e inercial.

El modelo dinámico del VAS se puede escribir en su forma compacta como (Fossen, 2011):

$$M\dot{\mathbf{v}} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + D(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}, \quad (4)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  es el vector de pares generalizados correspondiente a las entradas de control, que puede relacionarse con las fuerzas de empuje en [N] de las propelas  $\mathbf{u}$  por

$$\boldsymbol{\tau} = G\mathbf{u}, \quad (5)$$

donde  $G$  es la matriz de distribución de los actuadores. Tenga en cuenta que el escalar  $u$  en (2), definido como la velocidad lineal a lo largo del eje  $x$ , y el vector  $\mathbf{u}$  en (5), definido como el vector de la entrada de control son diferentes variables. Las variables restantes tienen dimensión  $6 \times 6$  para las matrices, y  $6 \times 1$  para los vectores, los cuales se definen como:  $M$  la matriz de inercia y masa añadida,  $C(\mathbf{v})$  la matriz de Coriolis,  $D(\mathbf{v})$  la matriz de amortiguamiento,  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  es el vector de fuerzas y momentos restauradores y, finalmente, la matriz de rotación  $J(\boldsymbol{\eta})$  está dada por

$$J(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi c\theta s\theta \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\phi s\theta s\psi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde  $s\sigma = \sin(\sigma)$ ,  $c\sigma = \cos(\sigma)$ , y  $\sigma$  puede ser  $\phi$ ,  $\theta$  o  $\psi$ . La matriz  $G$  proporciona información sobre la posición de cada propela y el efecto que tiene a lo largo de los ejes del vehículo submarino, como se muestra en la Figura 3.

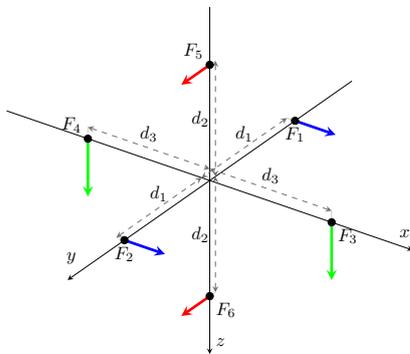


Figura 3: Diagrama de fuerza de los propulsores.

La descripción anterior define la matriz  $G$  de la siguiente manera:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & -d_2 \\ 0 & 0 & -d_3 & d_3 & 0 & 0 \\ d_1 & -d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

donde  $d_1 = 0.33$  [m],  $d_2 = 0.16$  [m] y  $d_3 = 0.33$  [m] son las distancias en metros de cada una de las fuerzas con respecto al centro de masa del VAS.

La matriz de inercia con masa agregada viene dada por

$$M = \text{diag} [23.19 \quad 23.19 \quad 23.20 \quad 0.83 \quad 0.77 \quad 1.23], \quad (8)$$

y la matriz de Coriolis de cuerpo rígido incluyendo la masa agregada tiene la siguiente estructura:

$$C(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_{15}w & -C_{43}v \\ 0 & 0 & 0 & -C_{15}w & 0 & C_{62}u \\ 0 & 0 & 0 & C_{43}v & -C_{62}u & 0 \\ 0 & C_{15}w & -C_{43}v & 0 & -C_{54}r & C_{64}q \\ -C_{15}w & 0 & C_{62}u & C_{54}r & 0 & -C_{65}p \\ C_{43}v & -C_{62}u & 0 & -C_{64}q & C_{65}p & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

donde  $C_{15} = 23.2$  [kg],  $C_{62} = 23.2$  [kg],  $C_{43} = 23.2$  [kg],  $C_{54} = 1.23$  [kg m<sup>2</sup>],  $C_{64} = 0.77$  [kg m<sup>2</sup>], y  $C_{65} = 0.83$  [kg m<sup>2</sup>]. La matriz de amortiguamiento hidrodinámico está definida como:

$$D(\mathbf{v}) = \text{diag} [b_1|u|, b_2|v|, b_3|w|, b_4|p|, b_5|q|, b_6|r|], \quad (10)$$

donde  $b_1 = 31.62$  [kg/m],  $b_2 = 26.54$  [kg/m],  $b_3 = 60.39$  [kg/m],  $b_4 = 0.34$  [kg m<sup>2</sup>],  $b_5 = 0.12$  [kg m<sup>2</sup>], y  $b_6 = 0.84$  [kg m<sup>2</sup>]. El vector de pares restauradores  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  captura los efectos de la gravedad y la flotabilidad y se calcula teniendo en cuenta la ubicación del centro de gravedad y el centro de flotabilidad del VAS. Este vector de fuerzas de gravedad y flotabilidad está dado por

