DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 11 No. 22 (2024) 110–117

Funciones que preservan la ultramétrica débil e implicaciones
Functions that preserve the weak ultrametric and implications

R. Martínez-Cruz [a,*], M. C. Cruz-Cruz [a], J.E. Pérez-Vázquez [a], R. López-Hernández [a]

[a] *Facultad de Ciencias Básicas Ingeniería y Tecnología, Universidad Autónoma de Tlaxcala, 90401, Apizaco, Tlaxcala, México.*

Resumen

Previamente, presentamos el estado actual de la familia de funciones que preservan la ultramétrica débil $\mathcal{UD}$ y del conjunto de funciones que preservan la b–métrica extendida $\mathcal{BE}$ y su relación con las ya existentes. En este trabajo continuamos con la investigación proporcionando algunas equivalencias o caracterizaciones para el conjunto de funciones que preservan la ultramétrica débil $\mathcal{UD}$, y este hecho implica que, la gráfica de los elementos en $\mathcal{UD}$ está contenida en la región propuesta por J. Dobos y Z. Piotrowski.

Palabras Clave: Ultramétrica, ultramétrica débil, b–métrica extendida.

Abstract

Previously, we presented the current state of the family of functions that preserve the weak ultrametric $\mathcal{UD}$ and of the set of functions that preserve the extended b–metric $\mathcal{BE}$ and its relationship with existing ones. In this paper we continue with the investigation providing some equivalences or characterizations for the set of functions that preserve the weak ultrametric $\mathcal{UD}$, and this fact implies that, the graph of the elements in $\mathcal{UD}$ is contained in the region proposed by J. Dobos and Z. Piotrowski.

Keywords: Ultrametric, weak ultrametric, extended b–metric.

1. Introducción

En el artículo (Martínez, 2022) dimos a conocer dos familias, a saber, la colección de funciones que preservan la ultramétrica débil $\mathcal{UD}$ y el conjunto de funciones que preservan la b–métrica extendida $\mathcal{BE}$. Investigamos sus relaciones entre ellas y otras ya conocidas. En este trabajo continuamos con esta tarea, proporcionando algunas caracterizaciones para el espacio de funciones que preservan la ultramétrica débil $\mathcal{UD}$ ver la Proposición 4.13, y este hecho como veremos implicará de manera natural que, la gráfica de toda función que pertenece al conjunto $\mathcal{UD}$ se encuentra en la región propuesta por J. Dobous y Z. Piotrowski ver el Teorema 5.1. De paso anexamos algunos ejemplos para justificar que, las definiciones de espacio b–métrico extendido, b–métrico y métrico no son equivalentes, ver Ejemplos 3.4 y 3.6 de la Sección 3. En la Sección 4, con los Ejemplos 4.4 y 4.5 verificamos que, tampoco lo son los espacios métrico, ultramétrico y ultramétrico débil. Deseamos que este trabajo motive o estimule la curiosidad para buscar mas información acerca de esta temática. De cualquier forma difundir esta monografía, es una de las tareas principales que los autores se han propuesto para que el lector encuentre en estas líneas un espacio para que se adentre en su lectura, y cerciorarse si encuentra aplicaciones reales. Para lograrlo, esta obra la hemos dividido en cuatro secciones como indicamos a continuación. En la sección de preliminares proporcionamos un breve resumen sobre los conceptos y resultados importantes que nos son de utilidad para lo que sigue más adelante. La sección de espacios b–metŕicos y b–metŕicos extendidos nos concentramos en proporcionar las definiciones y su relación entre ellos. Damos información sobre los investigadores que lo dierón a conocer y su realce que estos tienen en la literatura (espacios que tienen sentido estudiarlos). De igual manera, en el apartado de espacios ultramétricos y ultramétricos débiles hacemos lo propio. Además, recalcamos que, muchas de las propiedades que se cumplen para la familia $\mathcal{MB}$ en automático lo hacen para el conjunto $\mathcal{UD}$ (ya que son iguales). Este hecho importante, encuentra una aplicación en la sección de gráfica de los elementos en la clase $\mathcal{B}$.

* Autor para correspondencia: reinaldo.martinez.c@uatx.mx.
Correo electrónico: reinaldo.martinez.c@uatx.mx(Reinaldo Martínez-Cruz), maristar1943@gmail.com(Marian Citlalli Cruz-Cruz), joseerasmo.perez.v@uatx.mx(José Erasmo Pérez-Vázquez), ricardo.lopez.h@uatx.mx(Ricardo López-Hernández).

Historial del manuscrito: recibido el 01/05/2023, última versión-revisada recibida el 01/07/2023, aceptado el 01/07/2023, en línea (postprint) desde el 07/07/2023, publicado el 05/01/2024. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v11i22.11090

2. Preliminares

En esta sección, damos inicio recordando algunas nociones que serán empleadas en el resto del trabajo, entre otras, la de función que preserva la métrica. Para el lector interesado en profundizar en esta temática, le recomendamos la cita (Corazza, 1999).

Definición 2.1. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ una función. Se dice que:

(a) f *preserva la métrica* si para cualquier espacio métrico (X, d), se tiene que $f \circ d$ es una métrica en X.

(b) f es *flexible* si y sólo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.

(c) f es *subaditiva* si para cualesquiera $x, y \in [0,\infty)$ se cumple que $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

(d) f es *casi-subaditiva* si existe $s \geq 1$ tal que se cumple $f(x + y) \leq s(f(x) + f(y))$ para toda $x, y \in [0,\infty)$.

(e) f es *convexa* si $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ para cualesquiera $x, y \in [0,\infty)$ y $t \in [0, 1]$.

