

## Controlador multiresolución para sistemas no lineales basado en WaveNets Multiresolution controller based on WaveNets for nonlinear systems

O. F. Garcia-Castro <sup>a,\*</sup>, M. A. Vega-Navarrete <sup>a</sup>, L. E. Ramos-Velasco <sup>a</sup>,  
R. Garcia-Rodriguez <sup>a</sup>, E. Escamilla-Hernández <sup>b</sup>

<sup>a</sup>Maestría en Ingeniería Aeroespacial, Universidad Politécnica Metropolitana de Hidalgo, 43860, Tolcayuca, Hidalgo, México.

<sup>b</sup>Escuela Superior de Ingeniería Mecánica Culhuacán, Instituto Politécnico Nacional, 04440, Ciudad de México, México.

### Resumen

El diseño de controladores libres de modelo y robustos ha sido un problema de estudio durante varias décadas. Debido a su simplicidad y su estructura libre de cualquier información del modelo, el controlador proporcional-integral-derivativo (PID) es uno de los más utilizados en diversas aplicaciones. Adicionalmente, con el fin de diseñar controladores capaces de adaptarse a diferentes condiciones de operación como en las aeronaves o sistemas robóticos, en los últimos años ha tomado relevancia contar con controladores que tengan la capacidad de autosintonizar sus ganancias. Basado en la transformada *wavelet*, en este trabajo se propone un controlador proporcional multiresolución (PMR) autosintonizable, el cual descompone el error de seguimiento para obtener información a diferente escala y frecuencia que permita compensar diversas incertidumbres en el sistema. Adicionalmente, se utiliza una red neuronal *wavelet* (WaveNet) la cual se encarga de aproximar la dinámica entrada y salida del sistema; mientras que su salida es un elemento para llevar a cabo la autosintonización. Para verificar el desempeño del controlador PMR se presentan los resultados de simulación numéricas en MATLAB R2021a para un helicóptero Quanser de 2 grados de libertad bajo diferentes condiciones de operación, comparándolo con un controlador PID.

**Palabras Clave:** Análisis multiresolución, Control inteligente, Función *wavelet*, Helicóptero Quanser, Redes neuronales.

### Abstract

The design of free, robust, model controllers has been a study problem during several decades. Due to its simplicity and free structure of any model information, the proportional-integral-derivative (PID) controller is one of the most used in various applications. In addition, in order to design controllers capable of adapting to different operating conditions such as aircraft or robotic systems, in recent years it has become relevant to have controllers that have the ability to self-tune their profits. Based on the wavelet transform, this work proposes an autotune multi-resolution proportional (PMR) controller, which decomposes the tracking error to obtain information on a different scale and frequency that allows for compensation for various uncertainties in the system. Additionally, a wavelet neural network (WaveNet) is used which approaches the dynamic input and output of the system; while its output is an element for self-tuning. To verify the performance of the PMR controller, the numerical simulation results in MATLAB R2021a are presented for a 2-degree-of-freedom Quanser helicopter under different operating conditions, comparing it to a PID controller.

**Keywords:** Multi-resolution analysis, Intelligent control, Wavelet function, Quanser helicopter, Neural network.

### 1. Introducción

En 1939, Taylor Instrument Company presentó al controlador proporcional-integral-derivativo (PID) y se convirtió en uno de los más utilizados en diversas áreas gracias a su simplicidad y robustez en diversos sistemas (Bennett, 1993). El con-

trolador PID se caracteriza por ser libre de modelo, también disminuye el tiempo de respuesta y hace más rápido las tareas de regulación. Sin embargo, en ocasiones se puede sufrir tanto de errores significativos en estado estacionario como de largo tiempo de estabilización cuando se aplican perturbaciones. Pe-

\* Autor para correspondencia: lramos@upmh.edu.mx

**Correo electrónico:** 213220003@upmh.edu.mx (Oscar Federico Garcia-Castro), lramos@upmh.edu.mx (Luis Enrique Ramos-Velasco), rogarcia@upmh.edu.mx (Rodolfo Garcia-Rodriguez), mvega@upmh.edu.mx (Mario Alejandro Vega-Navarrete), eescamillah@ipn.mx (Enrique Escamilla-Hernández).