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.1 \cos(\theta) \cos(\phi) \quad 0.1 \sin(\theta) \quad 0]. \quad (11)$$

### 2.1.1. Formulación hamiltoniana

Para el diseño del controlador propuesto, la descripción hamiltoniana del modelo VAS comienza con la suma de la energía cinética más la energía potencial  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  dada por

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}) \quad (12)$$

donde  $\mathbf{q} = \boldsymbol{\eta} = [x \quad y \quad z \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T$ , mientras  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^6$  es el vector de momentos, y la matriz de inercia es  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$ . En la formulación hamiltoniana  $\mathbf{p}$  se define como

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (13)$$

siendo  $\dot{\mathbf{q}}$  el vector de velocidades generalizadas. El sistema en malla abierta del modelo VAS se puede escribir de manera compacta como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & J \\ -J^T & -J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6 \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} = G\mathbf{u}$  es el vector de las entradas de control del VAS, la matriz  $J$  está dada por  $J(\boldsymbol{\eta})$  definida en (6), y  $J_2 = C(\mathbf{v}) + D(\mathbf{v})$ . Puede verificarse que el vector  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  mostrado en (3) está incluido en el término  $\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ , ya que  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{U}(\mathbf{q})$ .

### 2.2. Ley de control

Con base en el marco teórico presentado en (Sandoval et al., 2022), se introduce la siguiente transformación de coordenadas:

$$\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\phi}(t), \quad (15)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (16)$$

donde  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^6$  y  $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^6$  denotan los vectores de nuevas posiciones generalizadas y momentos, tal que  $\alpha(\mathbf{q})$  y  $\phi(t)$  tienen la siguiente estructura matemática

$$\alpha(\mathbf{q}) = [\alpha_1(\mathbf{q}) \quad \alpha_2(\mathbf{q}) \quad \cdots \quad \alpha_6(\mathbf{q})]^T, \quad (17)$$

$$\phi(t) = [\phi_1(t) \quad \phi_2(t) \quad \cdots \quad \phi_6(t)]^T, \quad (18)$$

con  $\alpha_i(\mathbf{q})$  una función continuamente diferenciable con respecto a  $\mathbf{q}$ , para  $i = 1, \dots, 6$ , que debe escogerse de manera que asegure el rango  $\{W(\mathbf{q})\} = 6$ , para toda  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^6$ , tal que  $W(\mathbf{q})^{-1}$  exista. Aquí  $W(\mathbf{q})$  es la matriz Jacobiana de  $\alpha(\mathbf{q})$ , esto es,

$$W(\mathbf{q}) = \frac{\partial \alpha(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \quad (19)$$

Asimismo,  $M_a$  mostrada en (16) es una matriz simétrica y definida positiva para todo  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^6$  que se puede seleccionar arbitrariamente. Además,  $\phi_i(t)$  es una función dos veces diferenciable. De (15) se sigue que

$$\dot{\mathbf{q}}_a = W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\phi}(t). \quad (20)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{q}}_a$  de (20) en (16), y  $\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{p}$  de (13), queda

$$\mathbf{p}_a = T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\mathbf{p} - M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\phi}(t) \quad (21)$$

donde

$$T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) = M_a(\mathbf{q}_a)W(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1} \quad (22)$$

y rango  $\{T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\} = 6$ .

Enseguida, sea la función escalar

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) \quad (23)$$

donde  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$  es una función continua y arbitraria definida positiva, diferenciable y radialmente desacotada con un único punto mínimo en  $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_6$ , que a su vez es el único punto crítico de  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$ . De acuerdo con (Sandoval et al., 2022), el siguiente sistema en malla cerrada deseado está dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 6} & \mathbf{I}_{6 \times 6} \\ -\mathbf{I}_{6 \times 6} & -\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde  $\mathcal{H}_a$  es una función arbitraria diferenciable cuya estructura está definida en (23). Por otro lado, la matriz  $\mathcal{D}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  es una matriz diagonal, que se puede seleccionar arbitrariamente como una matriz diagonal semidefinida positiva para agregar amortiguamiento parcial, o una matriz definida positiva para proporcionar amortiguamiento total.

*Suposición 1.* Considere  $\alpha = -\mathbf{q}$  y  $\phi = -\mathbf{q}_d(t)$ , tal que la variable  $\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}$  y  $W(\mathbf{q}) = -\mathbf{I}_{6 \times 6}$ . Sea  $M_a(\mathbf{q}_a)$  una matriz constante,  $\mathcal{D}_a = K_v$ , con  $K_v \geq 0$ , y la función  $\mathcal{U}(\mathbf{q}_a)$  se define como

$$\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a \quad (25)$$

donde  $K_p > 0$  es una matriz diagonal de constantes. Entonces, la ley de control  $\tau$  dada en (14) produce el sistema en malla cerrada deseado (24) que se muestra en la siguiente proposición.

