

# Control de formación con evasión de colisiones en agentes de primer y segundo orden

## Formation control with collision avoidance for first and second order agents

J. Castillo-Aparicio <sup>a</sup>, A. Z. Vega-Arroyo <sup>a</sup>, J. González-Sierra <sup>a,\*</sup>, Y. Lozano-Hernández <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo, Instituto Politécnico Nacional, Carretera Pachuca—Actopan Kilómetro 1+500, Distrito de Educación, Salud, Ciencia, Tecnología e Innovación, San Agustín Tlaxiaca 42162, Hidalgo, México.

### Resumen

Este artículo aborda el problema de control de formación con evasión de colisiones para un sistema multi-agente conformado por un agente de primer orden y un agente de segundo orden. La estrategia de control se basa en el enfoque de funciones saturadas para lograr la formación deseada y el enfoque de Campos Vectoriales Repulsivos (CVR) que permiten la evasión de colisiones. Debido a la naturaleza del agente de segundo orden, éste puede continuar su movimiento a pesar de haber alcanzado la formación deseada, por lo tanto, para evitar este inconveniente, se agrega un tercer agente como referencia con nula dinámica. Se demuestra que si existe un árbol de expansión dirigido con nodo raíz en el tercer agente, los errores de posición y velocidad convergen a cero. Además, se asume que las variables de posición, velocidad y aceleración se pueden medir. Se presentan simulaciones numéricas para evaluar el desempeño de los agentes utilizando diferentes gráficas de formación.

**Palabras Clave:** Control de formación, Evasión de colisiones, Agentes de primer y segundo orden.

### Abstract

This article addresses the formation control problem with collision avoidance for a multi-agent system conformed by a first-order and second-order agent. The control strategy is based on the saturation functions approach to achieve the desired formation and the Repulsive Vector Fields (RVF) methodology that allows for avoiding collisions. Due to the nature of the second-order agent, it can continue its motion despite reaching the desired formation; therefore, to avoid this inconvenience, a third agent is added as a reference with null dynamics. It is shown that if there is a directed spanning tree with a root node in the third agent, the position and velocity errors converge to zero. Furthermore, it is assumed that position, velocity, and acceleration variables can be measured. Numerical simulations are presented to evaluate the performance of agents using different formation graphs.

**Keywords:** Formation control, Collision avoidance, First-order and second-order agents.

## 1. Introducción

El control de formación es un área de investigación de los sistemas multi-agente. Esta área tiene como objetivo que un grupo de agentes (por ejemplo robots móviles terrestres, aéreos, acuáticos, o una combinación de ellos) se alineen para formar un patrón geométrico deseado donde cada agente corresponde con el vértice de esa figura geométrica. A lo largo de los años, los investigadores han desarrollado diferentes estrategias de control para la formación de los agentes.

Un aspecto importante que hay que considerar al momento de realizar la formación de los agentes es que existe un ries-

go considerable de que los agentes colisionen durante su movimiento. En ese sentido, surge la necesidad de desarrollar algoritmos que ayuden a los agentes a realizar maniobras de evasión. Una de las contribuciones más antiguas en el área de evasión de colisiones, es el trabajo de Khatib reportado en (Khatib, 1985). En este trabajo se propone añadir una ley de control reactiva basada en el gradiente negativo de una función potencial artificial y el cual se activa cuando hay riesgo de colisión. Este enfoque dominó el área por años, sin embargo, presentaba un importante inconveniente: la ley de control reactiva puede anular la ley de control de movimiento y, por lo tanto, los ro-

\* Autor para correspondencia: [jagonzalezsi@ipn.mx](mailto:jagonzalezsi@ipn.mx)

**Correo electrónico:** [jcastilloa2003@alumno.ipn.mx](mailto:jcastilloa2003@alumno.ipn.mx) (Julio Castillo-Aparicio), [avegae1902@alumno.ipn.mx](mailto:avegae1902@alumno.ipn.mx) (Alondra Zutelly Vega-Arroyo), [jagonzalezsi@ipn.mx](mailto:jagonzalezsi@ipn.mx) (Jaime González-Sierra), [ylozanoh@ipn.mx](mailto:ylozanoh@ipn.mx) (Yair Lozano-Hernández).

**Historial del manuscrito:** recibido el 27/06/2023, última versión-revisada recibida el 22/08/2023, aceptado el 10/08/2023, publicado el 30/11/2023. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial4.11332>



bots podrían quedarse atascados en un punto de equilibrio no deseado. Desde entonces, se han propuesto diversas soluciones para superar este problema, incluido el enfoque de planeación de movimiento (Polvara *et al.*, 2018; Smith *et al.*, 2014), uso de algoritmos basados en inteligencia artificial (Meyer *et al.*, 2020; Sui *et al.*, 2021; Woo y Kim, 2020; Yang *et al.*, 2021), funciones potenciales repulsivas (Ajwad *et al.*, 2021; Liu *et al.*, 2022b) y algoritmos bio-inspirados (Na *et al.*, 2022), entre otros.

Algunos trabajos que han abordado la evasión de colisiones para agentes de primer orden se pueden encontrar en (Dou *et al.*, 2021; Gnanasekera y Katupitiya, 2022; Hu *et al.*, 2020; Kufoalor *et al.*, 2019; Mao y Dai, 2021; Panagou, 2014; Raj *et al.*, 2020; Sakai *et al.*, 2018; Seung-Mok y Hyun, 2015; Vargas *et al.*, 2022), donde diferentes técnicas fueron diseñadas, desarrolladas e implementadas en simulaciones numéricas o experimentos en tiempo real. Por otra parte, algunos trabajos que abordan el problema de evasión de colisiones en agentes de segundo orden están reportados en (Dang *et al.*, 2019; Huang *et al.*, 2019; Li y Wang, 2013; Liu *et al.*, 2022a; Park y Yoo, 2021; Yasin *et al.*, 2020; Yoo y Kim, 2015; Yoo y Park, 2019).

Un enfoque que ha tenido auge en los últimos años debido a que tiene una base matemática sólida (a diferencia de los enfoques basados en inteligencia artificial), son los Campos Vectoriales Repulsivos (CVR). Esta técnica consiste en añadir un foco inestable que gira en sentido contrario a las manecillas del reloj y que está centrado en la posición de cada uno de los agentes. Cuando los agentes se encuentran a una distancia predefinida, los CVR se encienden para realizar la maniobra de evasión, y, cuando la distancia entre ellos es mayor, los CVR se apagan. En ese sentido, algunos trabajos que han utilizado los CVR para la evasión de colisiones en agentes de primer orden son (Flores-Resendiz *et al.*, 2015; Flores-Resendiz y Aranda-Bricaire, 2020; González-Sierra *et al.*, 2023; Hernandez-Martinez y Aranda-Bricaire, 2013; Santiaguillo-Salinas y Aranda-Bricaire, 2017) mientras que en (Aranda-Bricaire y González-Sierra, 2023; González-Sierra *et al.*, 2019; Flores-Resendiz *et al.*, 2023) se han utilizado para la evasión de colisiones en agentes de segundo orden.