**Historial del manuscrito:** recibido el 30/06/2023, última versión-revisada recibida el 30/08/2023, aceptado el 29/08/2023, publicado el 30/11/2023. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial4.11391>



se a su uso extendido, sintonizar las ganancias del controlador PID requiere de cierta experiencia por parte de los diseñadores y, aun cuando Ziegler y Nichols propusieron una serie de pasos en 1942 para ciertas condiciones de operación, la sintonización se realiza a prueba y error.

En las últimas décadas y junto al avance de la inteligencia artificial, se ha logrado el diseño de controladores libres de modelo usando redes neuronales (RNA), a lo que se le conoce como control inteligente; el cual, a diferencia del control adaptable, no requiere tener un conocimiento parcial previo del sistema, permitiendo el diseño de controladores con cierta capacidad de adaptación ante variaciones del medio ambiente ya sea por perturbaciones o incertidumbres paramétricas (Hespanha, 2021).

La transformada *wavelet* (WT) es comúnmente utilizada en el procesamiento de señales, debido que tiene la capacidad de descomponer señales de banda ancha en sub-bandas localizadas en tiempo y frecuencia. Sin embargo, fue Zhang y Benveniste (1992) quienes propusieron utilizar a la función *wavelet* como función de activación en una RNA. Esta combinación presenta ciertas ventajas poco estudiadas en aplicaciones de alto desempeño, por ejemplo, la robustez ante perturbaciones e incertidumbres paramétricas. Un trabajo donde se utilizó a las funciones *wavelet* en un controlador PID discreto fue (Garcia-Castro et al., 2022a) y se aplicó al modelo lineal del helicóptero Quanser de dos grados de libertad (GDL) para regulación de sus posiciones angulares utilizando a la función RASP3 en la llamada red neuronal *wavelet* (WaveNet) con filtros de respuesta infinita al impulso (IIR) para la identificación del comportamiento entrada-salida del modelo lineal.

Por otro lado, una extensión de la WT para fines de control fue presentada por Parvez y Gao (2005), quienes describen por primera vez un controlador PID multiresolución (MPID) realizando la descomposición del error de seguimiento en tiempo-frecuencia mediante la *wavelet* Daubechies de segundo orden (Daubechies, 1992). A esto se le denominó análisis multiresolución (MRA) basado en *wavelets*. A partir de lo anterior, mostraron gráficamente que un PID clásico discreto es un caso particular del MPID, ya que dicha descomposición relaciona la baja frecuencia con la ganancia proporcional, la mediana frecuencia con la ganancia integral y las altas frecuencias con la parte derivativa. Obteniendo así, una señal de control suave utilizando ganancias igualadas a cero para eliminar los componentes de altas frecuencias. Una de las desventajas del algoritmo de Parvez y Gao es la carencia de un método para la sintonización de las ganancias del controlador, las cuales se definen a prueba y error. No obstante, algunas aplicaciones donde se utiliza el MPID son (Zhang et al., 2023; Díaz-López et al., 2013).

Haciendo uso de la metodología reportada en (Garcia-Castro et al., 2022a), en este trabajo se determinó que la función de activación de la WaveNet-IIR fuese la POLYWOG3 para la etapa de identificación y se diseñó un controlador MPID, denominado como controlador proporcional multiresolución (PMR); el cual se utilizó para la regulación de posiciones angulares del modelo no lineal del helicóptero Quanser de 2 GDL.

La contribución de este artículo es utilizar una WaveNet-IIR para la identificación de un sistema no lineal donde las ganancias del control se autosintonizan utilizando un término del modelo identificado. Además, el controlador PMR hace uso de

la técnica del MRA para descomponer la señal de error de seguimiento con la finalidad de obtener varias señales a diferente escala-frecuencia; las cuales son escaladas y sumadas para generar una señal de control que compensa las incertidumbres del sistema. Dicho controlador también es sintonizado y adaptado en línea mediante la WaveNet-IIR. Para validar el algoritmo propuesto se realizaron simulaciones numéricas con el modelo no lineal del helicóptero Quanser de 2 GDL comparando su rendimiento con un controlador PID discreto clásico.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: la Sección 2 presenta el esquema de control PMR basado en *wavelets*, los resultados de la simulación se presentan en la Sección 3 y, finalmente, en la Sección 4 se dan las conclusiones y se menciona el trabajo futuro.

## 2. Diseño del control multiresolución basado en *wavelets*

Sea un sistema no lineal afín en el control definido como, (Khalil, 2015)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t). \quad (2)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$  es el vector de estado,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  es la salida del sistema,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  es la señal de control,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  es el campo vector,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$  es la matriz de entrada y  $\mathbf{C}$  es la matriz de salida.

