DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 11 No. 22 (2024) 103–109

Penalidad considerando un modelo de riesgo con interés
Penality considering a risk model with interes

S. Mejía-Pérez[a], R. M. Flores-Hernández[a,*], R. Rodríguez-Nava[a]

[a]*Facultad de Ciencias Básicas, Ingeniería y Tecnología, de la Universidad Autónoma de Tlaxcala, Carretera Apizaquito S/N, San Luis Apizaquito, C.P. 90401.*

Resumen

Una empresa aseguradora puede presentar en un momento indeterminado una reclamación cuyo monto no pueda cubrir, lo cual ocasionaría un déficit y caer probablemente en ruina, por lo cual, es importante que se calcule a priori, la esperanza del valor presente de la penalidad, ya que este valor representa el pago único de reaseguro. En este trabajo se presenta la deducción del modelo de riesgo con interés, así como la expresión para el cálculo de la esperanza del valor presente de la penalidad de una empresa aseguradora, considerando dicho modelo.

Palabras Clave: Probabilidad de ruina, proceso de Poisson, penalidad, interés compuesto.

Abstract

An insurance company can present a claim at an indeterminate moment whose amount cannot be covered, which would cause a deficit and probably fall into ruin, for which it is important to calculate a priori, the expectation of the present value of the penalty, since that this value represents the single reinsurance payment. This paper presents the deduction of the risk model with interest, as well as the expression for the calculation of the expectation of the present value of the penalty of an insurance company, considering said model.

Keywords: Ruin probability, Poisson process, penalty, compound interest.

1. Introducción

Un seguro es una protección financiera para los asegurados, contra la posibilidad de ocurrencia de un evento económicamente desfavorable.

Considérese una empresa aseguradora que comienza sus actividades con un capital inicial y que durante su desarrollo recibe una cantidad constante de dinero, por los servicios que ofrece a sus clientes (asegurados), pero que en instantes aleatorios, durante la vigencia del contrato, puede tener desembolsos (de monto variable), provocados por reclamaciones por parte de éstos.

Para el análisis de la cantidad de dinero que tiene una empresa aseguradora, en un determinado momento, se puede utilizar un proceso de riesgo clásico (Sánchez, 2014).

Sin embargo, la empresa aseguradora no debería quedarse con lo que recibe de sus clientes, sino que debería de invertir su dinero ya sea en la bolsa de valores, considerando una inversión con riesgo, o bien, invertir a una tasa de interés libre de riesgo, como una tasa de interés establecida, para aumentar su patrimonio.

En este caso, la cantidad de dinero que tendría una empresa aseguradora, en un determinado momento, podría dividirse en dos partes: una que invierte en instituciones y mercados financieros (de la que no puede disponer de inmediato), a fin de acrecentar su patrimonio, y otra que retiene para tener la liquidez suficiente por si llegaran a ocurrir desembolsos provocados por reclamaciones de los asegurados.

Pero como lo anterior no garantiza que la empresa no caiga en ruina, en este trabajo se considera que ésta destina un pago para su reaseguro e invierte el resto de su capital a una tasa de interés constante, por unidad de tiempo.

Para ello, se usa un modelo de riesgo, con interés, para ob-

*Autor para correspondencia: rosamaria.flores.h@uatx.mx
Correo electrónico: sara.mejia.p@uatx.mx (Sara Mejía Pérez), rosamaria.flores.h@uatx.mx (Rosa María Flores-Hernández), richard.rodriguezN@outlook.com (Ricardo Rodríguez Nava).

Historial del manuscrito: recibido el 30/04/2023, última versión-revisada recibida el 27/06/2023, aceptado el 01/07/2023 en línea (postprint) desde el 07/07/2023, publicado el 05/01/2024. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v11i22.11089

tener una expresión que permite calcular la esperanza del valor presente de la penalidad de la empresa aseguradora.

El sistema financiero desempeña un papel sumamente importante ya que a él se debe el funcionamiento y el desarrollo de la economía de los países.