(f) f es *cóncava* si $(1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$ para cualesquiera $x, y \in [0,\infty)$ y $t \in [0, 1]$.

(g) f es *creciente* en un intervalo $I \subseteq [0,\infty)$ si para cada $x, y \in I$ con $x < y$, tenemos que $f(x) \leq f(y)$.

(Dobous, 1998), demuestran los siguientes incisos.

Nota 2.2. a) Si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es una función que preserva la métrica, entonces f es flexible.

b) Si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es concava y flexible, entonces f es subaditiva y creciente.

Una relación entre los conceptos de funciones subaditivas y casi-subaditivas.

Nota 2.3. Si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es *subaditiva*, entonces f es *casi-subaditiva*.

Algunos resultados relacionados con funciones que preservan la métrica:

Lema 2.4. *Si f es una función que preserva la métrica, entonces f es subaditiva.*

Demostración. La prueba puede ser consultada, por ejemplo, en (Corazza, 1999, Proposición 2.1). □

Una consecuencia inmediata de la Nota 2.3 y el Lema 2.4 es el siguiente hecho.

Lema 2.5. *Si f es una función que preserva la métrica, entonces f es casi-subaditiva.*

La Definición 2.1 inciso (a) y la Nota 2.2 inciso b) implican que

Lema 2.6. *Si $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ es cóncava y flexible, entonces f preserva la métrica.*

Demostración. La prueba puede ser consultada, por ejemplo, en (Martínez, 2022, Lema 2.9). □

3. Espacios b-métricos y b-métricos extendidos

Empezamos esta sección proporcionando los conceptos de los espacios b–métricos y b–métricos extendidos y su relación entre ellos, recomendamos al lector las citas (Khemaratchatakumthorn y Pongsriiam, 2019) y (Martínez, 2022) para ahondar mas en el tema. Se debe a I. A. Bakhtin ver (Bakhtin, 1989) el concepto de b–métrica, y muchos autores han investigado las métricas generalizadas, como es el caso de la métrica y la pseudométrica. Inspirados en el concepto de espacio b—métrico, Tayyab Kamran, Maria Samreen y Qurat UL Ain en (Kamran *et al.*, 2017) dan a conocer el concepto de espacio b–métrico extendido. Establecen algunos teoremas del punto fijo para auto-mapeos definidos en dichos espacios. Sus investigaciones amplían o generalizan muchos resultados preexistentes en la literatura.

Las definiciones de b–métrica y b–métrica extendida es como sigue.

Definición 3.1. Sea X un conjunto no vacío. Una b–métrica en X es una función $d : X\times X \to [0,\infty)$ que satisface las siguientes tres condiciones: para cada $x, y, z \in X$ se tiene que

(B1) $d(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,
(B2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetría),
(B3) existe $s \geq 1$ tal que $d(x, y) \leq s(d(x, z) + d(z, y))$.

El par (X, d) es llamado espacio b–métrico si d es una b–métrica en X.

Definición 3.2. Sean X un conjunto no vacío y $\theta : X \times X \to [1,\infty)$ una función. Se dice que $d_\theta : X \times X \to [0,\infty)$ es una b–métrica extendida si para todo $x, y, z \in X$ se satisface:

$(d_\theta 1)$ $d_\theta(x, y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$;
$(d_\theta 2)$ $d_\theta(x, y) = d_\theta(y, x)$;
$(d_\theta 3)$ $d_\theta(x, z) \leq \theta(x, z)[d_\theta(x, y) + d_\theta(y, z)]$.

El par (X, d_θ) es llamado espacio b–métrico extendido si d_θ es una b–métrica extendida en X.

Observación 3.3. Todo espacio b–métrico (X, d) es un espacio b–métrico extendido.

Demostración. Consúltese, por ejemplo, en (Martínez, 2022, Observación 5.2). □

El recíproco de la Observación 3.3, no se satisface.

Ejemplo de un espacio b–métrico extendido que no es b–métrico.

Ejemplo 3.4. Sea $X = \{0, 1, 2\}$. Definamos $\theta : X \times X \to [1,\infty)$ y $d_\theta : X \times X \to [0,\infty)$ como sigue: $\theta(x, y) = 1 + x + y$,

$$d_\theta(0, 0) = d_\theta(1, 1) = d_\theta(2, 2) = 0, \quad d_\theta(0, 1) = d_\theta(1, 0) = 8,$$

$$d_\theta(0, 2) = d_\theta(2, 0) = 2 \quad \text{y} \quad d_\theta(1, 2) = d_\theta(2, 1) = 2.$$

Tenemos que, $(d_\theta 1)$ y $(d_\theta 2)$ se satisfacen trivialmente. Para $(d_\theta 3)$:

$$\begin{aligned} 8 = d_\theta(0, 1) &\leq \theta(0, 1)[d_\theta(0, 2) + d_\theta(2, 1)] \\ &= 2[2 + 2] = 2(4). \end{aligned}$$

$$2 = d_\theta(0, 2) \leq \theta(0, 2)[d_\theta(0, 1) + d_\theta(1, 2)]$$

$$= 3[8 + 2] = 3(10).$$

$$2 = d_\theta(1,2) \leq \theta(1,2)[d_\theta(1,0) + d_\theta(0,2)]$$
$$= 4[8 + 2] = 4(10).$$

Por lo tanto, para cualquier $x, y, z \in X$, se satisface que

$$d_\theta(x,y) \leq \theta(x,y)[d_\theta(x,z) + d_\theta(z,y)].$$

Así, (X, d_θ) es un espacio b–métrico extendido.

