

Control discontinuo por frontera de una red de vehículos autónomos basados en una ecuación de onda

Discontinuous boundary control for a network of autonomous vehicles based on a wave equation

L. T. Aguilar ^a

^aInstituto Politécnico Nacional, Avenida Instituto Politécnico Nacional 1310, Colonia Nueva Tijuana, Tijuana, México 22435

Resumen

Los sistemas multiagente están compuestos por múltiples robots o vehículos autónomos que interactúan entre sí y con el entorno. Uno de los retos pendientes es el desarrollo de modelos para sistemas multiagente capaces de capturar la complejidad dinámica del sistema y permitir su control y coordinación. En este artículo se presenta una primera aproximación de control de una red de vehículos pero basado en la ecuación de onda, que es una ecuación en derivadas parciales hiperbólica. La idea es que a través del vehículo líder (o de frontera) se puedan coordinar los demás vehículos seguidores que conforman el conjunto total de estados. Para validar esta aproximación, se realiza una prueba de estabilidad mediante una funcional estricta de Lyapunov y los resultados de simulación demuestran la eficacia del sistema de lazo cerrado.

Palabras Clave: Red de vehículos autónomos, ecuación en derivadas parciales, control frontera, control de estructura variable.

Abstract

Multiagent systems consist of multiple robots or autonomous vehicles that interact with each other and with their environment. One of the challenges in this field is developing models that can capture the complexity of the network and enable its control and coordination. In this paper, we present a novel approach to controlling a network of vehicles based on partial differential equations. Our method relies on the wave equation, which is a hyperbolic partial differential equation. Specifically, we aim to stabilize and coordinate the follower vehicles using the boundary vehicle as leader vehicle. To evaluate the stability of our approach, we use a strict Lyapunov functional. Our simulation results confirm the effectiveness of the closed-loop system.

Keywords: Network of autonomous vehicles, partial differential equation, boundary control, variable structure control.

1. Introducción

El tema de los sistemas multiagente tiene importantes aplicaciones prácticas en una amplia gama de campos, como la robótica, el transporte y las redes de comunicación. Los sistemas multiagente ofrecen la posibilidad de aumentar la eficiencia, flexibilidad y adaptabilidad en comparación con los sistemas tradicionales de un solo agente (Dong *et al.*, 2015). Sin embargo, coordinar las acciones de múltiples agentes en un entorno complejo y dinámico es un gran reto que requiere sofisticadas técnicas de modelado y control. Además, en la actualidad se han popularizado eventos en los que cientos de drones interactúan entre sí para formar figuras y patrones en el aire (Peng y He, 2022; Teixeira *et al.*, 2020). Esta tendencia ha genera-

do un gran interés en la investigación de técnicas avanzadas de coordinación y control de drones, con el fin de lograr un comportamiento coordinado y preciso en estas complejas formaciones aéreas. Aunado a lo anterior, es importante considerar que próximamente se espera la circulación de cientos de vehículos autónomos en ciudades, incluyendo aquellas que cuentan con espacios estrechos que pueden representar un obstáculo para el tráfico vehicular. Es necesario anticipar y abordar los posibles desafíos que esto pueda generar, como la necesidad de coordinar el flujo de tráfico para garantizar una circulación segura y fluida.

Las ecuaciones en derivadas parciales (Krstic y Smyshlyaev, 2008) han demostrado su eficacia para modelar y entender de manera precisa sistemas complejos en diversos cam-

*Autor para correspondencia: L. T. Aguilar

Correo electrónico: laguilarb@ipn.mx (Luis Tupak Aguilar-Bustos).

pos científicos y tecnológicos. Por ejemplo, reactores químicos (Christofides, 2000), entender y predecir movimientos telúricos (Gutierrez-Oribio *et al.*, 2022), analizar las oscilaciones complejas de sistemas biológicos (Lienard, 1928; Li *et al.*, 2022) y sistemas con retardo (Zhu y Fridman, 2022).