**Proposición 1:** Considere el modelo VAS (14) bajo la Suposición 1. Luego, el sistema en malla cerrada deseado (24) se obtiene con la ley de control

$$\begin{aligned} \tau = & MM_a^{-1}[M_a\ddot{\mathbf{q}}_d(t) + K_v M_a^{-1} \mathbf{p}_a + K_p \mathbf{q}_a] \\ & + J^T \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + J_2 \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (26)$$

*Prueba:* La derivada temporal  $\dot{\mathbf{p}}_a$  en (21) con  $M$  y  $M_a$  constantes, y  $W = -\mathbf{I}_{6 \times 6}$  tal que  $T_a = -M_a M^{-1}$ , queda

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -M_a M^{-1} \dot{\mathbf{p}} + M_a \ddot{\mathbf{q}}_d(t). \quad (27)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{p}}$  de (14) en (27) el resultado es

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -M_a M^{-1} [-J^T \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - J_2 \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} + \tau] + M_a \ddot{\mathbf{q}}_d(t) \quad (28)$$

y usando (26) en (28) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_a = & -M_a M^{-1} [-J^T \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - J_2 \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} + MM_a^{-1}[M_a \ddot{\mathbf{q}}_d \\ & + K_v M_a^{-1} \mathbf{p}_a + K_p \mathbf{q}_a] + J^T \nabla_{\mathbf{q}} H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + J_2 \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H}] \\ & + M_a \ddot{\mathbf{q}}_d(t), \\ = & -K_p \mathbf{q}_a - K_v M_a^{-1} \mathbf{p}_a \\ = & -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - \mathcal{D}_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a. \end{aligned} \quad (29)$$

A continuación, de (23) se puede obtener que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = & \nabla_{\mathbf{p}_a} \left( \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) \right), \\ = & M_a^{-1} \mathbf{p}_a, \end{aligned} \quad (30)$$

y recordando que (16) viene dado por  $\mathbf{p}_a = M_a \dot{\mathbf{q}}_a$ , al sustituirse en (30) da

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \dot{\mathbf{q}}_a. \quad (31)$$

Finalmente, se concluye que (29) y (31) corresponden a (24). Esto completa la demostración de la Proposición 1.

### 3. Regulación de energía

Para aclarar la notación en el resto del documento, cada propulsor (motor-propela) sin inyección de amortiguamiento se denominará el  $j$ -ésimo propulsor no amortiguado y cada propulsor con inyección de amortiguamiento se denominará el  $i$ -ésimo propulsor amortiguado, de modo que  $j \in J = \{1, 2, \dots, 6\}$  y  $i \in I = \{1, 2, \dots, 6\}$ , con  $j \neq i$ . Además, la matriz de inyección de amortiguamiento está dada por  $\mathcal{D}_a = K_v$ , con  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_6}\}$ .

La constante no negativa mencionada anteriormente será referida como constante de energía “deseada” dada por

$$\mathcal{H}_a^* = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \frac{p_{a_j}^2(0)}{a_j} + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} k_{p_j} q_{a_j}^2(0). \quad (32)$$

Por conveniencia, se ha considerado que  $\mathcal{H}_a$  se da como en (23) con  $\mathcal{U}_a$  definido en (25). Además, para (15) se establece que  $\alpha(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}$  y  $\phi(t) = -\mathbf{q}_d(t)$ , de modo que

$$\mathbf{q}_a = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q} \quad (33)$$

donde  $\mathbf{q}_d(t)$  es una función continua al menos dos veces diferenciable.

Formalmente, el objetivo del control de regulación de energía es cumplir con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t)) = \mathcal{H}_a^*, \quad (34)$$

desde cualquier configuración inicial  $[\mathbf{q}(0)^T \ \mathbf{p}(0)^T]^T$  del VAS. En el objetivo de control (34),  $\mathcal{H}_a^*$  es una constante positiva adecuada que depende de la condición inicial de cada  $j$ -ésima articulación no amortiguada del robot y la  $j$ -ésima trayectoria deseada de la posición conjunta utilizada como referencia (una constante arbitraria  $q_{d_j}$  o una función arbitraria diferenciable y variable en el tiempo  $q_{d_j}(t)$ , seleccionada por el usuario). Específicamente, el valor de  $\mathcal{H}_a^*$  se puede obtener calculando las constantes:  $q_{a_j}(0) = q_j(0) - q_{d_j}(0)$ , y  $p_{a_j}(0) = a_j[\dot{q}_j(0) - \dot{q}_{d_j}(0)]$ , después de tener en cuenta (16), (33), y la derivada temporal de (33).