Por ejemplo, en México, el sistema financiero está constituido por diferentes intermediarios y mercados financieros, en los cuales una gran variedad de instrumentos se utilizan para movilizar el ahorro hacia usos más productivos. Los bancos son los intermediarios financieros más conocidos, ya que éstos ofrecen directamente sus servicios al público y forman parte importante del sistema de pagos.

Cabe señalar, que el sector asegurador es regulado, supervisado y promovido mediante leyes y otras disposiciones de carácter general. Dicho sector está regulado por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), es supervisado por la Comisión Nacional de Seguros y Finanzas (CNSF) y es promovido por organizaciones privadas como la Asociación Mexicana de Instituciones de Seguros (AMIS) y el Colegio Nacional de Actuarios (CONAC). Los asegurados por su parte, están protegidos por la Comisión Nacional para la Protección y Defensa de los Usuarios de Servicios Financieros (Condusef).

2. Supuestos

Para la deducción de la expresión que permite calcular la esperanza del valor presente de la penalidad es necesario considerar los siguientes supuestos:

- Se conoce el monto esperado de cada desembolso individual.
- Se conoce el número de reclamos promedio por unidad de tiempo (la intensidad con que llegan los reclamos).
- La cantidad total que recibe la empresa aseguradora por concepto de primas, por la responsabilidad civil que tiene con sus clientes, es mayor que la cantidad que desembolsa por concepto de reclamaciones.
- La ruina no es segura pero ésta puede ocurrir en un horizonte infinito.

3. Variables del proceso de riesgo clásico

A continuación se define un cierto tipo de proceso estocástico, el cual determina el comportamiento aleatorio del capital de una empresa aseguradora, que inicia sus actividades con cierto capital y, que durante su desarrollo, recibe una cantidad constante de dinero, por concepto de primas, debido a la responsabilidad civil que tiene con sus clientes, además de que puede tener reclamaciones que le ocasionen desembolsos de montos aleatorios (Mejia, 2000).

Definición 3.1. *Se denomina un* proceso de riesgo *al proceso estocástico*

$$U(t) = u + ct - S(t), \tag{1}$$

donde
u: es el capital con el que inicia actividades la empresa.
c: es la constante que determina la cantidad total que se recibe por concepto de primas.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \tag{2}$$

representa la suma del monto total de los desembolsos de las reclamaciones agregadas hasta el instante de tiempo t, con:
N(t): el número de desembolsos durante el intervalo de tiempo (0,t].
X_i: el monto de los desembolsos individuales.

Con base en la definición anterior, al proceso estocástico (1) se le denomina Modelo de riesgo clásico si los procesos $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{X_i\}_{i\geq 1}$ son independientes y satisfacen lo siguiente: $\{N(t)\}_{t\geq 0}$, es un proceso de Poisson, cuyo parámetro es $\lambda > 0$ y X_i, para $i \geq 1$, son variables aleatorias continuas no negativas, independientes e idénticamente distribuidas, con función de distribución $F(x)$, con $F(0) = 0$ y función de densidad $f(x) = F'(x)$.

Se denota por μ el monto promedio de cada uno de los desembolsos individuales, esto es:

$$\mu = \int_0^{\infty} x f(x)\, dx = E[X_i]$$

y, por σ^2 la varianza de los desembolsos individuales, es decir:

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = Var[X_i].$$

Definición 3.2. *Se denomina tiempo de ruina a la variable aleatoria T, definida como:*

$$T = \begin{cases} inf\{t > 0 | U(t) < 0\}, \\ \infty,\ si\ U(t) \geq 0,\ para\ todo\ t > 0. \end{cases}$$