Sin embargo, para cualquier $1 \leq s < 2$, tenemos que:

$$s[d_\theta(0,2) + d_\theta(2,1)] = s(2 + 2) < 8 = d_\theta(0,1).$$

Es decir, no se satisface la desigualdad,

$$d_\theta(0,1) \leq s[d_\theta(0,2) + d_\theta(2,1)].$$

Por lo que d_θ no es una b–métrica.

Observación 3.5. Todo espacio métrico es b–métrico.

Demostración. Si ponemos $s = 1$ en la Definición 3.1, obtenemos la noción de espacio métrico. □

El recíproco de la Observación 3.5 en general no es cierto, veamos como es esto.

Ejemplo 3.6. Consideremos $X = \{A, B, C\}$, y definamos la siguiente función $d : X \times X \to [0, \infty)$ como sigue:

$$d(A,A) = d(B,B) = d(C,C) = 0, \quad d(A,B) = d(B,A) = 1,$$

$$d(A,C) = d(C,A) = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad d(B,C) = d(C,B) = \frac{1}{3}.$$

Tenemos que

$$d(A,B) = 1 \nleq \frac{2}{3} = d(A,C) + d(B,C).$$

De aquí que, d no es una métrica.

Por otra parte,

$$d(A,B) = 1 < 3\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\Big) = 3(d(A,C) + d(B,C)),$$

$$d(A,C) = \frac{1}{3} < 1\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) = 1(d(A,B) + d(B,C)),$$

$$d(B,C) = \frac{1}{3} < 1\Big(1 + \frac{1}{3}\Big) = 1(d(A,B) + d(B,C)).$$

Así, d es una b–métrica.

Por la Observación 3.5, se sigue lo siguiente

Observación 3.7. Todo espacio métrico (X, d) es un espacio b–métrico extendido.

Definición 3.8. Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Se dice que

i) f preserva la b–métrica si para cada espacio b–métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una b–métrica sobre X;

ii) f preserva la métrica–b–métrica si para cada espacio métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una b–métrica sobre X;

iii) f preserva la b–métrica–métrica si para cada espacio b–métrico (X, d), tenemos que $f \circ d$ es una métrica.

Al igual que en el Lema 2.5, obtenemos algo similar para funciones que preservan la b–métrica.

Lema 3.9. *Si f es una función que preserva la b–métrica, entonces f es cuasi-subaditiva.*

Demostración. La prueba puede ser consultada, por ejemplo, en (Martínez, 2022, Lema 3.2) □

Denotamos por $\mathcal{M}$ el conjunto de funciones que preservan la métrica, por $\mathcal{B}$ la colección de funciones que preservan la b–métrica, por $\mathcal{MB}$ el espacio de funciones que preservan la métrica–b–métrica, y por $\mathcal{BM}$ la familia de funciones que preservan la b–métrica–métrica.

Previamente, (Khemaratchatakumthorn y Pongsriiam, 2019) obtuvieron el siguiente resultado

Teorema 3.10. *Las siguientes relaciones se satisfacen:*

$$\mathcal{BM} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{B} = \mathcal{MB}, \quad \mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{BM} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} \nsubseteq \mathcal{M}.$$

La definición que presentamos en seguida puede ser consultado en (Martínez, 2022)[Definición 5.4].

Definición 3.11. Una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ preserva la b–métrica extendida si para cada espacio b–métrico extendido (X, d_θ), existe $\hat{\theta} : X \times X \to [1, \infty)$ tal que $(f \circ d_\theta)_{\hat{\theta}}$ es una b–métrica extendida en X.

Al conjunto de funciones que preservan la b–métrica extendida, lo denotamos por $\mathcal{BE}$.

En la cita (Martínez, 2022)[Teorema 5.5] se demostró lo siguiente.

Teorema 3.12. *La siguiente contención se satisface:* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{BE}$.

Definición 3.13. (a)Una tripleta triangular es una terna (a, b, c) con $a, b, c \geq 0$ tales que $a \leq b + c$, $b \leq a + c$ y $c \leq a + b$. Se denota por $\triangle$ el conjunto de las tripletas triangulares.

(b)Sean $s \geq 1$ y $a, b, c \geq 0$. Una tripleta (a, b, c) será llamada tripleta s–triangular si $a \leq s(b+c)$, $b \leq s(c+a)$ y $c \leq s(a+b)$. El conjunto de tripletas s–triangulares se denota por $\triangle_s$.

De la Definición 3.13, se desprende la siguiente Nota.

Nota 3.14. Para cada terna $(a, b, c) \in \triangle$, se tiene que $(a, b, c) \in \triangle_s$

Demostración. Supongamos que $(a, b, c) \in \triangle$ y $(a, b, c) \notin \triangle_s$, entonces (a, b, c) no es una tripleta s–triangular, así para cada $s \geq 1$, tenemos que, $a > s(b + c)$ o $b > s(c + a)$ o $c > s(a + b)$. En particular, para $s = 1$, obtenemos que:

$$a > (b + c) \quad \text{o} \quad \mathrm{b > (c + a)} \quad \text{o} \quad c > (a + b),$$

en otras palabras $(a, b, c) \notin \triangle$. Por lo que, $(a, b, c) \in \triangle$ y $(a, b, c) \notin \triangle$, lo cual nos da una contradicción. Luego, $(a, b, c) \in \triangle_s$. □

En la cita (Khemaratchatakumthorn y Pongsriiam, 2018), demuestran los siguientes resultados. Los enunciamos para constatar mas adelante que también son válidos para el conjunto $\mathcal{UD}$.