Asumiendo que, durante un periodo de muestreo  $T > 0$ , se tienen las lecturas de los parámetros de interés del modelo (ya sea posición o velocidad, por ejemplo), entonces es posible aplicar a la ecuación (1) el método de aproximación de Euler:

$$\dot{\mathbf{x}} \approx \frac{\mathbf{x}(t+T) - \mathbf{x}(t)}{T}. \quad (3)$$

Evaluando en  $t = kT$  se obtiene la forma discreta de ecuación (1), definida como

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + T(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(k))\mathbf{u}(k)), \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k+1). \quad (5)$$

donde  $k \geq 0 \in \mathbb{Z}^+$ , con  $k \equiv kT \Rightarrow k+1 = T(k+1)$ . Sustituyendo la ecuación (4) en la ecuación (5), se tiene la dinámica entrada-salida del sistema no lineal, la cual se representa como

$$\mathbf{y}(k+1) = \underbrace{\mathbf{C}(\mathbf{x}(k) + T\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)))}_{\Phi(k)} + \underbrace{\mathbf{C}(T\mathbf{g}(\mathbf{x}(k)))\mathbf{u}(k)}_{\Gamma(k)}. \quad (6)$$

Con el fin de diseñar un controlador libre de modelo, se asume que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(k))$  son desconocidos en la ecuación (6) y que sólo se tienen disponibles la señales de entrada y salida. A diferencia de algunos enfoques (Zamora et al., 2022; Blancas et al., 2019), en este trabajo el diseño del controlador constó de dos etapas principales: primero se aproximó la dinámica entrada-salida mediante una WaveNet-IIR, en la segunda etapa las ganancias del controlador PMR son autosintonizados usando la información de la primera etapa. El esquema del controlador propuesto se muestra en la Figura 1.

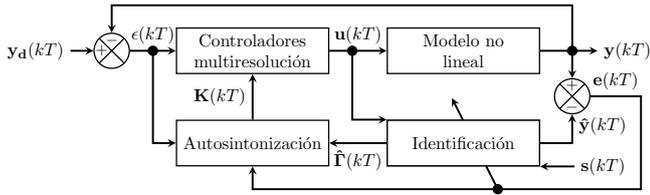


Figura 1: Diagrama de bloques del esquema de control multiresolución

### 2.1. Identificación del sistema no lineal

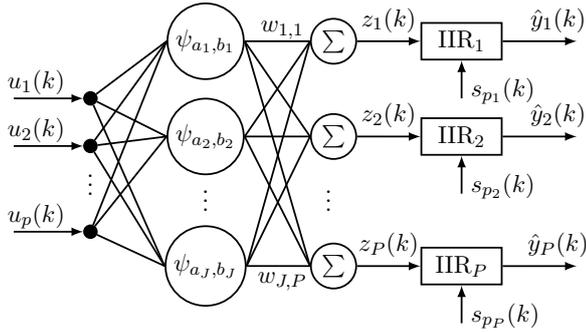


Figura 2: Diagrama de la WaveNet-IIR, donde  $P$  indica la cantidad de señales de entrada y salida, mientras que  $J$  es la cantidad de neuronas.

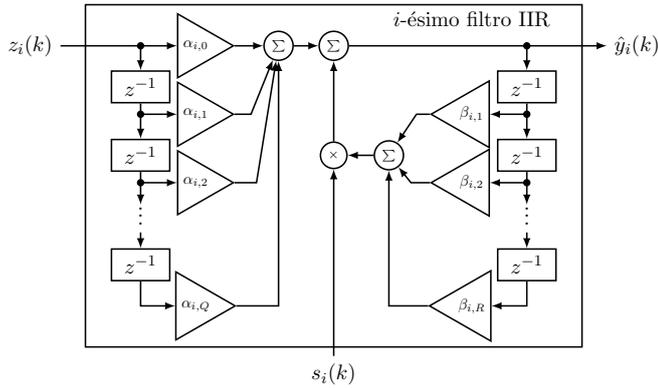


Figura 3: Diagrama de  $i$ -ésimo filtro IIR

Asumiendo que las funciones  $\Phi(k)$  y  $\Gamma(k)$  que conforman la dinámica entrada-salida son aproximadas mediante una WaveNet y una serie de filtros IIR, se dice que la salida  $\mathbf{y}(k + 1)$  se puede aproximar como