Aunque la literatura relacionada con la prevención de colisiones es amplia (Huang *et al.*, 2019), mínimos son los trabajos que resuelven el problema de evasión de colisiones en sistemas multi-agente heterogéneos, concretamente en sistemas formados por agentes de primer y segundo orden.

Con base en lo anterior, el objetivo de este trabajo consiste en abordar el problema de control de formación con evasión de colisiones para un sistema multi-agente heterogéneo formado por un agente de primer orden y un agente de segundo orden. Además, debido a la naturaleza del agente de segundo orden, éste puede continuar su movimiento a pesar de haber alcanzado la formación deseada, por lo tanto, para evitar este inconveniente, se agrega un tercer agente como referencia con nula dinámica. Se demuestra que si existe un árbol de expansión dirigido con nodo raíz en este tercer agente, los errores de posición y velocidad convergen a cero.

El contenido de este artículo es el siguiente. Los preliminares matemáticos y el planteamiento del problema se describen en la Sección 2. Por otra parte, la Sección 3 está dedicada a presentar los algoritmos de control para lograr la formación y para la evasión de colisiones mientras que la Sección 4 ilustra el

comportamiento de los agentes, ante diferentes tipos de gráficas de formación, por medio de simulaciones numéricas. Finalmente, en la Sección 5 se presentan algunas conclusiones y trabajo futuro.

## 2. Planteamiento del problema

Sea  $N = \{R_1, R_2\}$  un conjunto compuesto de dos agentes que se mueven en el plano y cuyas posiciones están dadas por  $\mathbf{z}_i = [x_i \ y_i]^\top \in \mathbb{R}^2$ , para  $i = 1, 2$ . El agente  $R_1$  se modela como un agente de primer orden, cuyo modelo está dado por

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{v}_1, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{v}_1 = [v_{1x} \ v_{1y}]^\top \in \mathbb{R}^2$  es la velocidad en el eje  $X$  y en el eje  $Y$ , respectivamente, y corresponden a las entradas de control. Por otra parte, el agente  $R_2$  se modela como un agente de segundo orden, cuyo modelo está dado por

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{v}_2, \quad \dot{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{u}_2, \quad (2)$$

donde  $\mathbf{u}_2 = [u_{2x} \ u_{2y}]^\top \in \mathbb{R}^2$  corresponde a la aceleración lineal en el eje  $X$  y eje  $Y$ , respectivamente, y corresponden a las entradas de control.

**Definición 1.** Una gráfica de formación  $\mathcal{G}$  (Godsil y Royle, 2001; Ren y Beard, 2008) permite describir la comunicación entre los agentes. Dicha gráfica consiste de tres elementos, es decir,  $\mathcal{G} = \{N, E, C\}$ , los cuales, se describen a continuación:

1. Un conjunto de vértices (o nodos)  $N$  donde cada nodo representa a cada uno de los agentes.
2. Un conjunto de aristas  $E = \{(R_j, R_i) \in N \times N, j \neq i\}$ , que denotan que el agente  $R_i$  recibe información de  $R_j$ .
3. Un conjunto de etiquetas  $C = \{\mathbf{c}_{ji} \in \mathbb{R}^2 \mid (R_j, R_i) \in N \times N, j \neq i\}$ , donde  $\mathbf{c}_{ji}$  es un vector que especifica la posición relativa del agente entre los agentes  $R_j$  y  $R_i$ .

**Definición 2.** Dada una gráfica de formación  $\mathcal{G}$ , la matriz asociada a  $\mathcal{G}$  se conoce como matriz Laplaciana (Godsil y Royle, 2001; Ren y Beard, 2008) y está dada por

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \Delta - \mathcal{A}_d,$$

donde  $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta = \text{diag}\{n_1, \dots, n_n\}$  es la matriz de grados,  $n_i = \text{card}\{N_i\}$ , con  $N_i \subset N$  un subconjunto que contiene información de aquellos agentes que pueden ser detectados por  $R_i$ , y  $\mathcal{A}_d$  es la matriz de adyacencia de  $\mathcal{G}$  y está definida como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (R_j, R_i) \in E,$$

**Definición 3.** Dadas dos constantes positivas  $M_1, M_2$  con  $M_1 \leq M_2$ , la función  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es una saturación lineal (Teel, 1992) para  $(M_1, M_2)$  si es una función no decreciente, continua, y que satisface lo siguiente:

1.  $x\sigma(x) > 0$ , para todo  $x \neq 0$ ,
2.  $\sigma(x) = x$  cuando  $|x| \leq M_1$ ,
3.  $|\sigma(x)| \leq M_2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Por otra parte, se considera agregar un tercer agente denotado por  $R_L$  (agente líder) con posiciones dadas por  $\mathbf{z}_L = [x_L \ y_L]^\top \in \mathbb{R}^2$  y cuya dinámica es cero.

**Comentario 1.** En este trabajo se asume que el agente  $R_L$  sólo sirve para que la velocidad de los agentes  $R_1$  y  $R_2$  converjan a cero. Además, la comunicación entre  $R_L$  y  $R_1$  y  $R_2$  es dirigida, es decir, la información de  $R_L$  fluye hacia  $R_1$  y  $R_2$ . Por otra parte, la comunicación entre  $R_1$  y  $R_2$  puede ser dirigida, no dirigida o que no exista comunicación entre ellos.

El problema de interés consiste en implementar una estrategia de control tal que

- El sistema compuesto por el agente de primer orden y el agente de segundo orden realicen una maniobra de evasión cuando están en peligro de colisión,

$$\|\mathbf{z}_1(t) - \mathbf{z}_2(t)\| > d,$$

donde  $d$  es la distancia de seguridad.