Teorema 3.15. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Si f es flexible, casi-subaditiva, y creciente, entonces $f \in \mathcal{MB}$.*

Teorema 3.16. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Si $f \in \mathcal{MB}$, entonces f es flexible y casi-subaditiva.*

(Khemaratchatakumthorn y Pongsriiam, 2019) obtienen el siguiente Corolario.

Corolario 3.17. *Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ flexible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $f \in \mathcal{B}$.

(ii) $f \in \mathcal{MB}$.

(ii) *Existe $s \geq 1$ tal que $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_s$ para cada $(a,b,c) \in \triangle$.*

4. Espacios ultramétrico y ultramétrico débil

En esta otra sección atendemos las nociones de funciones que preservan la ultramétrica y ultramétrica débil. Inspirados por una caracterización del conjunto de funciones que preservan la ultramétrica, damos a conocer algo propio para las ultramétricas débiles. Antes comentamos lo siguiente:

(a) Respecto a la ultramétrica débil, existen investigadores que la utilizan para caracterizar el tiempo de las señales de internet entre los nodos de la red. Por ejemplo, recientemente se ha diseñado una gran cantidad de algoritmos para Internet bajo el supuesto de que la distancia definida por el retrazo de ida y vuelta RTT es una métrica. Sin embargo, según los datos recopilados en la plataforma Planet Lab del proyecto All-Sites-Pings, confirman que, la desigualdad del triángulo no se cumple para una fracción significativa de los nodos. Ahí, demuestran que, las medidas de RTT satisfacen una versión débil de la desigualdad triangular, es decir, existe una constante muy pequeña ρ de tal forma que, para cualquier tripleta u, v, w, se tiene que,

$$RTT(u,v) \leq \rho max\{RTT(u,w), RTT(w,v)\}.$$

Esta desigualdad, junto con las otras dos propiedades de métrica dan origen a la Inframétrica o ultramétrica débil ver (P. Fraigniaud, 2008).

(b) Por otra parte, los espacios ultramétricos se originan en el estudio del análisis no arquimediano (Siegfried *et al.*, 1984) y de los números p-adicos (Yurova, 2013). Existen algunos sistemas muy complejos, cuyos espacios de estado tienen una estructura ultramétrica. La ultrametricidad es un concepto y una herramienta matemática apropiada para la descripción de sistemas con *estructura jerárquica*. Por ejemplo, la complejidad biológica tiene una estructura jerárquica. Por consiguiente, los conceptos matemáticos adecuados para la descripción cuantitativa de tales fenómenos biológicos son parte del análisis p-ádico (ultramétrico). Así, el primer campo de la ciencia donde la ultrametricidad se observa fue en la taxonomía biológica.

Las propiedades jerárquicas del análisis p-ádico, son una consecuencia de la norma p-ádica la cual satisface la desigualdad fuerte del triángulo:

$$|x+y|_p \leq max\{|x|_p, |y|_p\},$$

donde x e y son dos números p-ádicos, es decir, para cada número primo p existe el correspondiente campo de números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$.

La definición de inframétrica y de ultramétrica es como sigue.

Definición 4.1. Sea X un conjunto no vacío. Una inframétrica (o ultramétrica débil) en X es una función $d : X \times X \to [0,\infty)$ que satisface las siguientes tres condiciones: para cada $x, y, z \in X$ se tiene que

(I1) $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,

(I2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría),

(I3) existe $C \geq 1$ tal que $d(x,y) \leq C$ máx$\{d(x,z), d(z,y)\}$.

El par (X,d) es llamado espacio ultramétrico débil si d es una ultramétrica débil en X.

Definición 4.2. Sea X un conjunto no vacío. Una Ultramétrica en X es una función $d : X \times X \to [0,\infty)$ que satisface las siguientes tres condiciones: para cada $x, y, z \in X$ se tiene que

(U1) $d(x,y) = 0$ si, y sólo si, $x = y$,

(U2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simetría),

(U3) $d(x,y) \leq$ máx$\{d(x,z), d(z,y)\}$ (desigualdad ultramétrica).

El par (X,d) es llamado espacio ultramétrico si d es una ultramétrica en X.

En la siguiente observación proporcionamos una relación entre la ultramétrica, la métrica, la b–métrica y ultramétrica débil.

Nota 4.3. Nótese que, si existe una constante $s \geq 1$ y elementos $x, y, z \in X$ cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned} max\{d(x,z), d(z,y)\} &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ &\leq s(d(x,z) + d(z,y)) \\ &\leq 2smax\{d(x,z), d(z,y)\}. \end{aligned}$$

De aquí se desprende que, todo espacio ultramétrico (X,d) es un espacio métrico, y esto implica b–métrico. Estas implicaciones resaltan lo comentado anteriormente ver Observaciones 3.3 y 3.5.

Una pregunta que emerge de manera natural es la siguiente

Pregunta. ¿Los recíprocos se satisfacen?

A continuación damos respuesta a esta pregunta.

Ejemplo de un espacio métrico que no es ultramétrico.

Ejemplo 4.4. En el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, considere la siguiente función:

$$d(x,y) = |x-y| \quad \text{para} \quad \text{cualesquiera} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

No es difícil de verificar que, d es una métrica. Sin embargo, para

$$x = -5, \quad y = 2 \quad \text{y} \quad z = 0,$$

obtenemos que,

$$d(x,y) = 7, \quad d(x,z) = 5 \quad \text{y} \quad d(z,y) = 2.$$

De aquí que,

$$7 = d(x,y) \nleq max\{d(x,z), d(z,y)\} = max\{5,2\} = 5.$$

Así, la desigualdad ultramétrica no se satisface y, esto implica que, d no sea una ultramétrica.

Ejemplo de un espacio ultramétrico débil que no es métrico.