Definición 3.3. *Se denomina probabilidad de ruina, en tiempo finito, a la función que depende del capital inicial de la empresa $U(0) = u \geq 0$, definida como:*

$$\psi(u,t) = P\{T \leq t | U(0) = u\}.$$

Definición 3.4. *Se denomina probabilidad de ruina definitiva a la función que depende del capital inicial de la empresa $U(0) = u \geq 0$, definida como:*

$$\psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\},$$

es decir

$$\psi(u) = P\{U(t) < 0, t \geq 0\}.$$

También se asume que, en promedio, lo que la empresa recibe por concepto de primas es mayor que lo que espera desembolsar, es decir

$$c > \lambda\mu,$$

lo anterior es para asegurar que $U(t)$ tenga una tendencia positiva, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \infty,$$

y de aquí que

$$\psi(u) < 1.$$

Lo anterior indica que la ruina no es segura, pero si ésta ocurriera, se tendria que analizar qué tan severa fue y si hay posibilidades de recuperación en poco tiempo, para que la empresa sólo se declare en ruina técnica y así no tenga que parar sus actividades. Así, es necesario analizar la probabilidad de ruina y las variables aleatorias relacionadas en el momento de la ruina.

Definición 3.5. *Se denomina superávit al capital con el que se cuenta inmediatamente antes de la ruina y está denotada como:*

$$U(T-).$$

Definición 3.6. *Se denomina déficit al monto de la reclamación que no se logró cubrir y que causó la ruina, el cual determina la severidad de la ruina que ha sufrido la empresa y está expresado por:*

$$|U(T)|.$$

Definición 3.7. *Se denomina tiempo de recuperación al instante de tiempo en el cual el proceso pasa a niveles positivos o se encuentra en el nivel cero y está definido como:*

$$T' = \begin{cases} inf\{t|U(t) \geq 0 \ y \ t > T\}, \\ \infty, \ si \ U(t) < 0, \ para \ todo \ t > 0. \end{cases}$$

Las variables establecidas en las Definiciones 3.2, 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran gráficamente en la Figura 1.

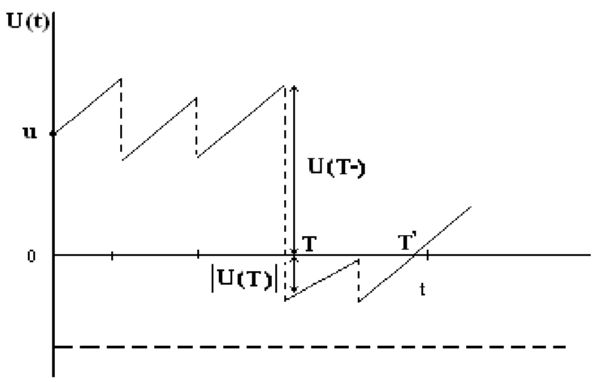

Figura 1: Proceso de riesgo que experimenta ruina y recuperación.

Luego, con las definiciones básicas dadas anteriormente, se puede observar lo siguiente:

Si $U(0) = u \geq 0$ y $f(x, y, t|u)$ es la función de densidad conjunta de $U(T-)$, $|\ U(T)\ |$ y T, entonces

$$\psi(u) = P\{T < \infty | U(0) = u\} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y, t|u) dxdydt.$$

Además, si $w(x, y)$ es una función no negativa para $x > 0$ y $y > 0$, entonces, para $u \geq 0$, la función $\phi(u)$ dada por:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= E[w(U(T-), |\ U(T)\ |)e^{-\alpha T} I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) e^{-\alpha t} f(x, y, t|u) dtdxdy, \end{aligned}$$

donde $I(T < \infty)$ es la función indicadora de que el tiempo de ruina ocurra en un tiempo finito y α puede ser interpretada como una tasa de interés.

Ahora, si para $\alpha \geq 0$ se considera:

$$f(x, y|u) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} f(x, y, t|u) dt$$

entonces,

$$\phi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y) f(x, y|u) dxdy.$$

Si se interpretan a α como una tasa de interés y w como una especie de penalidad cuando se produce la ruina, entonces $\phi(u)$ es la esperanza del valor presente de la penalidad.

Por otro lado, Si w se interpreta como la cantidad del beneficio de un seguro (o reaseguro) a pagar en el momento de ruina, entonces w es la prima única de su aseguramiento.