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \hat{\Phi}(k) + \hat{\Gamma}(k)s(k). \quad (7)$$

siendo  $s(k)$  una señal de excitación persistente. A la combinación de la WaveNet y los filtros IIR se le llama WaveNet-IIR y su esquema se presenta en la Figura 2; mientras que la estructura del filtro IIR se muestra en la Figura 3 (Garcia-Castro et al., 2022a; Navarrete et al., 2018). Adicionalmente, como función de activación de la WaveNet-IIR se utiliza una función polinómica Gaussiana tipo 3 (POLYWOG3), cuya expresión es (Vetterli y Kovačević, 1995)

$$\psi(\tau) = (\tau^4 - 6\tau^2 + 3)e^{-0.5\tau^2}, \quad \tau(k) = \frac{k-b}{a}, \quad a \neq 0. \quad (8)$$

siendo  $a$  y  $b$  los parámetros de escalamiento y traslación de la función *wavelet*; mientras que la derivada de la función POLYWOG3 se define como

$$\frac{\partial \psi(\tau)}{\partial b} = \frac{1}{a}(\tau^5 - 10\tau^3 + 15\tau)e^{-0.5\tau^2}. \quad (9)$$

La ecuación (8) se llama función *wavelet* «madre» dado que a partir de ella se generan las funciones «hijas». Sin embargo, para aplicar dicha expresión como función de activación en la WaveNet-IIR de múltiples entradas-múltiples salidas (MIMO), se reescribió de la siguiente forma (Vetterli y Kovačević, 1995, p. 83)

$$\psi_{a_j, b_j}(k) = \frac{1}{\sqrt{a_j}}\psi(\tau_{a_j, b_j}(\bar{u})), \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (10)$$

donde  $J$  es la cantidad de neuronas en la capa oculta de la WaveNet-IIR y el parámetro  $\tau_{a_j, b_j}(\bar{u})$  es dado como

$$\tau_{a_j, b_j}(\bar{u}) = \frac{\|\bar{u} - b_j\|}{a_j}, \quad (11)$$

siendo

$$\bar{u}(k) = \sum_{i=1}^P u_i(k). \quad (12)$$

con  $P$  como la cantidad de entradas. En forma matricial, el valor de las funciones de activación para la capa oculta de neuronas es

$$\Psi_{a, b}(k) = [\psi_{a_1, b_1}(k) \quad \dots \quad \psi_{a_j, b_j}(k) \quad \dots \quad \psi_{a_J, b_J}(k)], \quad (13)$$

para lo cual se tienen vectores de escalamiento  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times J}$  y traslación  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1 \times J}$ . De acuerdo con lo anterior, la salida de la WaveNet es

$$\mathbf{z}(k) = \Psi_{a, b}(k) \cdot \mathbf{W}(k). \quad (14)$$

donde  $\mathbf{W}(k) \in \mathbb{R}^{J \times P}$  es la matriz de pesos sinápticos. Entonces, se evalúan las señales  $\hat{\Phi}(k)$  y  $\hat{\Gamma}(k)$ , tal que,

$$\hat{\Phi}(k) = \sum_{i=1}^P \sum_{q=0}^Q \alpha_{i, q}(k) \cdot z_i(k - q), \quad (15)$$

$$\hat{\Gamma}(k) = \sum_{i=1}^P \sum_{r=1}^R \beta_{i, r}(k) \cdot \hat{y}_i(k - r). \quad (16)$$

donde  $\{\alpha_{i, q}, \beta_{i, r}\} \in \mathbb{R}$  representan los coeficientes de retardo y adelanto de los filtros IIR y  $\{Q \geq 0, R > 0\} \in \mathbb{Z}$  indican la cantidad de coeficientes utilizados. El término  $z_i(k - q)$  hace referencia a las salidas actuales y previas de la WaveNet, mientras que  $\hat{y}_i(k - r)$  sólo a las salidas previas del propio filtro IIR, tal como se indicó en la Figura 3 (Garcia-Castro et al., 2022a). Además, la señal de persistencia  $s(k) \in \mathbb{R}^P$  es propuesta por el diseñador, llegando así a la forma de la ecuación (7).