Ejemplo 4.5. En el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, considere la siguiente función $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y \\ 8, & \text{si } x, y \in \{1,2\}, \quad x \neq y \\ 2, & \text{si } x \notin \{1,2\} \quad \text{o} \quad y \notin \{1,2\}, \quad x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

Nótese que,

$$d(1,2) = 8, \quad d(1,3) = 2 \quad \text{y} \quad d(3,2) = 2.$$

Así,

$$8 = d(1,2) \leq 4(2) = 4max\{d(1,3), d(3,2)\},$$

$$2 = d(1,3) \leq 1(8) = 1max\{d(1,2), d(3,2)\},$$

$$2 = d(2,3) \leq 1(8) = 1max\{d(2,1), d(1,3)\}.$$

es decir, d es una ultramétrica débil, con constantes $C = 1, 4$, pero no es métrica, ya que

$$8 = d(1,2) \nleq d(1,3) + d(3,2) = 2 + 2 = 4.$$

La definición siguiente inciso (iv), así como la notación $\mathcal{UD}$ viene de (Martínez, 2022).

Definición 4.6. Sea $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$. Se dice que:

(i) f preserva la ultramétrica si para cada espacio ultramétrico (X,d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica;

(ii) f preserva la métrica-ultramétrica si para todo espacio métrico (X,d), $f \circ d$ es una ultramétrica;

(iii) f preserva la ultramétrica-métrica si para todo espacio ultramétrico (X,d), $f \circ d$ es una métrica;

(iv) f preserva la ultramétrica débil si para cada espacio ultramétrico débil (X,d), tenemos que $f \circ d$ es una ultramétrica débil.

Denotamos por $\mathcal{U}$ la familia de funciones que preservan la ultramétrica, por $\mathcal{MU}$ el conjunto de funciones que preservan la métrica-ultramétrica, por $\mathcal{UM}$ el conjunto de funciones que preservan la ultramétrica-métrica y por $\mathcal{UD}$ la colección de funciones que preservan la ultramétrica débil.

(Pongsriiam y Termwuttipong, 2014) obtuvieron el siguiente resultado

Teorema 4.7. *Las siguientes relaciones se satisfacen.*

1. $\mathcal{MU} \subseteq (\mathcal{U} \cap \mathcal{M}) \subseteq \mathcal{U}$ *y* $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{M} \subseteq \mathcal{UM}$*;*
2. $\mathcal{U} \cap \mathcal{M} \nsubseteq \mathcal{MU}$*,* $\mathcal{UM} \nsubseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{M}$ *y* $\mathcal{U} \neq \mathcal{M}$*.*

Algunos hechos importantes sobre funciones que preservan la ultramétrica.

Nota 4.8. Si $f \in \mathcal{U}$, entonces f es flexible

Demostración. Si $f \in \mathcal{U}$, entonces para cada espacio ultramétrico (X,d), se tiene que, $f \circ d$ es una ultramétrica. Por la Nota 4.3, se tiene que (X,d) es un espacio métrico y $f \circ d$ es una métrica. En otras palabras, $f \in \mathcal{M}$, y así por la Nota 2.2, f es flexible. □

Teorema 4.9. *Sea* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$*. Entonces* $f \in \mathcal{U}$ *si y solo si* f *es creciente y flexible.*

Demostración. Supongamos que f preserva la ultramétrica. Por la Nota 4.8, f es flexible. Veamos que es creciente. Sean $a, b \in [0,\infty)$ con $a < b$. Sean d_2 la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^2$ y $X = \{A, B, C\} \in \mathbb{R}^2$, donde $A = (-\frac{a}{2}, 0)$, $B = (\frac{a}{2}, 0)$ y $C = \left(0, \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}\right)$. Sea $d = d_2|_X$ la restricción de d_2 sobre X. Entonces

$$d(A,B) = a \quad \text{y} \quad d(A,C) = d(B,C) = b.$$

Por lo que (X,d) es un espacio ultramétrico. Por hipótesis f preserva la ultramétrica, así $f \circ d$ es una ultramétrica. Esto implica que,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(d(A,B)) = (f \circ d)(A,B) \\ &\leq max\{(f \circ d)(A,C), (f \circ d)(B,C)\} = f(b). \end{aligned}$$

Supongamos que f es creciente y flexible. Ahora, verificarémos que f preserva la ultramétrica. Sean (X,d) un espacio ultramétrico y $x, y, z \in X$. Como f es flexible, se sigue que, $(f \circ d)(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Dado que d es una ultramétrica, tenemos que,

$$d(x,z) \leq max\{d(x,y), d(y,z)\}.$$

De aqui que,

$$d(x,z) \leq d(x,y) \quad \text{o} \quad d(x,z) \leq d(y,z).$$

Si sucediera el caso que, $d(x,z) \leq d(x,y)$, entonces

$$f(d(x,z)) \leq f(d(x,y)) \leq max\{(f \circ d)(x,y), (f \circ d)(y,z)\}.$$

Por otra parte, si fuera este el caso $d(x,z) \leq d(y,z)$, entonces

$$f(d(x,z)) \leq f(d(y,z)) \leq max\{(f \circ d)(x,y), (f \circ d)(y,z)\}.$$

En cualquier caso, tenemos que

$$(f \circ d)(x,z) \leq max\{(f \circ d)(x,y), (f \circ d)(y,z)\}.$$

Por la tanto, $(f \circ d)$ es una ultramétrica. Esto completa la prueba. □

Si sustituimos subaditividad por concavidad en la cita (Pongsriiam y Termwuttipong, 2014)[Corolario 10 inciso (i)] obtenemos algo relevante

Corolario 4.10. *Sea* $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$*. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

(i) *Si* f *es concava y preserva la ultramétrica, entonces* f *preserva la métrica;*

(ii) *Si* f *es creciente en* $[0,\infty)$ *y preserva la métrica, entonces* f *preserva la ultramétrica*

Demostración. (i) Supongamos que f es concava y $f \in \mathcal{U}$, entonces por el Teorema 4.9, f es creciente y flexible. Ahora, por el Lema 2.6, f preserva la métrica.