Con los conceptos anteriores y un enfoque de martingalas, en Sanchez (2014) se calculó la esperanza del valor presente de la penalidad, la cual se debe a la ruina de la empresa aseguradora, es decir, depende del superávit, del déficit y del instante de dicha ruina.

Cabe mencionar que las variables definidas anteriormente también se consideran como base para obtener la esperanza del valor presente de la función de penalidad cuando el capital se invierte.

4. Modelo de riesgo con interés

Se construirá el modelo de riesgo con interés, es decir la expresión que representa el capital de la empresa aseguradora cuando invierte su capital a una tasa de interés fija, con capitalización continua; ésto considerando los términos semejantes al modelo de riesgo clásico.

Recuérdese que el modelo de riesgo clásico se expresa de la siguiente forma:

$$U(t) = u + ct - S(t),$$

que representa el capital de la empresa en un instante de tiempo $t > 0$.

Por lo tanto, si esta cantidad de dinero se invierte suponiendo que se capitaliza en forma instantánea a una tasa de interés δ, se obtiene el modelo de riesgo con interés (Cai y Dickson, 2002), como:

$$U_\delta(t) = ue^{\delta t} + cs\frac{-(\delta)}{t} - \int_0^t e^{\delta(t-x)} dS(x), \tag{3}$$

donde u es el capital inicial, $c > \lambda\mu$ es el parámetro del ingreso de primas, por unidad de tiempo, y $s\frac{-(\delta)}{t} = \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$.

5. Obtención de las variables del modelo de riesgo con interés

La deducción del primer sumando de (3), el cual es el capital incial u de la empresa aplicándole una tasa de interés, con capitalización continua, a un tiempo t, es la siguiente:

Partiendo de que se tiene un capital u, al aplicar un interés δ, con capitalización en algún subperíodo n del tiempo t (Díaz y Aguilera, 2008), se obtiene

$$u\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt}.$$

De aquí que aplicando el límite cuando $n \to \infty$, para así conseguir un interés continuo, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} u\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt} &= u \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt} \\
&= u\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{n}{\delta}}\right]^{\delta t} \\
&= ue^{\delta t},
\end{aligned}$$

dado que la función potencia es una función continua y

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{n}{\delta}}.$$

A continuación se deducirá la expresión $cs\frac{-(\delta)}{t}$ con $\frac{-(\delta)}{t} = \frac{e^{\delta t}-1}{\delta}$, el cual es el ingreso de primas, por unidad de tiempo t, aplicando un interés δ, con capitalización continua.

Sea δ un interés con capitalización en algún subperiodo de t. Luego, como el ingreso de primas ocurre en los subperiodos del periodo t, éstos se considerarán como una proporción y a su vez como ingresan se invierten. Además, en ese momento se recibe otra proporción de c, esto es:

$$C_n = \frac{c}{n}\left[\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt-1} + \left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt-2} + ... + \left(1+\frac{\delta}{n}\right) + 1\right]. \quad (4)$$

Al observar que el segundo factor, del segundo miembro de (4), es una progresión geométrica del tipo $S = \sum_{i=0}^{n-1} r^i$, la cual converge a $S = \frac{r^n-1}{r-1}$, entonces se tiene que

$$C_n = \frac{c}{n}\frac{(1+\frac{\delta}{n})^{nt}-1}{[(1+\frac{\delta}{n})-1]} = c\frac{(1+\frac{\delta}{n})^{nt}-1}{\delta}.$$

Por otro lado, con capitalización en forma instantánea se tiene:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} C_n &= \lim_{n\to\infty} c\frac{\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt}-1}{\delta} \\
&= \frac{c}{\delta}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{nt}-1\right] \\
&= c\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}.
\end{aligned}$$

En el tercer término, recuérdese que $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, donde X_i es el monto del i-ésimo desembolso, y sea t_i el instante de tiempo cuando ocurre la i-ésima reclamación, de monto X_i; dichas variables aleatorias son independientes, con distribución uniforme, ya que $N(t)$ es un proceso de Poisson.