- Los agentes logran posicionarse en un patrón geométrico predefinido,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i^*) = 0, \quad i = 1, 2,$$

donde la posición deseada de cada agente se define como

$$\mathbf{z}_i^* = \frac{1}{n_i} \sum_{k \in N_i} (\mathbf{z}_i + \mathbf{c}_{ki}), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

El error de posición, se define como  $\tilde{\mathbf{z}}_i = n_i(\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_i^*)$ , entonces, de manera matricial, se tiene que

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathcal{L} \otimes I_2) \mathbf{z} - \boldsymbol{\chi}_L - \mathbf{c}, \quad (4)$$

donde  $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^\top \quad \mathbf{z}_2^\top]^\top \in \mathbb{R}^4$ ,  $\boldsymbol{\chi}_L = [\mathbf{z}_L^\top \quad \mathbf{z}_L^\top]^\top$ ,  $\otimes$  denota el producto Kronecker (Graham, 1981),  $I_2$  es una matriz identidad de  $2 \times 2$ , y

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \sum_{k \in N_1} \mathbf{c}_{k1} \\ \sum_{k \in N_2} \mathbf{c}_{k2} \end{bmatrix},$$

es un vector que contiene los vectores de formación.

### 3. Algoritmos de control

En esta sección se presentan las estrategias de control que se utilizan para la formación con no colisión del sistema. En primera instancia se definen los CVR y, posteriormente, se diseña el control para el agente de primer y de segundo orden.

#### 3.1. Campos vectoriales repulsivos

Para la evasión de colisiones, se consideran las siguientes suposiciones:

**Suposición 1.** La magnitud de los vectores de formación es mayor que la distancia de sensado  $D$  y que la distancia de seguridad  $d$ , es decir,  $\|\mathbf{c}_{ij}\| > D > d, \forall i \neq j$ . En ese sentido, la posición deseada de cada agente no entra en conflicto con la distancia de sensado.

**Suposición 2.** Las condiciones iniciales de cada agente satisfacen  $\|\mathbf{z}_i(0) - \mathbf{z}_j(0)\| > D, \forall i \neq j$ . Por lo tanto, las condiciones iniciales de los agentes se localizan fuera de la distancia de sensado.

Para lograr la correcta evasión de colisiones entre los agentes, se utiliza el enfoque de los CVR. Esta técnica considera que existe un foco inestable centrado en la posición de otro agente u obstáculo. El principal objetivo consiste en activar los CVR cuando los agentes se encuentren a una distancia predeterminada entre ellos y que se desactiven cuando se encuentren lo suficientemente lejos para no colisionar. Los CVR se definen como

$$\beta_i = -\epsilon_i \sum_{j \in \mathcal{M}_i} \psi_{ij}(d_{ij}) \begin{bmatrix} (x_j - x_i) - (y_j - y_i) \\ (x_j - x_i) + (y_j - y_i) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

donde el parámetro  $\epsilon_i > 0$  es una constante de proporcionalidad la cual aumenta o disminuye los CVR;  $\mathcal{M}_i$  es un conjunto compuesto por todos aquellos agentes que están en peligro de colisión con el agente  $R_i$ , es decir,

$$\mathcal{M}_i = \{R_j \in N \mid \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\| \leq D\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

con  $D$  como la distancia de sensado;  $\psi_{ij}(\cdot)$  es una función suave que activa y desactiva los CVR en función de la distancia entre los agentes. Esta función satisface que  $\psi_{ij}(d_{ij}) = 1$  para  $d_{ij} < d$  y  $\psi_{ij}(d_{ij}) = 0$  para  $d_{ij} > D$ ; y  $d_{ij} = \|\mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j\|$  es la distancia entre el agente  $R_i$  y el agente  $R_j$ .

#### 3.2. Control de formación con no colisión

Para el diseño de la ley de control para el agente de primer orden, se obtiene la dinámica del error, la cual está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 = n_1 \mathbf{v}_1 - \sum_{k \in N_1} \mathbf{v}_k, \quad (6)$$

Con base en (6), la ley de control para  $R_1$  se define como

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sum_{k \in N_1} \mathbf{v}_k + \phi(\tilde{\mathbf{z}}_1) + \beta_1}{n_1}. \quad (7)$$

con  $\phi(\tilde{\mathbf{z}}_1) = -\mu \tanh(\tilde{\mathbf{z}}_1)$  y  $\mu > 0$ . Note que la ley de control (7) consta de tres partes: a) la compensación de la velocidad; b) la parte de atracción  $\phi(\tilde{\mathbf{z}}_1)$  que permite la formación al patrón geométrico deseado y c) la parte de repulsión  $\beta_1$  para la evasión de colisiones.

**Comentario 2.** La estrategia de control (7) se basa en las estrategias de control reportadas en (González-Sierra et al., 2023; Flores-Resendiz et al., 2015; Flores-Resendiz y Aranda-Bricaire, 2020). La diferencia radica en que en (7) se compensa la velocidad del agente  $R_k$ .

**Proposición 1.** Considere el sistema (6) en lazo cerrado con la ley de control (7), y asuma que se cumplan las Suposiciones 1 y 2, entonces, los errores de posición del agente  $R_1$  convergen de manera asintótica a cero, esto es,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}_1 = 0$ , logrando la convergencia al patrón geométrico deseado.

**Prueba 1.** Debido a que se consideran las Supocisiones 1 y 2, entonces, los agentes no están en riesgo de colisión y, por lo tanto, los CVR son cero, es decir,  $\beta_1 = 0$ . Sustituyendo (7) en (6), se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}_1 = -\mu \tanh(\tilde{\mathbf{z}}_1).$$

Debido a que se obtiene un sistema como en (Flores-Resendiz y Aranda-Bricaire, 2020), entonces, se concluye que los errores de posición del agente  $R_1$  convergen de manera asintótica a cero, logrando formar el patrón geométrico deseado.

Por otra parte, para la obtención de la estrategia de control para el agente  $R_2$ , se propone el siguiente cambio de coordenadas

$$\xi_1 = \eta \tilde{\mathbf{z}}_2 + \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_2, \quad (8a)$$

$$\xi_2 = \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_2, \quad (8b)$$

con  $\eta = 1[s^{-1}]$  como una constante que nos permite sumar el error de posición con el error de velocidad. La dinámica del sistema (8) está dada por

$$\dot{\xi}_1 = \eta \xi_2 + n_2 \mathbf{u}_2 - \sum_{k \in N_2} \mathbf{u}_k, \quad (9a)$$

$$\dot{\xi}_2 = n_2 \mathbf{u}_2 - \sum_{k \in N_2} \mathbf{u}_k. \quad (9b)$$

A partir del enfoque de saturaciones anidadas (Teel, 1992) y el sistema dado en (9), la estrategia de control se define como

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\sum_{k \in N_2} \mathbf{u}_k - \sigma_2(\eta \xi_2 + \sigma_1(\xi_1)) + \beta_2}{n_2}, \quad (10)$$

donde  $\sigma_i(\cdot)$ , para  $i = 1, 2$ , es un vector columna donde cada elemento es una función de saturación lineal (Definición 3) tal que cada elemento de dicho vector tiene una cota superior dada por  $M_i$ , con  $M_i$  constantes que satisfacen  $2M_1 < M_2$ . Note que la ley de control (10) también está constituida de tres elementos: a) la compensación de la aceleración; b) la parte de saturaciones anidadas para la convergencia al patrón geométrico deseado y c) la parte de repulsión  $\beta_2$  para la evasión de colisiones.