*Comentario 1:* La constante  $\mathcal{H}_a^*$  también puede ser igual a cero para  $q_{a_j} = p_{a_j} = 0$ , según (32). Para este caso, el objetivo de regulación de energía se convierte en un objetivo de control de seguimiento de trayectorias o de regulación de posición.

### 3.1. Análisis de estabilidad

**Proposición 2:** Considere el sistema de malla cerrada deseado (24), con  $\mathcal{H}_a$  en (23) y (25). Sea  $\mathcal{D}_a = K_v$  una matriz diagonal semidefinida positiva, donde  $K_v = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}, \dots, k_{v_6}\}$  tal que al menos una constante  $k_{v_i}$  sea nula. Entonces, el objetivo de control de regulación de energía (34) se logra con  $\mathcal{H}_a^*$  definido en (32):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t)) = \frac{1}{2} \sum_{j \in J} \frac{p_{a_j}^2(0)}{a_j} + \frac{1}{2} \sum_{j \in J} k_{p_j} q_{a_j}^2(0)$$

donde  $j$  es el  $j$ -ésimo propulsor no amortiguado, tal que  $j \in J = \{1, 2, \dots, 6\}$ .

*Prueba:* Siguiendo los pasos mostrados en (Sandoval et al., 2022) se pueden llegar a las mismas conclusiones, con la función de Lyapunov (23),  $M_a$  matriz diagonal definida positiva, y  $\mathcal{U}_a$  definido en (25), que se puede escribir como

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (35)$$

donde  $\mathbf{x} = [\mathbf{q}_a^T \ \mathbf{p}_a^T]^T$ , y  $P$  matriz diagonal definida positiva dada por

$$P = \begin{bmatrix} K_p & 0_{6 \times 6} \\ 0_{6 \times 6} & M_a^{-1} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

La derivada temporal de  $V(\mathbf{x})$  a lo largo del sistema de malla cerrada (24) produce

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = - \sum_{i \in I} \frac{k_{v_i}}{a_i^2} p_{a_i}^2 \leq 0 \quad (37)$$

que es una función semidefinida negativa, porque por diseño  $k_{v_i}$  es cero o positivo, donde  $i$  es el  $i$ -ésimo propulsor amortiguado, tal que  $i \in I = \{1, 2, \dots, 6\}$  y  $n$  es el número total de grados de libertad del VAS. Por tanto, el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{2n}$  es un punto de equilibrio estable. Luego, de acuerdo con el teorema de LaSalle (Khalil (2002), Theorem 4.4, pp. 128), todas las soluciones convergen al conjunto máximo invariante  $\Omega$  como se muestra en (Sandoval et al., 2022).

### 3.2. Frecuencia y amplitud deseada

De acuerdo con (Sandoval et al., 2022), se introduce una constante  $c_E$  de la siguiente manera

$$c_E = \sum_{j \in J} c_{E_j} \quad (38)$$

donde

$$c_{E_j} = \frac{1}{2} \left[ \frac{p_{a_j}^2}{a_j} + k_{p_j} q_{a_j}^2 \right]. \quad (39)$$

Por tanto, la ecuación  $\frac{1}{2} \left[ \frac{p_{a_j}^2}{a_j} + k_{p_j} q_{a_j}^2 \right] = c_{E_j}$  se puede reescribir como la ecuación de una elipse centrada en el origen:

$$\left[ \frac{p_{a_j}^2}{a^2} + \frac{q_{a_j}^2}{b^2} \right] = 1, \quad (40)$$

con constantes diferentes de cero

$$a = \sqrt{2c_{E_j} a_j}, \quad (41)$$

$$b = \sqrt{\frac{2c_{E_j}}{k_{p_j}}}, \quad (42)$$

donde  $c_{E_j}$  se puede calcular a través de (39). Dibujando la elipse en el plano  $q_{a_j} - p_{a_j}$ , según (40), se puede obtener el valor máximo de  $q_{a_j}$ , dado por  $q_{a_j}^M = b$ , es decir,

$$q_{a_j}^M = \sqrt{\frac{2c_{E_j}}{k_{p_j}}} = \sqrt{\frac{1}{k_{p_j}} \left[ \frac{p_{a_j}^2(0)}{a_j} + k_{p_j} q_{a_j}^2(0) \right]}. \quad (43)$$

Por tanto, de la definición (33), la amplitud máxima  $q_j^*$  del giro de la propela no amortiguada en  $q_j$  produce

$$\begin{aligned} q_j^* &= q_{a_j}^M + q_{d_j}^M \\ &= \sqrt{\frac{2c_E}{k_{p_j}}} + q_{d_j}^M, \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $q_{d_j}^M$  representa la magnitud máxima de la posición deseada  $q_{d_j}$ . Para cualquier posición constante deseada  $q_{d_j}$ , la amplitud deseada especificada por el usuario corresponde a  $q_{a_j}^M$  y la propela no amortiguada  $q_j$  oscilará alrededor de esta posición deseada  $q_{d_j}$  como referencia con una amplitud máxima  $q_{a_j}^M$ .