Por otro lado, un interés continuo es de la forma $e^{\delta t}$, donde δ es la tasa de interés, con capitalización continua, y t es el periodo de deducción del interés sobre un capital. Además, cabe recalcar que las reclamaciones ocurridas sobre el intervalo de tiempo de $[0, t)$ también se invertirán a un interés continuo sobre el tiempo de ocurrencia de la reclamación, hasta el tiempo en donde se llevará a cabo la deducción del capital final en el modelo de riesgo con interés ($U_\delta(t)$), es decir, si t_i es el tiempo de ocurrencia de la i-ésima reclamación de monto X_i esta se invertirá a un interés continuo de la forma $e^{\delta(t-t_i)}$. Por consiguiente, se supone que $N(t)$ denota la última reclamación ocurrida en la empresa aseguradora en un periodo de tiempo t, de ahí que $S(t)$ en el modelo $U_\delta(t)$, el cual se denota por $S_\delta(t)$, queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
S_\delta(t) &= e^{\delta(t-t_1)}X_1 + e^{\delta(t-t_2)}X_2 + ... + e^{\delta(t-t_{N(t)})}X_{N(t)} \\
&= \sum_{i=1}^{N(t)} e^{\delta(t-t_i)}X_i \to \int_0^t e^{\delta(t-x)}dS(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se han deducido todos los términos del modelo de riesgo con interés.

6. Esperanza del valor presente de la penalidad considerando el modelo de riesgo con interés

Antes de obtener la expresión de la esperanza del valor presente de la penalidad, considerando el modelo de riesgo con interés, es necesario establecer las variables involucradas en el modelo.

Sea $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ el tiempo de la n-ésima reclamación y X_n el monto del desembolso de la n-ésima reclamación. Se supone que $\{X_n, n \geq 1\}$ y $\{Y_n, n \geq 1\}$ son dos procesos independientes de variables aleatorias positivas, donde $\{X_n, n \geq 1\}$ tiene distribución $F(x) = P\{X_1 \leq x\}$, con media $\mu > 0$, y $\{Y_n, n \geq 1\}$ tiene distribución exponencial $P\{Y_1 \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x}, parax \geq 0$ y $\lambda > 0$.

De lo anterior se tiene que el número de reclamos del proceso es un proceso de Poisson con parámetro λ y, el monto de los desembolsos de los reclamos, al tiempo t, es:

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n.$$

Además, considerénse los siguientes conceptos de tiempo de ruina, superávit, déficit y probabilidad de ruina, de acuerdo a Cai y Dickson (2002).

Definición 6.1. *El tiempo de ruina de una empresa aseguradora cuyo capital en el instante de tiempo t está determinado por $U_\delta(t)$ es como sigue:*

$$T_\delta = \begin{cases} inf\{t > 0 | U_\delta(t) < 0\}, \\ \infty, \ si \ U_\delta(t) \geq 0, \ para \ todo \ t > 0. \end{cases}$$

Definición 6.2. *El superávit es el capital con el que la empresa aseguradora cuenta inmediatamente antes de la ruina. Considerando el modelo de riesgo con interés $U_\delta(t)$, se denota por*

$$U(T_\delta -).$$

Definición 6.3. *El déficit es el monto que la empresa aseguradora no logró cubrir por la reclamación que causó la ruina. Considerando el modelo de riesgo con interés, se denota por*

$$|U(T_\delta)|.$$

La penalidad, en el modelo de riesgo con interés, es una función que depende del superávit, déficit y el tiempo de ruina y se representa por

$$w(U(T_\delta -), |U(T_\delta)|).$$

Por lo que el valor esperado del valor presente de la función de penalidad del modelo de riesgo con interés, $U_\delta(t)$, se denota como sigue:

$$\phi_{\delta,\alpha}(u) = E[w(U(T_\delta -), |U(T_\delta)|)e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty)],$$

donde $I(T_\delta < \infty)$ es la función indicadora de que el tiempo de ruina ocurra en un tiempo finito y α es una tasa de interés no necesariamente igual a δ.