### 2.1.1. Algoritmo de aprendizaje de la WaveNet-IIR

El algoritmo de aprendizaje de la WaveNet-IIR es definido como, (Deisenroth et al., 2020, p. 228)

$$\gamma(k+1) = \gamma(k) + \mu_\gamma \nabla C_\gamma(k). \quad (17)$$

donde  $\mu_\gamma \geq 0 \in \mathbb{R}$  es la tasa de aprendizaje y  $\nabla C_\gamma(k)$  es el gradiente descendente de la función de costo  $C(k)$  con  $\gamma$  representando el gradiente de los pesos,  $w_{i,j}$ , de los parámetros de escalamiento y traslación de la función *wavelet*,  $a_j$ ,  $b_j$ ; así como de los coeficientes de retardo y adelanto de los filtros,  $\alpha_{i,q}, \beta_{i,r}$ .

Entonces, dada la función de costo

$$C(k) := \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P (e_i(k))^2. \quad (18)$$

donde  $e_i(k) = \mathbf{y}_i(k) - \hat{\mathbf{y}}_i(k)$  es el error de identificación con la  $i$ -ésima salida  $\mathbf{y}_i(k)$  del modelo, mientras que  $\hat{\mathbf{y}}_i(k)$  es la aproximación de la  $i$ -ésima salida de la WaveNet-IIR. De tal forma que,  $\nabla C_\gamma(k)$  minimiza la función de costo  $C(k)$  para cada variable, esto es

$$\nabla C_{w_{i,j}}(k) = -\bar{u}(k)\bar{e}(k) \sum_{q=0}^Q \alpha_{i,q}(k) \cdot \psi_{a_j,b_j}(k-q), \quad (19)$$

$$\nabla C_{b_j}(k) = -\bar{u}(k)\bar{e}(k) \sum_{r=1}^R \beta_{i,r}(k) \cdot \frac{\partial \psi_{a_j,b_j}(k-r)}{\partial b_j}, \quad (20)$$

$$\nabla C_{a_j}(k) = \nabla C_{b_j}(k) \cdot \tau_{a_j,b_j}(\bar{u}), \quad (21)$$

$$\nabla C_{\alpha_{i,q}}(k) = -\bar{u}(k)\bar{e}(k) \cdot z_i(k-q), \quad (22)$$

$$\nabla C_{\beta_{i,r}}(k) = -\bar{u}(k)\bar{e}(k) \cdot \hat{y}_i(k-r). \quad (23)$$

donde  $i = \{1, 2, \dots, P\}$  y  $\bar{e}(k) = \sum_{i=1}^P e_i(k)$ . Una vez realizado el proceso de identificación, en la siguiente sección se describen las principales características del controlador PMR.

### 2.2. Estructura del controlador PMR

El controlador PMR toma al  $i$ -ésimo error de seguimiento, dado por

$$\epsilon_i(k) := y_{d_i}(k) - y_i(k). \quad (24)$$

donde  $y_{d_i}(k)$  y  $y_i(k)$  indican las salidas deseada y real del modelo no lineal, con el que se construye el vector  $\epsilon_i(k)$ . De acuerdo con (Parvez y Gao, 2005), se sabe que la forma general para calcular la  $i$ -ésima señal de control es

$$u_i(k) = \sum_{n=1}^{N+1} K_{i,n}(k) \cdot \epsilon_{i,n}(k). \quad (25)$$

siendo  $N$  el nivel de descomposición y  $\epsilon_{i,n}(k)$  el  $n$ -ésimo componente con su respectiva ganancia proporcional  $K_{i,n}(k)$ , la cual queda ilustrada en la Figura 4.

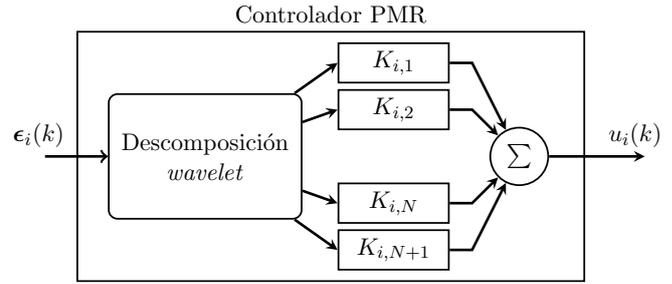


Figura 4: Diagrama del controlador PMR. Imagen adaptada de (Parvez y Gao, 2005, Fig. 1).