Por otro lado, a partir de (24) se comprueba que las dinámicas para  $\dot{q}_{a_j}$  y  $\dot{p}_{a_j}$  están desacopladas del resto de las variables, por lo que para cada caso su dinámica se puede analizar de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{a_j} \\ p_{a_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_j} p_{a_j} \\ -k_{p_j} q_{a_j} \end{bmatrix}. \quad (45)$$

De la segunda fila de (45), una ecuación diferencial lineal de primer orden dada por  $\dot{p}_{a_j} = -k_{p_j} q_{a_j}$  puede ser identificada. Además, al tomar la derivada temporal de la primera fila,  $\dot{q}_{a_j} = \frac{1}{a_j} p_{a_j}$  resulta que  $\ddot{q}_{a_j} = \frac{1}{a_j} \dot{p}_{a_j}$ . Por tanto, cálculos simples permiten obtener la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden:

$$\ddot{q}_{a_j}(t) = -\frac{k_{p_j}}{a_j} q_{a_j}(t) \quad (46)$$

cuya solución está dada por

$$q_{a_j}(t) = q_{a_j}^M \cos(\omega_{d_j} t - \varphi_j) \quad (47)$$

donde  $q_{a_j}^M$  es la amplitud máxima,  $\varphi_j$  es el ángulo de fase y la frecuencia angular  $\omega_d$  se calcula como:

$$\omega_{d_j} = \sqrt{\frac{k_{p_j}}{a_j}}. \quad (48)$$

Esto permite calcular la frecuencia en Hertz, es decir,

$$f_{d_j} = \frac{\omega_{d_j}}{2\pi}, \quad (49)$$

y el periodo  $P_j$  en segundos, dado por

$$P_j = \frac{2\pi}{\omega_{d_j}}. \quad (50)$$

En resumen, el regulador de energía propuesto (26) cumple el objetivo de control (34), y la sintonía de las ganancias para definir la amplitud y la frecuencia de la oscilación periódica están determinadas por (43) y (48)-(50), respectivamente.

#### 4. Simulaciones numéricas

Se realizaron simulaciones numéricas sobre el modelo del VAS mostrado en la Figura 1 para ilustrar los principales resultados presentados en la Proposición 2 y compararlo con el controlador por moldeo de energía con amortiguamiento total. Dos ventajas del regulador de energía (con amortiguamiento parcial) son: 1) Evita un brusco comportamiento transitorio y, 2) Demanda una menor fuerza de control. Esto en comparación con el controlador por moldeo de energía con amortiguamiento total como se muestra en las gráficas que se presentan más adelante. Las simulaciones se dividieron en tres partes. Primero, se validó el desempeño del regulador de energía (26) con  $K_v \geq 0$  (amortiguamiento parcial). Y para la segunda y tercera simulación, se presenta el desempeño del controlador (26) con  $K_v > 0$  (amortiguamiento total) para compararlo con el regulador de energía.

Para la primera simulación, se utiliza el regulador de energía con una ganancia  $k_{v_3} = 0$  asociada con la variable  $z$ . El resto de las ganancias fueron seleccionadas después de un ensayo de prueba y error como

$$K_p = \text{diag}\{5, 5, \pi^2, 20, 20, 20\},$$

$$K_v = \text{diag}\{5, 5, 0, 10, 10, 10\},$$

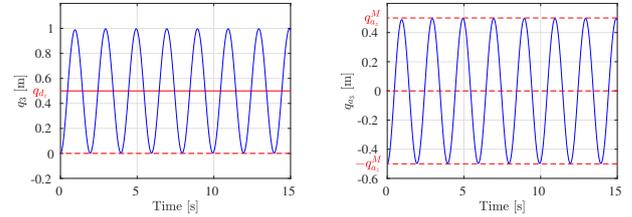
y  $a_j = 1$ . La condición inicial del VAS fue asignada convenientemente como:  $[x(0) \ y(0) \ z(0) \ \phi(0) \ \theta(0) \ \psi(0)]^T = [0.5 \ 1.0 \ 0 \ -0.5 \ -0.1 \ -1.0]^T$ . Por simplicidad, el vector de posiciones deseadas fue asignado como

$$\mathbf{q}_d = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \quad (51)$$