7. Cálculo de la esperanza del valor presente de la penalidad

Condicionando sobre el tiempo t y suponiendo que ocurre una reclamación en el intervalo $(0, t)$, de tamaño x, se puede notar que si $x \leq ue^{\delta t} + c\dfrac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$, entonces la ruina no ocurre ya que se puede finiquitar. Por otro lado, si $x > ue^{\delta t} + c\dfrac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$, entonces la ruina ocurre. Por lo anterior y la definición de esperanza condicional se tiene que:

$$\begin{aligned}
\phi_{\delta,\alpha}(u) = &\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty E[w(U(T_\delta -), |U(T_\delta)|)\cdot \\
&e^{-\alpha T_\delta} I(T_\delta < \infty)|X_1 = x, Y_1 = t] dF(x)dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\alpha)t} \int_0^{ue^{\delta t} + c\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}} \phi_{\delta,\alpha}(ue^{\delta t} + \\
&c\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta} - x) dF(x)dt + \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\alpha)t} \\
&\int_{ue^{\delta t} + c\frac{e^{\delta t}-1}{\delta}}^\infty w(ue^{\delta t} + c\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}, x - ue^{\delta t} - c\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}) dF(x)dt.
\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $y = ue^{\delta t} + c\dfrac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi_{\delta,\alpha}(u) = &\lambda(\delta u + c)^{(\lambda+\alpha)/\delta} \int_u^\infty (\delta y + c)^{-((\lambda+\alpha)/\delta)-1} \\
&\int_0^y \phi_{\delta,\alpha}(y - x) dF(x) dy \\
&+ \lambda(\delta u + c)^{(\lambda+\alpha)/\delta} \int_u^\infty (\delta y + c)^{-((\lambda+\alpha)/\delta)-1} \\
&\int_y^\infty w(y, x - y) dF(x) dy \\
&= \lambda(\delta u + c)^{(\lambda+\alpha)/\delta} \int_u^\infty (\delta y + c)^{-((\lambda+\alpha)/\delta)-1} \\
&\left(\int_0^y \phi_{\delta,\alpha}(y - x) dF(x) + A(y)\right) dy,
\end{aligned} \tag{5}$$

donde $A(t) = \int_t^\infty w(t, s - t) dF(s)$.

Luego, derivando (5) con respecto a u, se obitene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du}\phi_{\delta,\alpha}(u) = &\frac{\lambda + \alpha}{c + \delta u}\phi_{\delta,\alpha}(u) - \frac{\lambda}{c + \delta u} \\
&\left(\int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(u - x) dF(x) + A(u)\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Remplazando u por t en (6), se tiene que para $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi_{\delta,\alpha}(t) = &\frac{\lambda + \alpha}{c + \delta t}\phi_{\delta,\alpha}(t) - \frac{\lambda}{c + \delta t} \\
&\left(\int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t - x) dF(x) + A(t)\right).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(\lambda + \alpha)\phi_{\delta,\alpha}(t) = &(c + \delta t)\frac{d}{dt}\phi_{\delta,\alpha}(t) + \\
&\lambda \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t - s) dF(s) + \lambda A(t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Luego, integrando (7) de 0 a u, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\lambda + \alpha) \int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t) dt = &\int_0^u (c + \delta t) d\phi_{\delta,\alpha}(t) + \\
&\lambda \int_0^u \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t - s) dF(s) dt \\
&+ \lambda \int_0^u A(t) dt.
\end{aligned} \tag{8}$$

Y, al usar integración por partes con $u_1 = c + \delta t$ y $dv_1 = d\phi_{\delta,\alpha}(u)$, en el primer término de (8), se obtiene

$$\int_0^u (c + \delta t) d\phi_{\delta,\alpha}(t) = (c + \delta u)\phi_{\delta,\alpha}(u) - c\phi_{\delta,\alpha}(0) - \delta \int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t) dt. \tag{9}$$