**Comentario 3.** La estrategia de control (10) se basa en la estrategia de control reportada en (Aranda-Bricaire y González-Sierra, 2023). La diferencia radica en que en (10) se compensa la aceleración del agente  $R_k$ .

**Proposición 2.** Considere el sistema (9) en lazo cerrado con la ley de control (10), y asuma que se cumplan las Supocisiones 1 y 2, entonces, los errores de posición y velocidad del agente  $R_2$  convergen de manera asintótica a cero, esto es,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_2 = 0$ , logrando la convergencia al patrón geométrico deseado.

**Prueba 2.** Debido a que se consideran las Supocisiones 1 y 2, entonces, los agentes no están en riesgo de colisión y, por lo

tanto, los CVR son cero, es decir,  $\beta_2 = 0$ . Sustituyendo (10) en (9), se obtiene el siguiente sistema

$$\dot{\xi}_1 = \eta \xi_2 - \sigma_2(\eta \xi_2 + \sigma_1(\xi_1)),$$

$$\dot{\xi}_2 = -\sigma_2(\eta \xi_2 + \sigma_1(\xi_1)).$$

De acuerdo al trabajo reportado en (Teel, 1992), después de algún tiempo finito, el argumento de cada función  $\sigma_k(\cdot)$  ha entrado a la región donde la función es lineal. Por lo tanto, después de ese tiempo finito, el sistema en lazo cerrado tiene la siguiente estructura

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_1,$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_2 - \xi_1.$$

Debido a que se obtiene un sistema como en (Aranda-Bricaire y González-Sierra, 2023; Teel, 1992), entonces, se concluye que los errores de posición y velocidad del agente  $R_2$  convergen de manera asintótica a cero, logrando formar el patrón geométrico deseado.

#### 4. Simulaciones numéricas

En este apartado se presentan 4 simulaciones numéricas considerando los distintos tipos de comunicación que se pueden presentar en el sistema con el objetivo de evaluar el correcto desempeño de las estrategias de control cuando los agentes están en peligro de colisión. En ese sentido, el objetivo en las simulaciones es que los agentes intercambien su posición. Para efectos de comparación se utiliza el enfoque propuesto en (Khatib, 1985), en donde se utilizan Funciones Potenciales Repulsivas (FPR), las cuales están definidas como

$$\beta_i^{FPR} = \psi_{ij}(d_{ij}) \frac{\epsilon_i}{d_{ij}^3} \left( \frac{1}{d_{ij}} - \frac{1}{D} \right) \begin{bmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{bmatrix}, i = 1, 2; i \neq j.$$

Las condiciones iniciales de los agentes son:  $\mathbf{z}_1(0) = [3 \ 0]^\top$ ,  $\mathbf{z}_2(0) = [-3 \ 0]^\top$  y  $\mathbf{z}_L(0) = [0 \ 0]^\top$ ; mientras que los vectores de formación están definidos como  $\mathbf{c}_{L2} = [2 \ 0]^\top$ ,  $\mathbf{c}_{L1} = -\mathbf{c}_{L2}$ ,  $\mathbf{c}_{12} = [4 \ 0]^\top$  y  $\mathbf{c}_{21} = -\mathbf{c}_{12}$ . Por otra parte, la distancia de sensado es  $D = 1[\text{m}]$ , la distancia de seguridad es  $d = 0.5[\text{m}]$  y la función  $\psi_{ij}(d_{ij})$  se define como

$$\psi_{ij}(d_{ij}) = \frac{1}{1 + e^{a(d_{ij}-b)}}, \quad (11)$$

donde  $a = 22$  y  $b = (D + d)/2$ . La Figura 1 ilustra las gráficas de formación utilizadas en las simulaciones numéricas. Es importante destacar que para todos los casos, siempre existe un árbol de expansión dirigido con nodo raíz en el agente líder  $R_L$ , además, de considerar agentes con un radio de  $0.2[\text{m}]$ . En todas las simulaciones, el patrón geométrico deseado es una línea horizontal con una longitud de  $4[\text{m}]$ .

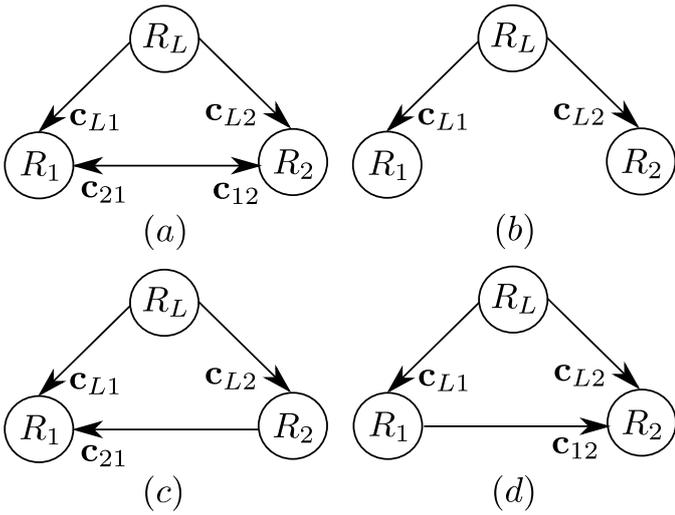


Figura 1: Gráficas de formación. (a) Primera simulación. (b) Segunda simulación. (c) Tercera simulación. (d) Cuarta simulación.

4.1. Simulación numérica 1

En esta simulación, se considera que  $N_1 = \{R_2, R_L\}$  y  $N_2 = \{R_1, R_L\}$  la cual corresponde a la gráfica de formación de la Figura 1(a), mientras que las cotas para las funciones de saturación se ajustaron en  $M_1 = 0.9$  y  $M_2 = 2$  y los parámetros para escalar los CVR se ajustaron como  $\epsilon_1 = 3$  y  $\epsilon_2 = 5$ . La Figura 2 representa el comportamiento de las agentes en diferentes instantes de tiempo. Hay que destacar que cuando los agentes se están acercando el uno al otro, los CVR suavemente se prenden y comienza la maniobra de evasión. Por otra parte, al utilizar las FPR, los agentes quedan atascados en un punto de equilibrio no deseado. Por lo tanto, al utilizar el enfoque de FPR, los agentes no logran posicionarse en el patrón geométrico deseado.