Uno de los primeros trabajos abordados en el control y sincronización de vehículos fue presentado por Raza e Ioannou (1996), quienes diseñaron y probaron un sistema de control de vehículos para lograr la automatización total del vehículo en la dirección longitudinal para varios modos de funcionamiento, incluidos los vehículos autónomos, el seguimiento cooperativo de vehículos y en pelotón. Recientemente, Alonso-Mora *et al.* (2019) establecieron un método distribuido para el control de formaciones que permite a un equipo de robots terrestres o aéreos navegar en un entorno dinámico mientras reconfiguran su formación para evitar colisiones con obstáculos estáticos y móviles. Su método se basa en la comunicación entre robots vecinos y requiere un cierto nivel de coordinación y sincronización entre ellos. Esto podría limitar la escalabilidad del método a numerosos equipos de robots o a entornos con capacidades de comunicación limitadas. En Aguilar *et al.* (2021) se propuso un controlador de consenso líder-seguidor para ecuación de onda en red, en la se estableció un acuerdo puntual en el espacio entre los perfiles del seguidor y del líder mediante el análisis de Lyapunov. Además, se utilizó una regla de interacción local lineal tipo PD para lograr la sincronización. De igual manera Katz, Fridman y Basre (Katz *et al.*, 2022) presentan una solución para desplegar múltiples agentes utilizando un enfoque basado en ecuaciones diferenciales parciales. En lugar de transmitir señales de control de los líderes a los agentes, el método propuesto utiliza el control basado en red de una ecuación de calor 1D con dos medidas de contorno. Esto elimina la necesidad de transmisiones costosas e inseguras, haciendo que el proceso de despliegue sea más eficiente y seguro.

La presente investigación tiene como objetivo principal aportar al campo de sistemas multi-agentes mediante el uso de ecuaciones diferenciales parciales. Se propone modelar la red de agentes seguidores como una ecuación de onda, mientras que el líder se considera como la condición de frontera, sujeto a perturbaciones desconocidas pero con una cota conocida. La motivación detrás de esta investigación radica en que la mayoría de los algoritmos existentes funcionan bien ante un número reducido de agentes; sin embargo, cuando el número de sistemas empieza a aumentar puede haber fallas en la comunicación, la interacción entre sí no es perfecta y la perturbación en uno de ellos puede afectar todo la flota de vehículos autónomos. Por lo tanto, se explora el potencial de las ecuaciones en derivadas parciales en sistemas de dimensiones infinitas o sistemas con parámetros distribuidos, para proponer una primer aproximación del uso de una ecuación de onda en la representación de una flota de vehículos autónomos donde el vehículo líder o de frontera comanda la interacción del resto de la flota. En este trabajo se presentan simulaciones para mostrar la eficacia del método propuesto en la resolución de problemas de control y sincronización en sistemas multi-agente.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se define el modelo una red de vehículos mediante la ecuación de onda y dos condiciones de frontera. En la sección 3 se propone el controlador de frontera y se presenta el análisis de

estabilidad proponiendo una funcional estricta de Lyapunov. En la sección 4 se presentan los resultados de simulación numérica realizados para el caso libre de perturbación y perturbado. Finalmente, se ofrecen conclusiones en la sección 5.

Notación. Los símbolos $w_t = \partial w / \partial t$, $w_{tt} = \partial^2 w / \partial t^2$, $w_\xi = \partial w / \partial \xi$, $w_{\xi t} = \partial^2 w / \partial \xi \partial t$ y $w_{\xi\xi} = \partial^2 w / \partial \xi^2$ se utilizan para las correspondientes derivadas parciales de $w(\xi, t)$. La norma euclidiana del vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ de valor real se define como $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. $W^{1,2}(a, b)$ es el espacio de Sobolev de funciones escalares absolutamente continuas $w : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ con derivadas cuadradas integrables $w^{(l)}$ de orden $l \geq 1$ y con la norma $\|w\|_{W^{1,2}}^2 = \int_a^b (w^{(l)})^2(\xi) d\xi$. L_2 representa el espacio de Hilbert de las funciones escalares cuadradas integrables $w(\xi)$ en el dominio $(0, 1)$ con la correspondiente norma L_2

$$\|w(\xi)\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 w^2(\xi) d\xi}. \quad (1)$$

La desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{\sigma}{2} a^2 + \frac{1}{2\sigma} b^2, \quad \sigma > 0 \quad (2)$$

se utilizará en el el análisis de estabilidad.