Luego, con respecto al segundo término de (8),

$$\lambda \int_0^u \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t - s) dF(s) dt = \lambda \int_0^u F(s)\phi_{\delta,\alpha}(u - s) ds. \tag{10}$$

Como en $\lambda \int_0^u \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dF(s)dt$ se tiene que $0 < s < t < u$, entonces

$$\lambda \int_0^u \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dF(s)dt = \quad \lambda \int_0^u \int_s^u \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dtdF(s). \tag{11}$$

y si $w = \int_s^u \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dt$, entonces rescribiendo (11), se obtiene que

$$\lambda \int_0^u \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dF(s)dt = \lambda \int_0^u wdF(s).$$

Luego, integrando por partes con $u_2 = w$ y $dv_2 = dF(s)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^u wdF(s) &= \lambda \left[wF(s)|_{s=0}^{s=u} - \int_0^u F(s)\frac{dw}{ds}ds \right] \\ &= \lambda[\int_u^u \phi_{\delta,\alpha}(t-u)dtF(u) - \int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dtF(0) - \\ &\int_0^u F(s)\frac{dw}{ds}ds] \\ &= -\lambda \int_0^u F(s)\frac{dw}{ds}ds,\end{aligned}$$

dado que $\int_u^u \phi_{\delta,\alpha}(t-u)dt = 0$ y $F(0) = 0$.
Además,

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^u wdF(s) &= -\lambda \int_0^u F(s)\frac{dw}{ds}ds \\ &= -\lambda \int_0^u F(s)\frac{d}{ds}\int_s^u \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dtds \\ &= \lambda \int_0^u F(s)\phi_{\delta,\alpha}(u-s)ds. \end{aligned}\tag{12}$$

Esto último por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo y usando el cambio de variable $x = t - s$.

Luego, al sustituir (9) y (10) en (8), se obtiene que

$$\begin{aligned}(\lambda + \alpha) \int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dt &= \int_0^u (c + \delta t)d\phi_{\delta,\alpha}(t) + \\ &\lambda \int_0^u \int_0^t \phi_{\delta,\alpha}(t-s)dF(s)dt + \lambda \int_0^u A(t)dt. \\ &= (c+\delta u)\phi_{\delta,\alpha}(u) - c\phi_{\delta,\alpha}(0) - \delta \int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dt \\ &+ \lambda \int_0^u F(s)\phi_{\delta,\alpha}(u-s)ds + \lambda \int_0^u A(t)dt.\end{aligned}\tag{13}$$

Y al dividir la ecuación (13) por $c + \delta u$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda+\alpha}{c+\delta u}\int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dt &= \phi_{\delta,\alpha}(u) - \frac{c}{c+\delta u}\phi_{\delta,\alpha}(0) - \\ &\frac{\delta}{c+\delta u}\int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dt + \frac{\lambda}{c+\delta u} \\ &\int_0^u F(s)\phi_{\delta,\alpha}(u-s)ds \\ &+ \frac{\lambda}{c+\delta u}\int_0^u A(t)dt.\end{aligned}$$

Despejando a $\phi_{\delta,\alpha}(u)$ en la ecuación anterior y haciendo $s = u-t$ se llega a que:

$$\begin{aligned}\phi_{\delta,\alpha}(u) = &\frac{c}{c+\delta u}\phi_{\delta,\alpha}(0) - \frac{\lambda}{c+\delta u}\int_0^u A(t)dt + \\ &\frac{\delta}{c+\delta u}\int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dt - \frac{\lambda}{c+\delta u}\int_0^u F(u-t)\phi_{\delta,\alpha}(t)dt \\ &+ \frac{\lambda+\alpha}{c+\delta u}\int_0^u \phi_{\delta,\alpha}(t)dt.\end{aligned}$$

La cual es la esperanza del valor presente de la función de penalidad de una empresa aseguradora, considerando el modelo de riesgo con interés.