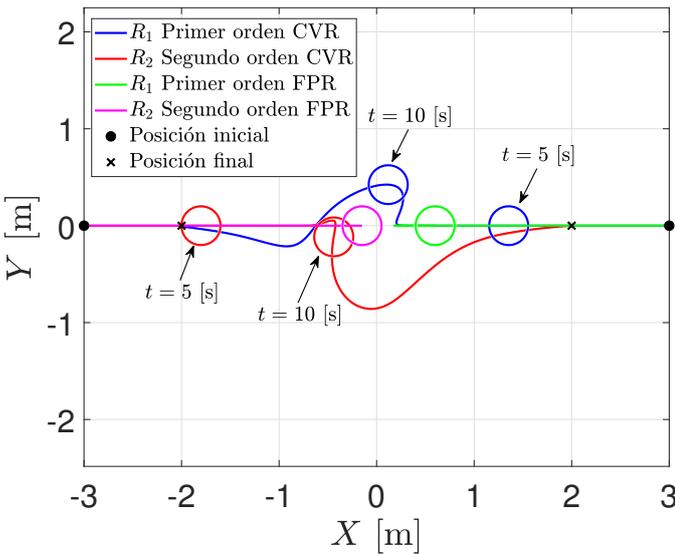


Figura 2: Trayectoria en el plano de los agentes para la primera simulación.

En la Figura 3 se aprecia que la distancia entre los agentes siempre es mayor a la distancia de seguridad.

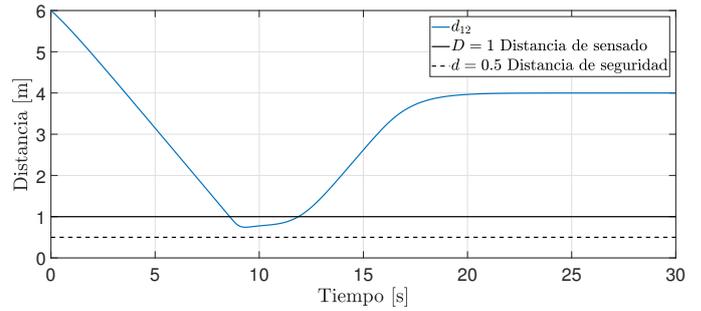
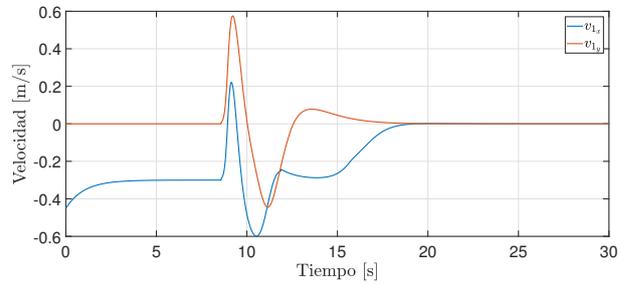
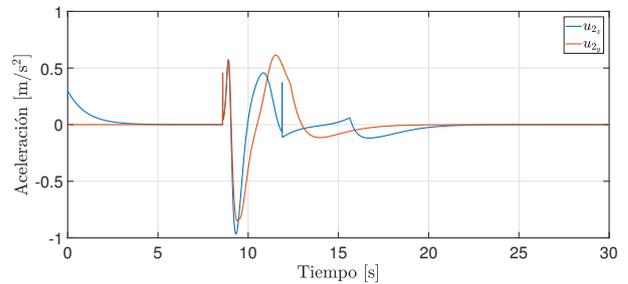


Figura 3: Distancia entre los agentes para la primera simulación.

La Figura 4 presenta las entradas de control correspondientes a las velocidades (Figura 4(a)) y a las aceleraciones (Figura 4(b)) de los agentes. Note que dichas entradas de control tienen una mayor amplitud cuando los agentes están en peligro de colisión.



(a) Entradas de control para el agente de primer orden.



(b) Entradas de control para el agente de segundo orden.

Figura 4: Entradas de control para la primera simulación.

4.2. Simulación numérica 2

En esta simulación, se considera que  $N_1 = N_2 = \{R_L\}$ , la cual corresponde a la gráfica de formación de la Figura 1(b). Las cotas de las funciones de saturación se ajustaron a los mismos valores que en la primera simulación mientras que los parámetros para escalar los CVR se ajustaron como  $\epsilon_1 = 2$  y  $\epsilon_2 = 3$ . Para realizar la comparación con las FPR, las condiciones iniciales se establecieron en  $z_1(0) = [3 \ 0.1]^T$  y  $z_2(0) = [-3 \ -0.1]^T$ . La Figura 5 presenta la trayectoria en el plano de ambos agentes en diferentes instantes de tiempo, donde, de nueva cuenta es evidente la maniobra de evasión cuando los agentes se aproximan a una cierta distancia entre ellos, utilizando ambos enfoques. Este comportamiento se muestra en el Figura 6 donde la distancia entre los agentes es mayor que la distancia de seguridad. Note que con el enfoque de FPR la distancia entre los agentes se “desliza” cuando existe

peligro de colisión mientras que al utilizar los CVR la maniobra de evasión se realiza en un menor tiempo.

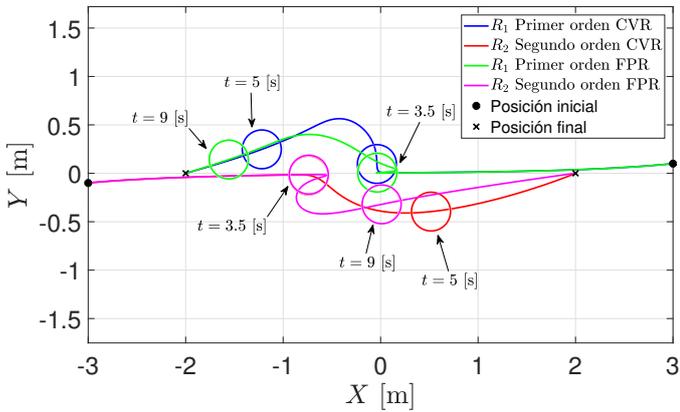


Figura 5: Trayectoria en el plano de los agentes para la segunda simulación.

Por otra parte, la Figura 7 representa una comparación de las entradas de control para el agente de primer orden (Figura 7(a)) y para el agente de segundo orden (Figura 7(b)), utilizando ambos enfoques. Note que las señales originadas por los CVR tienen mayor amplitud en comparación con las obtenidas por la FPR, lo que implica que con los CVR la maniobra de evasión se realiza de una manera más agresiva que al utilizar las FPR.