2. Red de vehículos

Considerese un conjunto n agentes dinámicos $\mathcal{V}_f = \{1, 2, \dots, n\}$, identificados como seguidor o seguidores, que es gobernado por la ecuación de onda expresada de la siguiente manera

$$\tilde{w}_{tt}(x, t) = \tilde{w}_{xx}(x, t) \quad (3)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{tt}(0, t) &= 0 \\ \tilde{w}_{x}(1, t) &= -b\tilde{w}_t(1, t) \end{aligned} \quad (4)$$

donde $\tilde{w}(x, t) = [\tilde{w}_1(x, t), \tilde{w}_2(x, t), \dots, \tilde{w}_n(x, t)]^T$ es el vector, que contiene los estados de todos los seguidores, $\tilde{w}_i(x, t)$ denota el desplazamiento transversal del i -ésimo agente en la posición $x \in (0, 1)$ y el tiempo $t \geq 0$ y b es una constante positiva. Se supone que los agentes seguidores se comunican entre sí a través de una topología estática no dirigida descrita por $\mathcal{G}_f(\mathcal{V}_f, \mathcal{E}, \mathcal{A}_f)$.

Supongamos que además de los n seguidores existe un agente líder, etiquetado con el número índice 0 y gobernado por el problema de valor frontera no forzado

$$\tilde{w}_{0,tt}(x, t) = \tilde{w}_{0,xx}(x, t) \quad (5)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{0,tt}(0, t) &= u(t) \\ \tilde{w}_{0,x}(1, t) &= -b\tilde{w}_{0,t}(1, t), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $u(t)$ es la entrada de control de frontera de tipo Neumann de los agentes

El *objetivo de control* es diseñar un controlador twisting $u(t)$ tal que los elementos seguidores $\tilde{w}(x, t)$ sigan asintóticamente al estado líder $\tilde{w}_0(x, t)$, en otras palabras

$$\max_{x \in [0,1]} \|\tilde{w}_i(x, t) - \tilde{w}_0(0, t)\| = 0. \quad (7)$$

3. Resultado principal

Basándonos en el modelo presentado en la sección anterior, proponemos el controlador frontera

$$u(0, t) = c_1 \operatorname{sign}(w(0, t)) + c_2 \operatorname{sign}(w_t(0, t)) + k_1 w(0, t) + k_2 w_t(0, t) \quad (8)$$

donde $w(x, t)$ es el término del error, k_1, k_2, c_1 y c_2 son constantes estrictamente positivas y además

$$c_1 > c_2 \quad (9)$$

y exista una constante ε tal que

$$\frac{k_2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{k_2^2 + 4k_1} < \varepsilon < \frac{k_2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{k_2^2 + 4k_1} \quad (10)$$

La parte estabilizadora se utiliza para garantizar la estabilidad asintótica, mientras que la parte discontinua confiere cierta robustez al sistema de lazo cerrado.

3.1. Analisis de estabilidad

La ecuación de lazo cerrado en función del error $w = \tilde{w}(x, t) - 1_n w_0(x, t)$, con condiciones iniciales y condiciones de frontera viene dado por

$$w_{tt}(x, t) = w_{xx}(x, t) \quad (11)$$

$$w(x, 0) = \tilde{w}(x, 0) - 1_n w_0(x, 0) \quad (12)$$

$$w_t(x, 0) = \tilde{w}_t(x, 0) - 1_n w_{0,t}(x, 0) \quad (13)$$

$$w_{tt}(0, t) = -c_1 \operatorname{sign}(w(0, t)) - c_2 \operatorname{sign}(w_t(0, t)) - k_1 w(0, t) - k_2 w_t(0, t) \quad (14)$$

$$w_x(1, t) = -b w_t(1, t), \quad (15)$$

donde (12)–(13) son las condiciones iniciales siendo el símbolo $1_n = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ un vector cuyos elementos son solo unos y (14)–(15) son las condiciones de frontera del sistema en lazo cerrado. Para establecer las condiciones de estabilidad asintótica se propone la siguiente funcional de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 w_x^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 w_t^2(x, t) dx + c_1 |w(0, t)| + \frac{(k_1 + \alpha k_2)}{2} w^2(0, t) + \alpha w(0, t) w_t(0, t) + \frac{1}{2} w_t^2(0, t) + \varepsilon \int_0^1 (1+x) w_t w_x(x, t) dx, \quad (16)$$

que es definida positiva siempre que (9) y (10) se cumplan. Además, existen dos constantes β_1 y β_2 tal que

$$\beta_1 U \leq V \leq \beta_2 U, \quad (17)$$

donde

$$U = \|w_x\|_{L^2(0,D)}^2 + \|w_t\|_{L^2(0,D)}^2 + \|w(0, t)\|^2 + \|w_t(0, t)\|^2 \quad (18)$$

y

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \min \left\{ \lambda_{\min} \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{\min} \begin{bmatrix} k_1 + \alpha k_2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad (19)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \max \left\{ \lambda_{\max} \begin{bmatrix} 1 & 2\varepsilon \\ 2\varepsilon & 1 \end{bmatrix}, \lambda_{\max} \begin{bmatrix} k_1 + \alpha k_2 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (20)$$