Reescribiendo la ecuación anterior como

$$\phi_{\delta,\alpha}(u) = \frac{c\phi_{\delta,\alpha}(0)}{c+\delta u} - \frac{\lambda}{c+\delta u}\int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_{\delta,\alpha}(u,t)\phi_{\delta,\alpha}(t)dt, \tag{14}$$

donde

$$k_{\delta,\alpha}(u,t) = \frac{\delta + \alpha + \lambda(1 - F(u-t))}{c+\delta u},$$

se puede observar que para el cáculo de la esperanza del valor presente de la penalidad, en el modelo de riesgo con interés, se necesitan en total 5 parámetros, los cuales son: capital inicial (u), ingreso por concepto de primas (c), la intensidad de los reclamos (λ), la tasa de interés de inversión (δ) y la tasa de interés para el cálculo del valor presente (α).

En particular, si $\alpha = 0$, es decir, $\phi_{\delta,0}(u) = \phi_\delta(u)$, entonces

$$\phi_\delta(u) = \frac{c\phi_\delta(0)}{c+\delta u} - \frac{\lambda}{c+\delta u}\int_0^u A(t)dt + \int_0^u k_\delta(u,t)\phi_\delta(t)dt, \tag{15}$$

donde

$$k_\delta(u,t) = k_{\delta,0}(u,t) = \frac{\delta + \lambda(1 - F(u-t))}{c+\delta u}.$$

Además se observa que las ecuaciones (14) y (15) son ecuaciones del tipo Volterra, específicamente, ecuaciones integrales lineales de Volterra de segunda especie no homogéneas.

Como las ecuaciones anteriores tienen la forma:

$$\varphi(x) = l(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{16}$$

donde:
k es una función definida con valores reales denominada núcleo,
l es una función definida con valores reales denominada término libre y,
$\varphi(x)$ es la función que debemos encontrar,

la solución está dada por el método de aproximaciones sucesivas de la ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie no homogénea, es decir, la solución de la ecuación (16), si existe, es

$$\varphi(x) = l(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b k_m(x,t)l(t)dt,$$

donde a, b son valores reales y

$$k_m(x,t) = \int_a^b k(x,s)k_{m-1}(s,t)ds.$$

8. Conclusiones

Se presentó el desarrollo, término por término, de la expresión del modelo de riesgo con interés, $U_\delta(t)$, y se estableció que la esperanza del valor presente de la penalidad de una empresa aseguradora, en el caso cuando ésta invierte su capital a una tasa de interés, es una ecuación integral lineal de Volterra de segunda especie, la cual se resuelve mediante el método de sucesiones sucesivas; ésto basándose en Loaiza (2014).

Se deja a los lectores interesados consultar Rodríguez (2021), donde se resuelve la ecuación integral, de forma numérica, cuando la penalidad es una unidad monetaria, se tiene una tasa de interés definida y se considera el supuesto de que los desembolsos de la empresa aseguradora tienen una distribución exponencial.

Agradecimientos

Los autores agradecen al revisor anónimo sus observaciones, las cuales ayudaron a mejorar este trabajo.

Referencias

[1] Cai, J. & Dickson, D. (2002). On the expected discounted penality function at ruin of a surplus process with interest. *Insurance: Mathematics and Economics*, 30, 389-404.

[2] Díaz, M. A. y Aguilera, G, V. (2008). *Matemáticas Financieras*. México, D.F.: McGraw-Hill.

[3] Loayza, R. N. R. (2012). *Solución analítica y numérica de ecuaciones integrales lineales de Fredholm no homogéneas de segunda especie.* Tesis de Licenciatura. Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco. Cusco, Perú.

[4] Mejía, P. S. (2000). *Generalización del modelo clásico de riesgo a flujo de reclamaciones de tipo fases.* Tesis de Maestría. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Puebla, México.

[5] Sánchez, S. R. (2014). *La esperanza del valor presente de la penalidad de una empresa.* Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Tlaxcala. Tlaxcala, México.

[6] Rodríguez, N. R. (2021). *Cálculo de la esperanza del valor presente de la penalidad del modelo de riesgo con interés. Caso: una unidad monetaria*. Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Tlaxcala. Tlaxcala, México.