Una manera para determinar el nivel de resolución  $N$  es tal cual lo describen Parvez y Gao (2005), esto es

$$N \leq \log_2 \left( \frac{2L-1}{F-1} + 1 \right). \quad (26)$$

siendo  $L$  la cantidad de muestras de la señal  $\epsilon(k)$  y  $F$  el orden del filtro. Ambos son valores propuestos por el diseñador.

Entonces, el anterior procedimiento es aplicable para obtener la señal de control de modelo, esto es

$$\mathbf{u}(k) = [u_1 \quad \dots \quad u_i \quad \dots \quad u_P]. \quad (27)$$

recordando que  $P$  es la cantidad de salidas.

Para implementar el controlador PMR, se aplica el MRA a la señal del error de seguimiento  $\epsilon_i(k)$  a través de la descomposición *wavelet*, tal que (Mendoza-Monjaraz et al., 2015; Parvez y Gao, 2005)

$$\begin{aligned} \epsilon_i(k) = & \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} c_{N,\ell} \cdot \varphi_{N,\ell}(k)}_{\text{término de alta escala-baja frecuencia } \epsilon_{i,1}(k)} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N-1} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} d_{i,\ell} \cdot \psi_{i,\ell}(k)}_{\text{término escala-media frecuencia } \epsilon_{i,2}(k), \dots, \epsilon_{i,N}(k)} \\ & + \underbrace{\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} d_{N,\ell} \cdot \varphi_{N,\ell}(k)}_{\text{término de baja escala-alta frecuencia } \epsilon_{i,N+1}(k)}. \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $\psi(k)$  y  $\varphi(k)$  son la función *wavelet* y la función de escalamiento. Además,  $c$  y  $d$  son los coeficientes de aproximación y detalles calculados como (Parvez y Gao, 2005)

$$c_{i,\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \epsilon_i(k) \overline{\varphi_{i,\ell}(k)}, \quad \text{and} \quad d_{i,\ell} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \epsilon_i(k) \overline{\psi_{i,\ell}(k)}. \quad (29)$$

siendo  $\overline{\varphi_{i,\ell}(k)}$  y  $\overline{\psi_{i,\ell}(k)}$  las funciones conjugadas de  $\varphi(k)$  y  $\psi(k)$ , respectivamente.

### 2.3. Sintonización de las ganancias

Dado que el controlador PMR carece de métodos para su sintonización (Mendoza-Monjaraz et al., 2015), se utiliza al parámetro  $\hat{\Gamma}(k)$  de la WaveNet-IIR para ajustar los valores de las ganancias aplicando la siguiente regla (Navarrete et al., 2018):

$$K_{i,n}(k+1) = K_{i,n}(k) - \mu_{K_{i,n}} \hat{\Gamma}_i(k) (\epsilon_{i,N+1}(k) - \epsilon_{i,N}(k)). \quad (30)$$

donde  $\hat{\Gamma}(k)$  se obtiene de la ecuación (15) y  $\mu_{k,n} \in \mathbb{R}$  es la tasa de actualización. Con el fin de comprobar el enfoque propuesto, en la siguiente sección se presenta la aplicación del controlador al modelo no lineal del helicóptero Quanser de 2 GDL.

### 3. Resultados de simulación

El objetivo de las simulaciones es que el helicóptero Quanser de 2 GDL siguiera trayectorias deseadas o señales de referencia para cada eje de movimiento utilizando su modelo no lineal, dado como (Inc., 2012)

$$\ddot{\theta} = \frac{F_1 u_1 + F_2 u_2 - mgd \cos \theta - B_1 \dot{\theta} - md^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2}{J_1 + md^2 \cos \theta}, \quad (31)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{F_3 u_1 + F_4 u_2 - B_2 \dot{\phi} + 2md^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi} \dot{\theta}}{J_2 + md^2 \cos \theta}. \quad (32)$$

donde  $\theta$  y  $\phi$  son las posiciones angulares de los ejes de cabeceo y guiñada; los parámetros del modelo se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1: Parámetros del helicóptero Quanser de 2 GDL extraídos de (Inc., 2012)