La derivada temporal de V a lo largo de la solución de (11)–(15) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^1 w_x w_{xt} dx + \int_0^1 w_t w_{tt} dx + c_1 \operatorname{sign}(w(0, t)) w_t(0, t) \\ &\quad + \alpha w_t^2(0, t) + (k_1 + \alpha k_2) w(0, t) w_t(0, t) \\ &\quad + (\alpha w(0, t) + w_t(0, t)) w_{tt}(0, t) + \varepsilon \int_0^1 (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 x (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\ &= \int_0^1 w_x w_{xt} dx + \int_0^1 w_t w_{xx} dx - \alpha k_1 w^2(0, t) \\ &\quad - (k_2 - \alpha) w_t^2(0, t) - \alpha (c_1 - c_2) |w(0, t)| - c_2 |w_t(0, t)| \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 x (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Aplicando integración por partes al segundo término de esta última ecuación, es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_t w_{xx} dx &= w_t w_x \Big|_0^1 - \int_0^1 w_x w_{xt} dx \\ &= w_t(1, t) w_x(1, t) - w_t(0, t) w_x(0, t) - \int_0^1 w_x w_{xt} dx \\ &= -\frac{1}{b} w_x^2(1, t) - w_t(0, t) w_x(0, t) - \int_0^1 w_x w_{xt} dx \end{aligned} \quad (23)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{b} w_x^2(1, t) - w_t(0, t) w_x(0, t) - \alpha k_1 w^2(0, t) \\ &\quad - (k_2 - \alpha) w_t^2(0, t) - \alpha (c_1 - c_2) |w(0, t)| - c_2 |w_t(0, t)| \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 (1+x) (w_t w_{xt} + w_{xx} w_x) dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Resolviendo el séptimo y octavo término por partes, es decir,

$$\varepsilon \int_0^1 w_t w_{xt} dx = \frac{\varepsilon}{2} (w_t^2(1, t) - w_t^2(0, t)), \quad (25)$$

$$\varepsilon \int_0^1 w_x w_{xx} dx = \frac{\varepsilon}{2} (w_x^2(1, t) - w_x^2(0, t)), \quad (26)$$

y después de desarrollo algebraico obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{b} w_x^2(1, t) - w_t(0, t) w_x(0, t) - \alpha k_1 w^2(0, t) \\ &\quad - (k_2 - \alpha) w_t^2(0, t) - \alpha (c_1 - c_2) |w(0, t)| - c_2 |w_t(0, t)| \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} (w_t^2(1, t) - w_t^2(0, t)) + \frac{\varepsilon}{2} (w_x^2(1, t) - w_x^2(0, t)) \\ &\quad + \varepsilon \int_0^1 x (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Aplicando la desigualdad de Young (2) al término de signo indefinido (segundo término de la ecuación anterior), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{b}w_x^2(1, t) + \frac{1}{2}w_x^2(0, t) - \alpha k_1 w^2(0, t) \\ & - \left(k_2 - \alpha - \frac{1}{2}\right)w_t^2(0, t) - \alpha(c_1 - c_2)|w(0, t)| - c_2|w_t(0, t)| \\ & + \frac{\varepsilon}{2}(w_t^2(1, t) - w_t^2(0, t)) + \frac{\varepsilon}{2}(w_x^2(1, t) - w_x^2(0, t)) \\ & + \varepsilon \int_0^1 x(w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx. \end{aligned} \quad (28)$$

Ahora nos detenemos a desarrollar la última integral, es decir

$$\varepsilon \int_0^1 x w_x w_{xx} dx = \frac{\varepsilon}{2} w_x^2(1, t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 w_x^2(x, t) dx \quad (29)$$

$$\varepsilon \int_0^1 x (w_t w_{xt}) dx = \frac{\varepsilon}{2} w_t^2(1, t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 w_t^2(x, t) dx. \quad (30)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 w_x^2(x, t) dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 w_t^2(x, t) dx \\ & - \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)w_x^2(0, t) - \alpha k_1 w^2(0, t) - \left(k_2 + \frac{\varepsilon}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\right)w_t^2(0, t) \\ & - \alpha(c_1 - c_2)|w(0, t)| - c_2|w_t(0, t)| \\ & - \left(\frac{1}{b} - \frac{\varepsilon}{2b^2} - \varepsilon\right)w_x^2(1, t). \end{aligned} \quad (31)$$