(ii) Supongamos que f es creciente en el semirrayo $[0,\infty)$ y $f \in \mathcal{M}$, entonces por la Nota 2.2, f es flexible. Ahora, por Teorema 4.9, $f \in \mathcal{U}$. □

En la referencia (Khemaratchatakumthorn y Pongsriiam, 2019) se demuestra lo siguiente:

Teorema 4.11. *Supongamos que* X *es un conjunto no vacío y* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *es una función. Entonces* d *es una b–métrica si, y sólo si,* d *es una ultramétrica débil.*

Nótese que, por el Ejemplo 3.6 y el Teorema 4.11, se desprende que, todo espacio ultramétrico débil no implica que sea métrico.

Algunos resultados importantes sobre funciones que preservan la ultramétrica débil. Entre estos, se encuentra el siguiente Teorema principal ver (Martínez, 2022)[página 53 Teorema 4.5] y sus Corolarios. El crédito de este resultado se los dimos a (Khemaratchatakumthorn y Pongsriiam, 2019), ya que, como vimos este se desprendia directamente del Teorema 4.11 dado por ellos. Agregamos aquí la prueba con el fín de hacer completa la exposición del tema.

Teorema 4.12. $\mathcal{B} = \mathcal{UD}$.

Demostración. El Teorema 4.11 implica las siguientes equivalencias. Tenemos que, $f \in \mathcal{B}$ si y sólo si, para cada espacio b–métrico (X, d), se tiene que, $f \circ d$ es una b–métrica si y sólo si, para cualquier espacio ultramétrico débil (X, d), se tiene que, $f \circ d$ es una ultramétrica débil si y sólo si $f \in \mathcal{UD}$. □

La siguiente proposición es de utilidad para demostrar el Teorema 5.1.

Proposición 4.13. *Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ flexible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $f \in \mathcal{UD}$,

(ii) $f \in \mathcal{B}$,

(iii) $f \in \mathcal{MB}$,

(iv) *Existe $s \geq 1$ tal que $(f(a), f(b), f(c)) \in \triangle_s$ para cada $(a, b, c) \in \triangle$.*

Demostración. Se sigue del Corolario 3.17 y el Teorema 4.12. □

La Proposición 4.13 es muy importante, ya que, cualquier resultado sobre el conjunto de funciones que preservan la métrica–b–métrica es en automático cierto para las b–métricas, y esta a su vez para ultramétricas débiles y viceversa. En particular, una función preserva la ultramétrica débil si y solamente si preserva la b–métrica si y solamente si preserva la métrica–b–métrica. Caracterizaciones ya conocidas de la clase $\mathcal{MB}$ de funciones que preservan la métrica-b–métrica corresponden en automático a las funciones en la clase $\mathcal{UD}$. Porque de hecho $\mathcal{MB} = \mathcal{UD}$. Por ejemplo, los siguiente Corolarios son evidencias de lo comentado anteriormente.

Al igual que en la Nota 4.8, tenemos algo similar para el conjunto $\mathcal{UD}$.

Corolario 4.14. *Si $f \in \mathcal{UD}$, entonces f es flexible y casi-subaditiva.*

Demostración. Si $f \in \mathcal{UD}$, entonces por la Proposición 4.13, $f \in \mathcal{B}$ y esta a su vez $f \in \mathcal{MB}$. Ahora, por Teorema 3.16, f es flexible y casi-subaditiva. □

Con la ayuda de la Proposición 4.13, la conclusión del Teorema 3.15 se modifica al sustituir la familia $\mathcal{MB}$ por $\mathcal{UD}$.

Corolario 4.15. *Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Si f es flexible, casi-subaditiva, y creciente, entonces $f \in \mathcal{UD}$.*

Demostración. Supongamos que f es flexible, casi-subaditiva, y creciente, entonces por el Teorema 3.15, $f \in \mathcal{MB}$. Ahora por la Proposición 4.13, $f \in \mathcal{UD}$. □

De estos hechos se desprende la siguiente caracterización.

Corolario 4.16. *Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función concava. Tenemos que, $f \in \mathcal{UD}$ si y sólo si f es flexible, subaditiva y creciente.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{UD}$, entonces por el Corolario 4.14, f es flexible y casi-subaditiva. Pero, la concavidad y flexibilidad implican que f es subaditiva y creciente véase la Nota 2.2.

Ahora, supongamos que, f es flexible, subaditiva, y creciente. Dado que, subaditividad implica casi-subaditividad, ver Nota 2.3, entonces por el Corolario 4.15, $f \in \mathcal{UD}$. □

Recordemos que, en la referencia (Martínez, 2022)[Contraejemplo 4.16] se verificó que, $\mathcal{U} \neq \mathcal{UD}$ y, esto implicó que $\mathcal{U} \neq \mathcal{B}$.