### 4.3. Simulación numérica 3

En esta simulación, se considera que  $N_1 = \{R_L\}$  y  $N_2 = \{R_1, R_L\}$ , la cual corresponde a la gráfica de formación de la Figura 1(c). Las cotas de las funciones de saturación se ajustaron en  $M_1 = 1.5$  y  $M_2 = 3.1$  mientras que los parámetros para escalar los CVR se ajustaron en  $\epsilon_1 = 1.5$ ,  $\epsilon_2 = 5$ . La Figura 8 muestra el comportamiento de los agentes en diferentes instantes de tiempo mientras que en la Figura 9 representa la distancia entre los agentes, la cual siempre es mayor a la distancia de seguridad, logrando la evasión de colisiones.

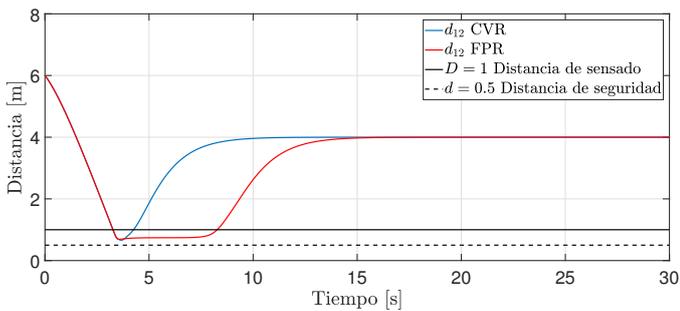
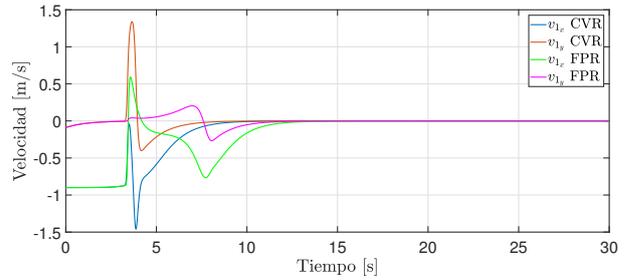
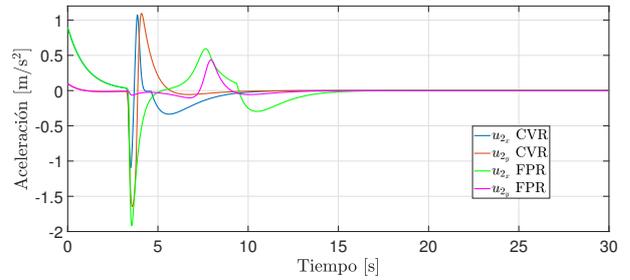


Figura 6: Distancia entre los agentes para la segunda simulación.



(a) Entradas de control para el agente de primer orden.



(b) Entradas de control para el agente de segundo orden.

Figura 7: Entradas de control para la segunda simulación.

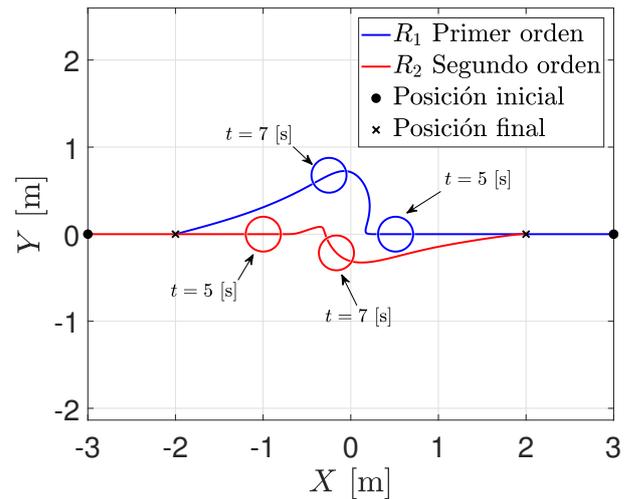


Figura 8: Trayectoria en el plano de los agentes para la tercera simulación.

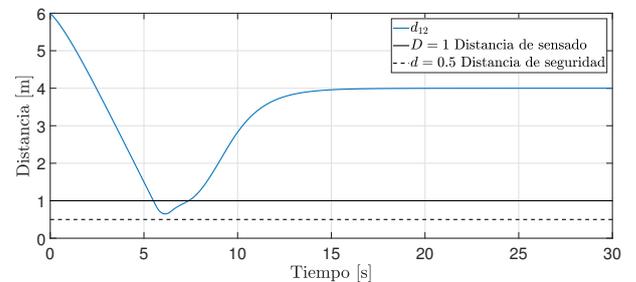
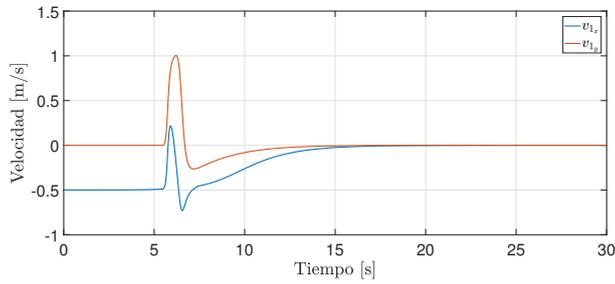


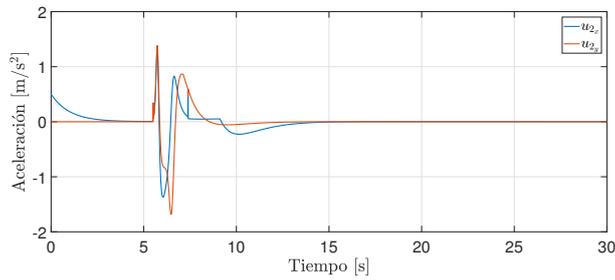
Figura 9: Distancia entre los agentes para la tercera simulación.

La Figura 10 presenta las entradas de control correspondientes a las velocidades (Figura 10(a)) y a las aceleraciones (Figura 10(b)) de los agentes. Al igual que en los casos anteriores, se puede visualizar que las entradas de control presentan

amplitudes mayores cuando los agentes están en riesgo de colisionar, y, posteriormente, convergen a cero debido a que los agentes lograron la formación deseada.



(a) Entradas de control para el agente de primer orden.



(b) Entradas de control para el agente de segundo orden.

Figura 10: Entradas de control para la tercera simulación.