Por lo tanto \dot{V} es definida negativa siempre y cuando k_1, k_2, c_1 y c_2 cumplan con las restricciones (9) y (10) y $\varepsilon \leq b/(1 - b^2)$. Las condiciones de estabilidad de funcionales de Lyapunov para sistemas con parámetros distribuidos se pueden consultar en Orlov (2020).

3.2. Análisis de estabilidad para perturbación en la frontera

En esta sección iniciamos definiendo el vector de perturbación en la condición de frontera, es decir

$$\begin{aligned} w_{tt}(0, t) &= u(t) + \delta(t) \\ w_x(1, t) &= -b w_t(1, t) \end{aligned} \quad (32)$$

donde $\delta(t)$ es el vector de perturbaciones que se asume acotado, es decir, existe una constante M conocida, tal que

$$\|\delta(t)\| \leq M. \quad (33)$$

La derivada temporal de V a lo largo de la solución de (5), (32) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_0^1 w_x w_{xt} dx + \int_0^1 w_t w_{tt} dx + c_1 \text{sign}(w(0, t)) w_t(0, t) \\ &+ \alpha w_t^2(0, t) + (k_1 + \alpha k_2) w(0, t) w_t(0, t) \\ &+ (\alpha w(0, t) + w_t(0, t)) w_{tt}(0, t) + \varepsilon \int_0^1 (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\ &+ \varepsilon \int_0^1 x (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx \\ &\leq \int_0^1 w_x w_{xt} dx + \int_0^1 w_t w_{xx} dx - \alpha k_1 w^2(0, t) - (k_2 - \alpha) w_t^2(0, t) \\ &- \alpha(c_1 - c_2 - M)|w(0, t)| - (c_2 - M)|w_t(0, t)| \\ &+ \varepsilon \int_0^1 (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx + \varepsilon \int_0^1 x (w_t w_{xt} + w_{tt} w_x) dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Siguiendo los mismos pasos del desarrollo de la subsección anterior se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 w_x^2(x, t) dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 w_t^2(x, t) dx \\ & - \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)w_x^2(0, t) - \alpha k_1 w^2(0, t) - \left(k_2 + \frac{\varepsilon}{2} - \alpha - \frac{1}{2}\right)w_t^2(0, t) \\ & - \alpha(c_1 - c_2 - M)|w(0, t)| - (c_2 - M)|w_t(0, t)| \\ & - \left(\frac{1}{b} - \frac{\varepsilon}{2b^2} - \varepsilon\right)w_x^2(1, t). \end{aligned} \quad (35)$$

Concluyendo estabilidad asintótica siempre y cuando se cumplan con las restricciones (9), (10) y $c_2 > M$.

4. Resultados de simulación

Corrimos simulaciones en el modelo dinámico presentado en (5)–(6), bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$w(x, 0) = \sin(2\pi x). \quad (36)$$

La ecuación diferencial parcial (5) se discretizó en la variable espacial x dividiendo uniformemente el segmento $[0, 1]$ en $N = 30$ puntos de la malla. Se utilizó el algoritmo Runge-Kutta (Butcher, 1996) para resolver las N ecuaciones diferenciales. El tiempo de muestreo fue 1×10^{-3} s. Las ganancias para el controlador estabilizador de frontera (8) fueron $c_1 = 5, c_2 = 2, k_1 = 5$ y $k_2 = 2$ elegidos *a priori*, pero satisfaciendo las condiciones dadas en la sección 3.

En la figura 1 se muestra la topología usada en las simulaciones con un líder que se asume es la entrada frontera. Las simulaciones realizadas en este estudio permitieron analizar el desempeño del sistema de control propuesto en diferentes situaciones. En la figura 2 se muestra la convergencia de los estados hacia el estado estacionario para el caso no perturbado. Posteriormente, se realizó una prueba donde se introdujeron perturbaciones ($\delta(t) = \sin(2\pi t)$) en el vehículo líder, correspondiente a la condición de frontera. La figura 3 muestra que las perturbaciones son rechazadas y los estados convergen a cero, lo que demuestra la capacidad del sistema para mantener la estabilidad en presencia de perturbaciones. Por último, en la figura 4 se muestra una respuesta donde una perturbación $\delta(t) = 6 \sin(4\pi t)$ se violó intencionalmente la condición de que $c_2 > M$; sin embargo, la respuesta se mantiene estable, lo que sugiere una buena capacidad de robustez del sistema de control propuesto. Estas simulaciones permitieron comprobar la efectividad y robustez del sistema de control propuesto en diferentes escenarios y situaciones, lo que constituye una importante contribución inicial de esta investigación.