Contraejemplo 4.17. En el Contraejemplo 4.16 dado en (Martínez, 2022), verificamos que, la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x > 1. \end{cases} \tag{2}$$

es flexible y no creciente. Así, por el Teorema 4.9, f no es elemento de la familia $\mathcal{U}$. Sin embargo, si lo es de $\mathcal{UD}$, es decir, $f \in \mathcal{UD} \setminus \mathcal{U}$. Por los Teoremas 3.12 y 4.12, obtuvimos que $\mathcal{UD} = \mathcal{B} \subseteq \mathcal{BE}$. De aquí que, $f \in \mathcal{BE} \setminus \mathcal{U}$. En otras palabras, esto significa que, $\mathcal{BE} \nsubseteq \mathcal{U}$. También, si denotamos por d la métrica usual sobre $\mathbb{R}$, entonces

$$(f \circ d)\Big(\frac{2}{3}, 2\Big) + (f \circ d)\Big(1, \frac{2}{3}\Big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1 = f(1) = (f \circ d)(1, 2).$$

Así, $f \circ d$ no es una métrica y esto implica que, $f \notin \mathcal{M}$. Esto verifica que, $\mathcal{UD} \nsubseteq \mathcal{M}$.

A continuación mostramos las conexiones de las familias ya conocidas ver los Teoremas 3.10 y 4.7 con el conjunto $\mathcal{DU}$.

Observación 4.18.

1 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{UD} \subseteq \mathcal{BE}$, $\mathcal{UD} \nsubseteq \mathcal{M}$.

2 $\mathcal{U} \neq \mathcal{M}$, $\mathcal{U} \neq \mathcal{BE}$ y $\mathcal{U} \neq \mathcal{UD}$.

5. Gráfica de los elementos en la clase $\mathcal{B}$

Para finalizar con esta sección, vimos que, con los Teoremas 3.10 y 4.12, las familias $\mathcal{MB}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{UD}$ son iguales. En este último teorema, verificaremos que, si f pertenece a una de ellas, por ejemplo $\mathcal{B}$, $lim_{x \to 0^+} f(x) = a$ y $f(x) = a$ para todo $x \in (0, b]$, entonces la gráfica de la función f está contenida en la región propuesta por J. Dobos y Z. Piotrowski (Dobous, 1997) ver Figura 1.

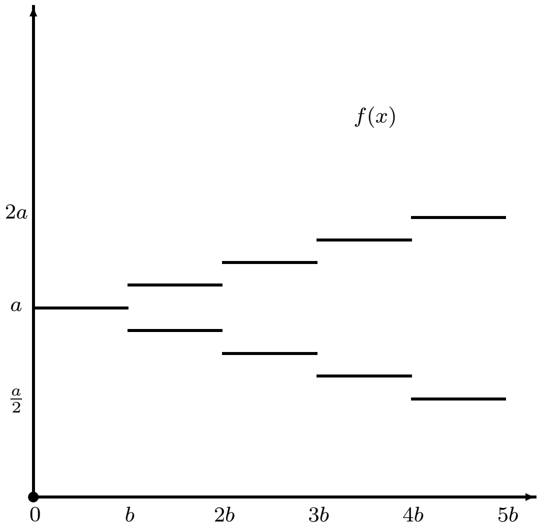

Figura 1: Región.

Teorema 5.1. *Suponga que $f \in \mathcal{B}$, $lim_{x\to 0^+} f(x) = a$ y $f(x) = a$ para todo $x \in (0, b]$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in (nb, (n+1)b]$,*

$$\tfrac{a}{2} \leq f(x) \leq 2^n a.$$

Demostración. Dadas las hipótesis, verificaremos que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in (nb, (n+1)b]$, se tiene que,

$$\tfrac{a}{2} \leq f(x) \leq 2^n a.$$

Para hacerlo, vamos aplicar el principio de inducción matemática. Para $n = 1$, examinaremos que las desigualdades siguientes se satisfacen

$$\tfrac{a}{2} \leq f(x) \leq 2a \text{ para todo } x \in (b, 2b].$$

Veamos la primer desigualdad

$$\tfrac{a}{2} \leq f(x) \text{ para todo } x \in (b, 2b].$$

Supongamos lo contrario, es decir, existe una $x \in (b, 2b]$ tal que $f(x) < \frac{a}{2}$. Sea $z \in (0, b]$. Tenemos que (x, x, z) es una tripleta triángular, mientras $(f(x), f(x), f(z))$ no lo es, ya que

$$f(x) + f(x) < \tfrac{a}{2} + \tfrac{a}{2} = a = f(z).$$

Esto es, para cada $s \geq 1$, existe una tripleta $(x, x, z) \in \triangle$ tal que

$$f(z) \nleq s(f(x) + f(x)).$$

Entonces por la Proposición 4.13, f no preserva la b-métrica, lo que contradice la hipótesis.

Vemos la otra desigualdad

$$f(x) \leq 2a \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in (b, 2b].$$

Nuevamente suponga que, existe $x \in (b, 2b]$ tal que $f(x) > 2a$. Tenemos que $(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, x)$ es una tripleta triángular, sin embargo

$$(f(\tfrac{x}{2}), f(\tfrac{x}{2}), f(x))$$

no lo es, ya que

$$f(\tfrac{x}{2}) + f(\tfrac{x}{2}) = a + a = 2a < f(x).$$

Es decir, para cada $s \geq 1$ existe una tripleta $(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, x) \in \Delta$ tal que

$$f(x) \nleq s\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big).$$

Entonces por la Proposición 4.13, f no preserva la b-métrica, lo que contradice la hipótesis.

Asumamos que, para $n = k$ la desigualdad se satisface,

$$f(x) \leq 2^k a, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in (kb, (k+1)b].$$

Vamos a verificar que, para $n = k + 1$ también se satisface,

$$f(x) \leq 2^{k+1} a, \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad x \in ((k+1)b, (k+2)b].$$

Suponga que, existe un elemento $x \in ((k+1)b, (k+2)b]$ tal que $f(x) > 2^{k+1} a$.