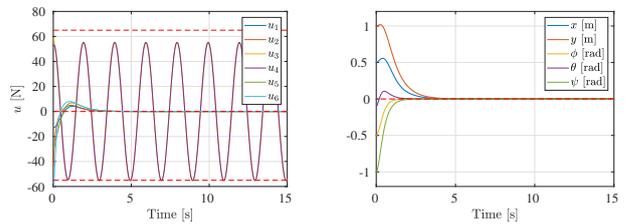
Los resultados muestran oscilaciones en el eje  $z$  y estabilización del resto de coordenadas al valor constante deseado. La ley de control permanece acotada y no hay respuesta transitoria para las oscilaciones. El valor de energía deseado para el sistema está dado por

$$\mathcal{H}_a^* = c_E = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a_3} p_{a_3}^2(0) + k_{p_3} q_{a_3}^2(0) \right] = 1.2337 \text{ [J]}$$

de acuerdo con (32). Las oscilaciones resultantes tienen una frecuencia natural de  $\omega_d = \pi$  [rad/s] que se puede calcular a partir de (48) y una amplitud pico a pico  $q_{a_j}^M = 1$  que se sigue de (43). La Figura 4 muestra los resultados numéricos obtenidos de la primera simulación.



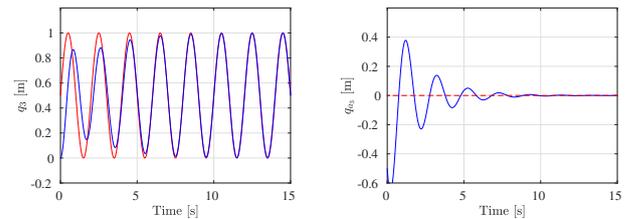
(a) Desplazamiento del VAS a lo largo del eje  $z$ . (b) Evolución temporal de  $q_{a_3}$  a lo largo del eje  $z$ .



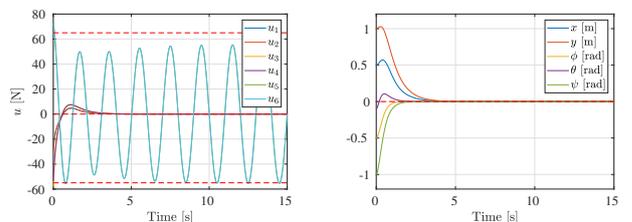
(c) Ley de control. (d) Evolución temporal del resto de las variables.

Figura 4: Resultados numéricos, primera simulación: amortiguamiento parcial con  $k_{v_3} = 0$ .

Para comparar el esquema de amortiguamiento parcial con el de amortiguamiento total, se realizó una segunda simulación usando amortiguamiento total.



(a) Desplazamiento del VAS a lo largo del eje  $z$ . (b) Evolución temporal de  $q_{a_3}$  a lo largo del eje  $z$ .



(c) Ley de control. (d) Evolución temporal del resto de las variables.

Figura 5: Resultados numéricos, segunda simulación: amortiguamiento total con  $k_{v_3} = 1$ .

Para esta segunda simulación, las oscilaciones se generan

utilizando una referencia variable en el tiempo con la misma frecuencia natural y amplitud que en el caso anterior para el eje  $z$  (ver Figura 5). Por tanto, el vector de posiciones deseadas viene dado por

$$\mathbf{q}_d(t) = [0 \ 0 \ [0.5 \sin(\pi t) + 0.5] \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (52)$$

y las ganancias del controlador fueron las mismas que en la primera simulación con el único cambio en  $k_{v_3} = 1$ . Para este caso, se seleccionó una pequeña ganancia de  $k_{v_3}$  que producía un transitorio lento para las oscilaciones deseadas. Sin embargo, la ley de control se mantiene dentro de los límites físicamente posibles indicados por las líneas punteadas en la Figura 5c. Este no es el caso de la tercera simulación que se llevó a cabo utilizando una ganancia de  $k_{v_3}$  más grande (ver Figura 6). Observe que la función  $\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t))$  representada en la Figura 6b, permite verificar el objetivo de control (34), pero ahora la función de energía deseada  $\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t))$  va hacia la energía deseada  $\mathcal{H}_a^* = 0$  [J], conforme  $t \rightarrow \infty$ . De esta manera, se cumple el objetivo de control (34).