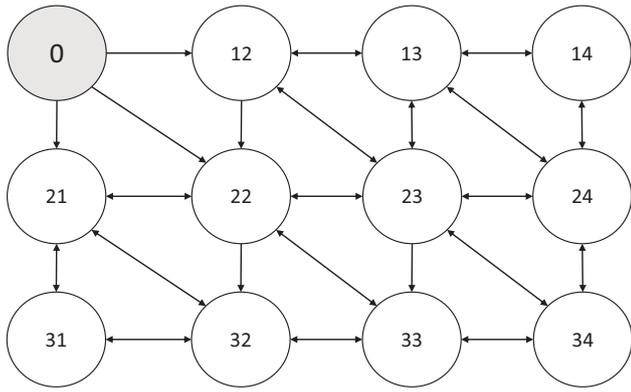


Figura 1: Topología asumida en las simulaciones donde el círculo en gris es el líder.

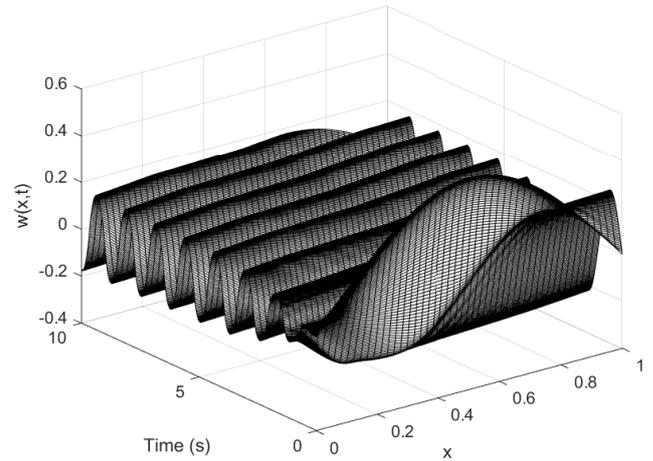


Figura 4: Perfil espacio-temporal de la desviación entre el líder y los seguidores ante la entrada de perturbaciones en la frontera pero violando las condiciones de robustez.

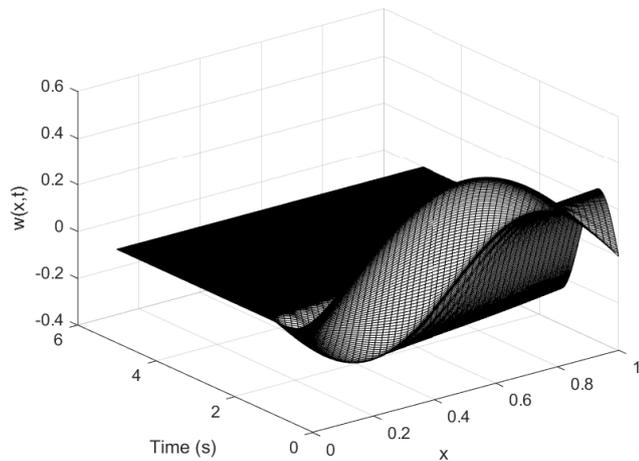


Figura 2: Perfil espacio-temporal de la desviación entre el líder y los seguidores.

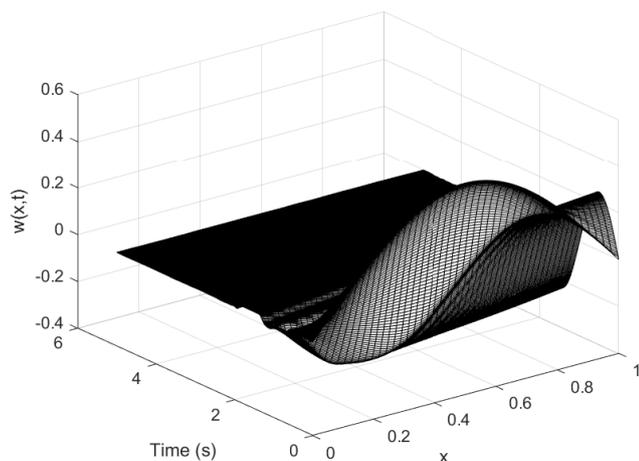


Figura 3: Perfil espacio-temporal de la desviación entre el líder y los seguidores ante la entrada de perturbaciones en la frontera.