Nótese que $(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, x)$ es una tripleta triángular y $\big(f\big(\frac{x}{2}\big), f\big(\frac{x}{2}\big), f(x)\big)$ no lo es, ya que, por la hipótesis inductiva

$$f\Big(\tfrac{x}{2}\Big) + f\Big(\tfrac{x}{2}\Big) \leq 2^k a + 2^k a = 2(2^k a) = 2^{k+1} a < f(x).$$

En otras palabras, para cada escalar $s \geq 1$ existe una tripleta $(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, x) \in \Delta$ tal que

$$f(x) \nleq s\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big).$$

Entonces por la Proposición 4.13, f no preserva la b-métrica, lo que contradice a la hipótesis. $\square$

Observe que, si en el Teorema 5.1 sustituimos el intervalo $(0, b]$ por $(0, 1]$ obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.2. *Si $f \in \mathcal{B}$, $lim_{x\to 0^+} f(x) = a$ y $f(x) = a$ para cada $x \in (0, 1]$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in (n, (n+1)]$, obtenemos que $\frac{a}{2} \leq f(x) \leq 2^n a$.*

6. Conclusiones

Ahora, mencionamos lo que a nuestro juicio son los aportes de este trabajo: hemos proporcionado algunas equivalencias para el espacio de funciones que preservan la ultramétrica débil $\mathcal{UD}$, y este hecho como vimos implico que, la gráfica de toda función que pertenece al conjunto $\mathcal{UD}$, se encuentra en la región ´propuesta por J. Dobous y Z. Piotrowski. Ademas, la importancia de estas caracterizaciones radica que, cualquier resultado sobre el conjunto de funciones que preservan la métrica–b–métrica es en automático cierto para las ultramétricas débiles y viceversa. Por ejemplo, sus Corolarios son evidencias de lo comentado antes. Anexamos algunos ejemplos para justificar que, las definiciones de espacio b–métrico extendido, b–métrico y métrico no son equivalentes. Tampoco lo son, los espacios métrico, ultramétrico y ultramétrico débil.

Para ser mas precisos puntualizamos:

(i) Los Ejemplos 3.4, 3.6, 4.4 y 4.5.

(ii) La Nota 3.14.

(iii) La Proposición 4.13 y sus respectivos corolarios.

(iv) Teorema 5.1 y su Corolario.

(v) La Observación 4.18.

Comentamos al lector que, en un trabajo a futuro, aplicarémos estos conceptos que hemos desarrollado en estos dos últimos trabajos de investigación, a saber (Martínez, 2022), y este último para su posible publicación. El formalismo matemático adecuado para modelar el código genético y la secuencia de ADN, es el análisis p-ádico; dentro del cual el concepto de ultramétrica es fundamental. El código genético puede ser considerado como un diccionario entre dos lenguajes, es decir, traduce un lenguaje de 4 letras, a saber, los nucleótidos: Citosina (C), Adenina (A), Tiamina (T) y Guanina (G) en otro lenguaje de 20 letras, los aminoácidos. De esos cuatro nucleótidos, 64 palabras de 3-letras (los llamados *codones*) son formadas; mientras que miles de palabras multi-letras (conocidas como *proteínas*) son construidas de 20-aminoácidos. La propiedad de que algunos aminoácidos son codificados por más de un codon es llamada la *degeneración* del código genético. Se sabe que la degeneración del Código Genético tiene una estructura ultramétrica p-ádica.

Pregunta. ¿Será posible trasladar el análisis p-ádico a un espacio ultramétrico débil?

Agradecimientos

Los autores damos las gracias a los árbitros por la revisión exhaustiva y las sugerencias a nuestro trabajo. Ellos han contribuido a que esta investigación sea una realidad.

Referencias

Bakhtin, I. A. (1989). The contraction mapping principle in almost metric space. *Functional Analysis*, 30:26–37.

Corazza, P. (1999). Introduction to metric-preserving functions. *The American Mathematical Monthly*, 106(4):309–323.

Dobous, J. (1997). When distance mean money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 28(4):513–518.

Dobous, J. (1998). *Metric Preserving Functions*. Online Lecture Notes available at http://web,science.upjs.sk/jozefdobos/wp-content/uploads/2012/03/mpf1.pdf.

Kamran, T., Samreen, M., y UL Ain, Q. (2017). A generalization of b–metric space and some fixed point theorems. *Mathematics*, 5(2):1–7.

Khemaratchatakumthorn, T. y Pongsriiam, P. (2018). Remarks on b–metric and metric-preserving functions. *Mathematica Slovaca*, 68(5):1009–1016.

Khemaratchatakumthorn, T. y Pongsriiam, P. (2019). Further remarks on b–metrics, metric-preserving functions, and other related metrics. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(2):473–480.

Martínez, C. R. y Hernández, P. E. (2022). Funciones que preservan la b–metŕica extendida y otras métricas relacionadas. *Padi Boletín Cientifico De Ciencias Básicas de Ingeniería Del ICBI, Publicación Semestral*, 9:47–55.

P. Fraigniaud, E. Lebhar, L. V. (2008). The inframetric model for the internet. *IEEE INFOCOM-The 27th Conference on Computer Communications Societies*, pp. 13–18.

Pongsriiam, P. y Termwuttipong, I. (2014). Remarks on ultrametrics y metric-preserving functions. *Abstract and Applied Analysis*, 2014:1–9.

Siegfried, B., Guntzer, U., y Remmert, R. (1984). *Non-Archimedean Analysis*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer.

Yurova, E. (2013). On ergodicity of p-adic dynamical systems for arbitrary prime p. *P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications*, pp. 239–241.