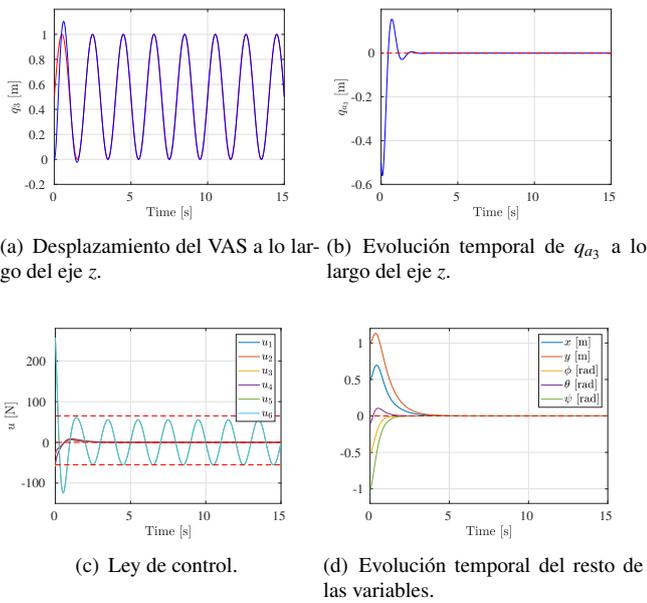


Figura 6: Resultados numéricos, tercera simulación: amortiguamiento total con  $k_{v_3} = 5$ .

Para la tercera simulación se seleccionaron las posiciones deseadas como (52). Para lograr una respuesta transitoria rápida, la ganancia se fijó en  $k_{v_3} = 5$  con los mismos valores para el resto de las ganancias. Al fijar esta ganancia, se excede el límite del control permisible como se aprecia en la Figura 6c. Note que la función  $\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t))$  representada en la Figura 7, permite verificar el objetivo de control (34). La trayectoria  $(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t))$  comienza en  $\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(0), \mathbf{p}_a(0)) = c$ , siendo  $c = 16.958$  [J] y  $c_E = \mathcal{H}_a^* = 1.2337$ . Entonces, la función de energía deseada  $\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a(t), \mathbf{p}_a(t))$  tiende hacia la energía deseada constante  $\mathcal{H}_a^* = 1.2337$  [J], conforme  $t \rightarrow \infty$ , tal que se cumple el objetivo de control (34).

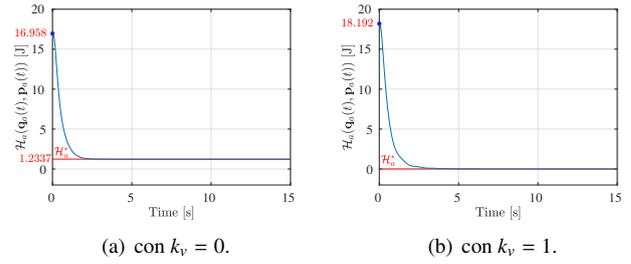


Figura 7: Evolución temporal de la función de energía deseada  $\mathcal{H}_a$ .

Finalmente, el mejor desempeño corresponde a la norma  $\mathcal{L}_2$  más pequeña, el cual corresponde al controlador (26) con  $k_{v_3} = 0$  (ver Figura 8). Se ha omitido el resto de la entradas de control al no existir una diferencia significativa, pues el amortiguamiento parcial solo fue considerado en el propulsor  $\tau_3$ .

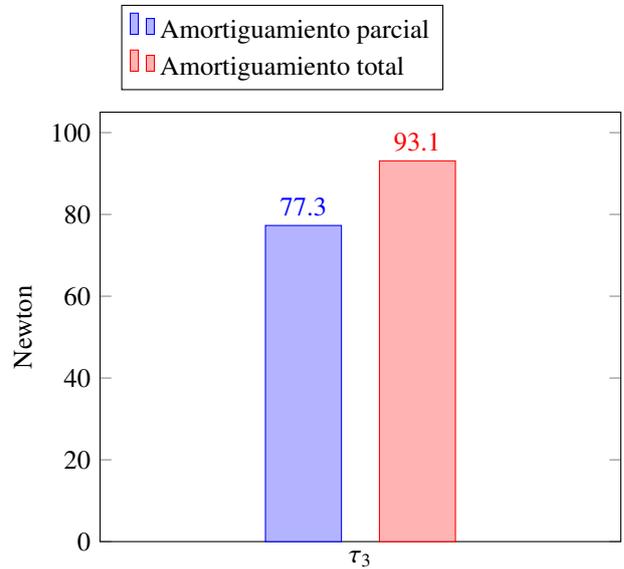


Figura 8: Norma  $\mathcal{L}_2$  de la fuerza del propulsor  $\tau_3$  usando el controlador (26) con amortiguamiento parcial mediante  $k_{v_3} = 0$  (azul) y el controlador con (26) con amortiguamiento total dado por  $k_{v_3} = 1$  (rojo).