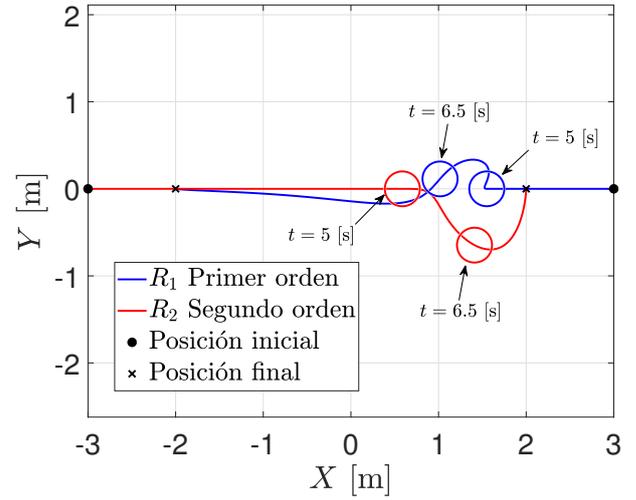


Figura 11: Trayectoria en el plano de los agentes para la cuarta simulación.

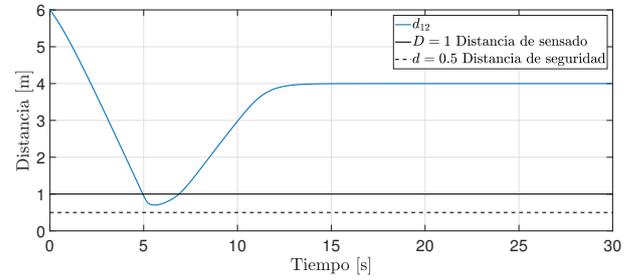
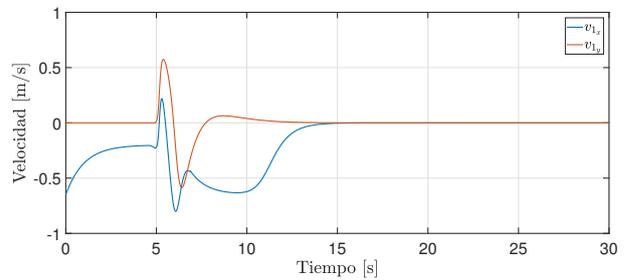


Figura 12: Distancia entre los agentes para la cuarta simulación.

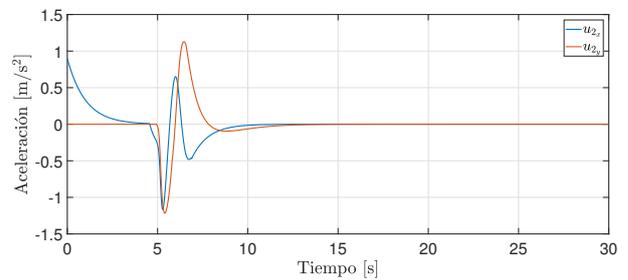
#### 4.4. Simulación numérica 4

En esta simulación, se considera que  $N_1 = \{R_2, R_L\}$  y  $N_2 = \{R_L\}$ , la cual corresponde a la gráfica de formación de la Figura 1(d). Las cotas de las funciones de saturación se ajustaron en  $M_1 = 0.9$  y  $M_2 = 2$  mientras que los parámetros para escalar los CVR se ajustaron en  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 3$ . En la Figura 11 se visualiza la trayectoria de los agentes en diferentes instantes de tiempo. Cuando la distancia entre ellos es menor o igual a la distancia de sensor, los CVR se prenden y comienza la maniobra de evasión. Posteriormente, cuando la distancia entre ellos es mayor a la distancia de sensor se continúa con el objetivo de lograr la formación deseada. A partir de la Figura 12 se concluye que los agentes no colisionan debido a que la distancia entre ellos siempre es mayor a la distancia de seguridad.

Finalmente, las entradas de control se presentan en la Figura 13, concretamente las velocidades para el agente de primer orden en la Figura 13(a) y las aceleraciones para el agente de segundo orden en la Figura 13(b). De nueva cuenta, la amplitud de las entradas de control se incrementa debido a que los agentes están en peligro de colisión. Una vez lograda la evasión, las entradas de control convergen a cero ya que los agentes alcanzaron la formación deseada.



(a) Entradas de control para el agente de primer orden.



(b) Entradas de control para el agente de segundo orden.

Figura 13: Entradas de control para la cuarta simulación.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de formación y evasión de colisiones para un sistema multi-agente heterogéneo

conformado por un agente de primer orden y un agente de segundo orden. Para lograr la formación deseada se utilizaron funciones saturación mientras que el enfoque de CVR se utilizó para lograr la maniobra de evasión de colisiones. Debido a que los agentes continúan moviéndose una vez alcanzado el patrón geométrico, se agrega un tercer agente (agente líder) sin dinámica para corregir este comportamiento. En ese sentido, los agentes logran converger al patrón geométrico predefinido si existe un árbol de expansión dirigido con nodo raíz en el agente líder. Además, cuando están en peligro de colisión, los CVR se prenden de manera suave y la maniobra de colisión se empieza a realizar, logrando que la distancia entre ellos siempre sea mayor a la distancia de seguridad. Por otra parte, al comparar la técnica de CVR con la metodología de las FPR, se destacan los siguiente puntos:

- Los agentes no quedan atascados en puntos de equilibrio no deseados. De hecho, la propia dinámica de los CVR permite que los agentes se muevan en trayectorias de tipo foco inestable.
- Al utilizar los CVR, la maniobra de evasión se realiza de manera más agresiva con respecto a las FPR.

Como trabajo futuro, se estudiará un sistema multi-agente conformado por  $m$  agentes de primer orden y  $n$  agentes de segundo orden cuyo modelo se vea afectado por perturbaciones así como determinar una cota para escalar de manera adecuada los CVR.

## Agradecimientos

Jaime González-Sierra agradece el apoyo del Instituto Politécnico Nacional a través del Proyecto SIP: 20230121.