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
$u_1, u_2$	Voltajes en los motores de cabeceo y guiñada.	$\pm 24,$ $\pm 12$	V
$F_1$	Constante de fuerza de empuje del motor de guiñada/hélice.	0.2040	N m/V
$F_4$	Constante de par de empuje del eje de guiñada del motor de guiñada/hélice.	0.0720	N m/V
$F_2$	Par de empuje constante que actúa sobre el eje de cabeceo del motor de guiñada/hélice.	0.0068	N m/V
$F_3$	Par de empuje constante que actúa sobre el eje de guiñada del motor de cabeceo/hélice.	0.0068	N m/V
$B_1$	Amortiguación viscosa equivalente alrededor del eje de cabeceo.	0.8000	N/V
$B_2$	Amortiguación viscosa equivalente alrededor del eje de guiñada.	0.3180	N/V
$m$	Masa en movimiento total del cuerpo del helicóptero.	1.3872	kg
$d$	Distancia del centro de masa a lo largo del cuerpo del helicóptero desde el eje de cabeceo.	0.1860	m
$J_1, J_2$	Momento total de inercia alrededor de los ejes de y guiñada.	0.0384, 0.0432	kg/m <sup>2</sup>
$T$	Periodo de muestreo	0.005	s

Representando el sistema (31)-(32) en la forma (1) se tiene al vector de estado del modelo del helicóptero como

$$\mathbf{x}(t) := [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \equiv [\theta(t) \ \phi(t) \ \dot{\theta}(t) \ \dot{\phi}(t)]^T. \quad (33)$$

el vector de control y de salida son:

$$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T, \quad \mathbf{y}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T. \quad (34)$$

resultando el campo vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  y las matrices  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$  y  $\mathbf{C}$  como

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{mgd \cos x_1 + B_1 x_3 + md^2 x_3^2 \sin x_1 \cos x_1}{J_1 + md^2} \\ \frac{-B_2 x_4 + 2md^2 x_3 x_4 \sin x_1 \cos x_1}{J_2 + md^2 \cos x_1} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{F_1}{J_1 + md^2} & \frac{F_2}{J_1 + md^2} \\ \frac{F_3}{J_2 + md^2 \cos x_1} & \frac{F_4}{J_2 + md^2 \cos x_1} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Un parámetro crucial para la implementación de controladores discretos es el periodo de muestreo  $T$ , el cual se indicó en la Tabla 1. Es bien conocido que, para sistemas en tiempo discreto el periodo de muestreo juega un papel importante en la estabilidad en lazo cerrado del sistema. Se probaron periodos de muestreo mayores a 10 ms y la eficiencia del controlador disminuye significativamente; con valores menores a 5 ms, el controlador responde de manera adecuada, pero la carga computacional aumenta.

Las señales de referencia se definieron como

$$y_{d_i}(k) = y_{\text{inicial}_i} + 3(y_{\text{final}_i} - y_{\text{inicial}_i})x^2 - 2(y_{\text{final}_i} - y_{\text{inicial}_i})x^3. \quad (38)$$

donde las posiciones iniciales y finales se indican como  $y_{\text{inicial}_i}$  y  $y_{\text{final}_i}$ , respectivamente; en tanto que,  $x \in [0, 1]$  es una variable de tiempo normalizada evaluada por

$$x = \frac{k - t_{\text{inicial}_i}}{t_{\text{final}_i} - t_{\text{inicial}_i}}, \quad t_{\text{inicial}_i} < k \leq t_{\text{final}_i}. \quad (39)$$

siendo  $t_{\text{inicial}_i}$  y  $t_{\text{final}_i}$  los tiempos reales en segundos cuando la planta inicia y termina un segmento de la posición planeada y  $k \equiv kT$  es el momento de operación. En la Tabla 2 se indican los valores utilizados para la generación de las señales polinomiales mostradas en la Figura 5.

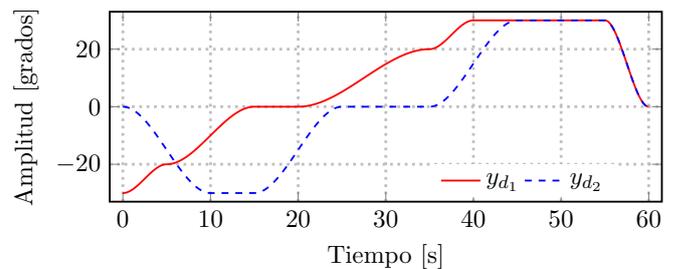


Figura 5: Señales de referencias polinomiales utilizadas para las simulaciones, siendo  $y_{d_1}(k)$  las posiciones angulares para el eje de cabeceo y  $y_{d_2}(k)$  para la guiñada.