En resumen, los resultados de la simulación muestran que el enfoque de amortiguamiento parcial permite generar oscilaciones sin ningún comportamiento transitorio y con un esfuerzo de control menor que el controlador por moldeo de energía con amortiguamiento total utilizado para seguimiento de trayectorias.

### 5. Conclusiones

Se ha presentado un controlador que consigue la regulación de energía de un vehículo submarino no tripulado. Se aplicó un esquema propuesto de regulación de energía para robots manipuladores para el diseño del controlador, donde la inyección de amortiguamiento parcial juega un rol clave en la generación de oscilaciones con una frecuencia y amplitud deseadas proporcionadas por el usuario a través de una guía de sintonía explícita. La metodología puede generar trayectorias del tipo senoidal, tal que una aplicación práctica puede ser lograr que un VAS

se desplace en forma helicoidal, movimiento que es utilizado ampliamente en vehículos submarinos. Aún cuando no se han considerado criterios de diseño como perturbaciones, fallas del actuador o entradas limitadas, el marco teórico permite extender el diseño del controlador tomando en cuenta esos criterios. Como trabajo futuro se considera la extensión del controlador bajo los criterios de diseño antes mencionados y la implementación experimental del controlador propuesto.

### Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por CONACYT 166636, 134534 y proyectos TecNM.

### Referencias

- Chen, Y., Zhang, R., Zhao, X., and Gao, J. (2016). Adaptive fuzzy inverse trajectory tracking control of underactuated underwater vehicle with uncertainties. *Ocean Engineering*, 121:123–133.
- Cho, G., Li, J., Park, D., and Jung, J. (2020). Robust trajectory tracking of autonomous underwater vehicles using back-stepping control and time delay estimation. *Ocean Engineering*, 201:107131.
- Donaire, A., J.G.Romero, and Pérez, T. (2017). Trajectory tracking passivity-based control for marine vehicles subject to disturbances. *Journal of Franklin Institute*, 354:2167–2182.
- Fossen, T. I. (2011). *Handbook of Marine Craft Hydrodynamics and Motion Control*. Wiley, Hoboken.
- García-Molleda, D., Sandoval, J., Coria, L., and Bugarin, E. (2022). Energy-based trajectory tracking control for underwater vehicles subject to disturbances with actuator partial faults and bounded input. *Ocean Engineering*, 246.
- Guerrero, J., Torres, J., Creuze, V., and Campos, E. (2019a). Saturation based nonlinear pid control for underwater vehicles: Design, stability analysis and experiments. *Mechatronics*, 61:96–105.
- Guerrero, J., Torres, J., Creuze, V., and Chemori, A. (2019b). Trajectory tracking for autonomous underwater vehicle: An adaptive approach. *Ocean Engineering*, 172:511–522.
- Guerrero, J., Torres, J., Creuze, V., and Chemori, A. (2020). Adaptive disturbance observer for trajectory tracking control of underwater vehicles. *Ocean Engineering*, 200:107080.
- Higuera, C., Sandoval, J., Coria, L., and Bugarin, E. (2022). An autonomous unmanned underwater control test vehicle: platform description and experiments. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 36:395–405.
- Jia, Z., Qiao, L., and Zhang, W. (2020). Adaptive tracking control of unmanned underwater vehicles with compensation for external perturbations and uncertainties using port-hamiltonian theory. *Ocean Engineering*, 209:107402.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA.
- Mohan, S. and Kim, J. (2015). Coordinated motion control in task space of an autonomous underwater vehicle-manipulator system. *Ocean Engineering*, 104:155–167.
- Perez, T., Donaire, A., Renton, C., and Valentinis, F. (2013). Energy-based motion control of marine vehicles using interconnection and damping assignment passivity-based control - a survey. *9th IFAC Conference on Control Applications in Marine Systems The International Federation of Automatic Control, Osaka, Japan*, pages 316–327.
- Sahoo, A., S.Dwivedy, and Robi, P. (2019). Advancements in the field of autonomous underwater vehicle. *Ocean Engineering*, 181:145–160.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., and Villalobos-Chin, J. (2022). Energy regulation of torque-driven robot manipulators in joint space. *Journal of the Franklin Institute*, 359:1427–1456.
- Valentinis, F., Donaire, A., and Perez, T. (2013). Control of an underactuated-slender-hull unmanned underwater vehicle using port-hamiltonian theory. *2013 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), Wollongong, Australia*, pages 1546–1551.
- Valentinis, F., Donaire, A., and Perez, T. (2015a). Energy-based guidance of an underactuated unmanned underwater vehicle on a helical trajectory. *Control Engineering Practice*, 44:138–156.
- Valentinis, F., Donaire, A., and Perez, T. (2015b). Energy-based motion control of a slender hull unmanned underwater vehicle. *Ocean Engineering*, 104:604–616.