5. Conclusiones

Se presentó un esquema de control de red de vehículos bajo el esquema de sistemas de dimensiones infinitas con el fin de tratar flotas grandes de vehículos autónomos con comunicación parcial o total entre agentes vecinos. Se utilizó un controlador twisting en primer instancia, ya que su análisis de estabilidad permite encontrar las condiciones de robustez. Aunque los resultados obtenidos son prometedores, todavía hay muchos desafíos por abordar, como la implementación práctica del sistema y el análisis de su comportamiento en situaciones de pérdida total de comunicación entre vehículos, así como la comparación con otros métodos existentes como el caso de dimensión finita. Por lo tanto, se necesitan estudios futuros para mejorar la eficiencia y la escalabilidad del sistema propuesto y abordar estas interrogantes pendientes. Además, la motivación detrás de este esquema nace de cómo el tamaño de la flota de vehículos afecta el desempeño del sistema, y determinar si existen límites prácticos para el número de vehículos que se pueden controlar y coordinar con éxito.

Agradecimientos

El autor agradece al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo recibido a través del proyecto SIP 2023-1268.

Referencias

Aguilar, L., Orlov, Y., y Pisano, A. (2021). Leader-follower synchronization and ISS analysis for a network of boundary-controlled wave PDEs. *IEEE Control Systems Letters*, 5:683–688.

Alonso-Mora, J., Montijano, E., Nageli, T., Hilliges, O., Schwager, M., y Rus, D. (2019). Distributed multi-robot formation control in dynamic environments. *Autonomous Robots*, 43:1079–1100.

Butcher, J. (1996). A history of Runge-Kutta methods. *Applied Numerical Mathematics*, 20:247–260.

Christofides, P. (2000). *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems: Methods and Applications to Transport-Reaction Processes*. Birkhäuser, New York.

- Dong, X., Yu, B., Shi, Z., y Zhong, Y. (2015). Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles: Theories and applications. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 23(1):340–438.
- Gutierrez-Oribio, D., Orlov, Y., Stefanou, I., y Plestan, F. (2022). Advances in sliding mode control of earthquakes via boundary tracking of wave and diffusion PDEs. En *Proc. of 16th International Workshop on Variable Structure Systems*, pp. 231–236, Rio de Janeiro, Brazil.
- Katz, R., Fridman, E., y Basre, I. (2022). Network-based deployment of multi-agents without communication of leaders with multiple followers: a pde approach. En *IEEE 61st Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 6089–6096, Cancún, México.
- Krstic, M. y Smyshlyaev, A. (2008). *Boundary Control of PDEs*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Li, P., Abbasi, A., El-Zahar, E. R., Farooq, W., Hussain, Z., Khan, S. U., Khan, M. I., Farooq, S., Malik, M., y Wang, F. (2022). Hall effects and viscous dissipation applications in peristaltic transport of Jeffrey nanofluid due to wave frame. *Colloid and Interface Science Communications*, 47:100593.
- Lienard, A. (1928). Etude des oscillations entretenues. *Revue générale de l'Electricité*, 23:910–912, 946–654.
- Orlov, Y. (2020). *Nonsmooth Lyapunov Analysis in Finite and Infinite Dimensions*. Springer, London.
- Peng, X.-J. y He, Y. (2022). Consensus of multi-agent systems with state and input delays via non-fragile protocol. *International Journal of Systems Science*, 53:2584–2596.
- Raza, H. e Ioannou, P. (1996). Vehicle following control design for automated highway systems. *IEEE Control Systems*, 16:43–60.
- Teixeira, M. A. S., Neves-Jr, F., Koubaa, A., Ramos De Arruda, L. V., y Schneider De Oliveira, A. (2020). A quadral-fuzzy control approach to flight formation by a fleet of unmanned aerial vehicles. *IEEE Access*, 8:64366–64381.
- Zhu, Y. y Fridman, E. (2022). Extremum seeking via a time-delay approach to averaging. *Automatica*, 135:109965.