## Referencias

- Ajwad, S. A., Moulay, E., Defoort, M., Ménard, T., y Coirault, P. (2021). Collision-free formation tracking of multi-agent systems under communication constraints. *IEEE Control Systems Letters*, 5(4):1345–1350.
- Aranda-Bricaire, E. y González-Sierra, J. (2023). Formation with non-collision control strategies for second-order multi-agent systems. *Entropy*, 25(6).
- Dang, A. D., La, H. M., Nguyen, T., y Horn, J. (2019). Formation control for autonomous robots with collision and obstacle avoidance using a rotational and repulsive force-based approach. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 16(3).
- Dou, L., Yu, X., Liu, L., Wang, X., y Feng, G. (2021). Moving-target enclosing control for mobile agents with collision avoidance. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 8(4):1669–1679.
- Flores-Resendiz, J. F. y Aranda-Bricaire, E. (2020). A general solution to the formation control problem without collisions for first order multi-agent systems. *Robotica*, 38(6):1123–1137.
- Flores-Resendiz, J. F., Aranda-Bricaire, E., González-Sierra, J., y Santiaguillo-Salinas, J. (2015). Finite-time formation control without collisions for multiagent systems with communication graphs composed of cyclic paths. *Mathematical Problems in Engineering*, pp. 1–17.
- Flores-Resendiz, J. F., Avilés, D., y Aranda-Bricaire, E. (2023). Formation control for second-order multi-agent systems with collision avoidance. *Machines*, 11(2).
- Gnanasekera, M. y Katupitiya, J. (2022). A time-efficient method to avoid collisions for collision cones: An implementation for uavs navigating in dynamic environments. *Drones*, 6(5).
- Godsil, C. y Royle, G. (2001). Algebraic graph theory. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, New York, NY, USA, 207.
- González-Sierra, J., Dzul, A., y Ríos, H. (2019). Robust sliding-mode formation control and collision avoidance via repulsive vector fields for a group of quad-rotors. *International Journal of Systems Science*, 50(7):1483–1500.
- González-Sierra, J., Hernández-Martínez, E., Ramírez-Neria, M., y Fernández-Anaya, G. (2023). Smooth collision avoidance for the formation control of first order multi-agent systems. *Robotics and Autonomous Systems*, 165:104433.
- Graham, A. (1981). *Kronecker Products and Matrix Calculus With Applications*. Halsted, New York.
- Hernández-Martínez, E. y Aranda-Bricaire, E. (2013). Collision avoidance in formation control using discontinuous vector fields. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(23):797–802.
- Hu, J., Zhang, H., Liu, L., Zhu, X., Zhao, C., y Pan, Q. (2020). Convergent multiagent formation control with collision avoidance. *IEEE Transactions on Robotics*, 36(6):1805–1818.
- Huang, S., Teo, R. S. H., y Tan, K. K. (2019). Collision avoidance of multi unmanned aerial vehicles: A review. *Annual Reviews in Control*, 48:147–164.
- Khatib, O. (1985). Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. En *Proceedings. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volumen 2, pp. 500–505.
- Kufoalor, D. K. M., Johansen, T. A., Brekke, E. F., Hepsø, A., y Trnka, K. (2019). Autonomous maritime collision avoidance: Field verification of autonomous surface vehicle behavior in challenging scenarios. *Journal of Field Robotics*, 37(3):387–403.
- Li, S. y Wang, X. (2013). Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple auvs. *Automatica*, 49(11):3359–3367.
- Liu, J., Zhao, M., y Qiao, L. (2022a). Adaptive barrier lyapunov function-based obstacle avoidance control for an autonomous underwater vehicle with multiple static and moving obstacles. *Ocean Engineering*, 243:110303.
- Liu, X., Li, C., y Li, D. (2022b). Collision-avoiding formation for multiple euler-lagrange systems against external disturbances and actuator faults. *Journal of the Franklin Institute*, 359(12):6336–6360.
- Mao, R. y Dai, H. (2021). Distributed non-convex model predictive control for non-cooperative collision avoidance of networked differential drive mobile robots. *IEEE Access*, pp. 1–9.
- Meyer, E., Robinson, H., Rasheed, A., y San, O. (2020). Taming an autonomous surface vehicle for path following and collision avoidance using deep reinforcement learning. *IEEE Access*, 8:41466–41481.
- Na, S., Niu, H., Lennox, B., y Arvin, F. (2022). Bio-inspired collision avoidance in swarm systems via deep reinforcement learning. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 71(3):2511–2526.
- Panagou, D. (2014). Motion planning and collision avoidance using navigation vector fields. *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, p. 2513–2518.
- Park, B. S. y Yoo, S. J. (2021). Connectivity-maintaining and collision-avoiding performance function approach for robust leader-follower formation control of multiple uncertain underactuated surface vessels. *Automatica*, 127(C).
- Polvara, R., Sharma, S., Wan, J., Manning, A., y Sutton, R. (2018). Obstacle avoidance approaches for autonomous navigation of unmanned surface vehicles. *The Journal of Navigation*, 71(1):241–256.
- Raj, J., Raghuvaiya, K., y Vanualailai, J. (2020). Collision avoidance of 3d rectangular planes by multiple cooperating autonomous agents. *Journal of Advanced Transportation*, 2020(6):1–13.
- Ren, W. y Beard, R. W. (2008). Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: theory and applications. *Communications and Control Engineering Series*, Springer, London, UK.
- Sakai, D., Fukushima, H., y Matsuno, F. (2018). Leader-follower navigation in obstacle environments while preserving connectivity without data transmission. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(4):1233–1248.
- Santiaguillo-Salinas, J. y Aranda-Bricaire, E. (2017). Motion coordination problems with collision avoidance for multiagent systems. In (Ed.), *Multi-agent Systems*. *IntechOpen*, pp. 17–41.
- Seung-Mok, L. y Hyun, M. (2015). Receding horizon particle swarm optimisation-based formation control with collision avoidance for non-holonomic mobile robots. *IET Control Theory & Applications*, 9(14):2075–2083.
- Smith, N., Cobb, R., Pierce, S., y Raska, V. (2014). Optimal collision avoidance trajectories via direct orthogonal collocation for unmanned/remotely piloted aircraft sense and avoid operations. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, pp. 1–25.
- Sui, Z., Pu, Z., Yi, J., y Wu, S. (2021). Formation control with collision avoidance through deep reinforcement learning using model-guided demonstration. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32(6):2358–2372.
- Teel, A. R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems & Control Letters*, 18:165–171.
- Vargas, S., Becerra, H. M., y Hayet, J.-B. (2022). Mpc-based distributed for-

- mation control of multiple quadcopters with obstacle avoidance and connectivity maintenance. *Control Engineering Practice*, 121:105054.
- Woo, J. y Kim, N. (2020). Collision avoidance for an unmanned surface vehicle using deep reinforcement learning. *Ocean Engineering*, 199:107001.
- Yang, S., Weiwei, B., Li, T., Shi, Q., Yang, Y., Yue, W., y Chen, C. (2021). Neural-network-based formation control with collision, obstacle avoidance and connectivity maintenance for a class of second-order nonlinear multi-agent systems. *Neurocomputing*, 439.
- Yasin, J. N., Mohamed, S. A. S., Haghbayan, M.-H., Heikkonen, J., Tenhunen, H., y Plosila, J. (2020). Unmanned aerial vehicles (uavs): Collision avoidance systems and approaches. *IEEE Access*, 8:105139–105155.
- Yoo, S. J. y Kim, T.-H. (2015). Distributed formation tracking of networked mobile robots under unknown slippage effects. *Automatica*, 54:100–106.
- Yoo, S. J. y Park, B. S. (2019). Connectivity preservation and collision avoidance in networked nonholonomic multi-robot formation systems: Unified error transformation strategy. *Automatica*, 103:274–281.