Tabla 2: Parámetros utilizados para las señales de referencia polinomiales Cabeceo  $y_{d_1}(k)$  Guiñada  $y_{d_2}(k)$

Cabeceo $y_{d_1}(k)$				Guiñada $y_{d_2}(k)$			
$y_{inicial_i}$	$y_{final_i}$	$y_{inicial_i}$	$y_{final_i}$	$y_{inicial_i}$	$y_{final_i}$	$y_{inicial_i}$	$y_{final_i}$
-30	-20	0	5	0	-30	0	9
-20	0	5	15	-30	-30	9	19
0	0	15	25	-30	0	19	24
0	20	25	35	0	0	24	35
20	30	35	40	0	30	35	44
30	30	40	50	30	30	44	55
30	0	50	60	30	0	55	60

Además, en cada salida (posición angular) se indujeron perturbaciones en forma de adición, las cuales tienen las siguientes expresiones

$$\mathcal{U}_1(k) = \begin{cases} -5^\circ & k \geq 20 \text{ s} \\ 0^\circ, & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad (40)$$

$$\mathcal{U}_2(k) = \begin{cases} 10^\circ & k \geq 30 \text{ s} \\ 0^\circ, & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (41)$$

recordando que  $k \equiv kT$  y representa el instante en que se realiza la operación.

Las simulaciones se llevaron a cabo utilizando la plataforma de MATLAB R2021a y como primer paso se determinó la cantidad de neuronas  $J$ , la cantidad de coeficientes de adelanto  $Q$  y de retardo  $R$  de los filtros IIR (ver Tabla 3). Asimismo, en la Tabla 4 se indican los valores iniciales de cada parámetros y sus tasas de aprendizaje  $\mu_\lambda$ .

Tabla 3: Parámetros de configuración para la Wavenet-IIR para el caso del helicóptero *Quanser* de 2 GDL

Cantidad	Símbolo	Valor
Entradas-Salidas	$P$	2
Neuronas	$J$	3
Coefficientes de retardo	$Q$	4
Coefficientes de adelanto	$R$	2
Función de activación	$\psi$	POLYWOG3

Tabla 4: Valores iniciales de los parámetros de la Wavenet-IIR

Parámetro	Símbolo	Valor inicial	Tasa de aprendizaje
Escalamientos	$\mathbf{a}$	$\{a_j = 1 : 1 \leq j \leq J\}$	$10^{-5}$
Traslaciones	$\mathbf{b}$	$\{b_j = j : 1 \leq j \leq J\}$	$10^{-10}$
Pesos sinápticos	$\mathbf{W}$	$\text{random}(\pm 0.001, P, J)$	$5 \times 10^{-7}$
Coefficientes de retardo	$\mathbf{A}$	$\text{random}(\pm 0.5, P, Q)$	$5 \times 10^{-1}$
Coefficientes de adelanto	$\beta$	$\text{random}(\pm 0.5, P, R)$	$5 \times 10^{-3}$
Señal de persistencia	$s$	100	-

Cabe mencionar que, la configuración presentada en la Tabla 3 se obtuvo a partir del estudio comparativo presentado en (Garcia-Castro et al., 2022a), en donde se realizaron una serie de pruebas para determinar la dimensión de la Wavenet-IIR, así como su función de activación  $\psi$ .

Ahora, el nivel de resolución de los controladores PMR Wavenet-IIR se determinó al evaluar la ecuación (26) con  $L = 16$  y  $F = 2$ , obteniendo lo siguiente:

$$N \leq 5.0444. \quad (42)$$

por lo tanto, el nivel de resolución quedó en  $N = 5$ .

A partir de lo anterior, se propusieron los valores iniciales de seis ganancias para cada controlador PMR Wavenet-IIR y sus tasas de actualización. Además, para comparar el rendimiento del controlador propuesto, se utilizó un controlador PID clásico cuyas ganancias fueron tomadas del (Inc., 2012). Dichas configuraciones son indicadas en la Tabla 5.

Tabla 5: Valores iniciales de los controladores

Controlador PMR	Ganancias iniciales	Tasa de actualización
Cabeceo	$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 75 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$	100
Guiñada	$\begin{bmatrix} 300 & 100 & 75 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$	100

Controlador PID	Ganancias iniciales	Tasa de actualización
Cabeceo	$\begin{bmatrix} 15 & 5 & 5 \end{bmatrix}$	-
Guiñada	$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 7 \end{bmatrix}$	-

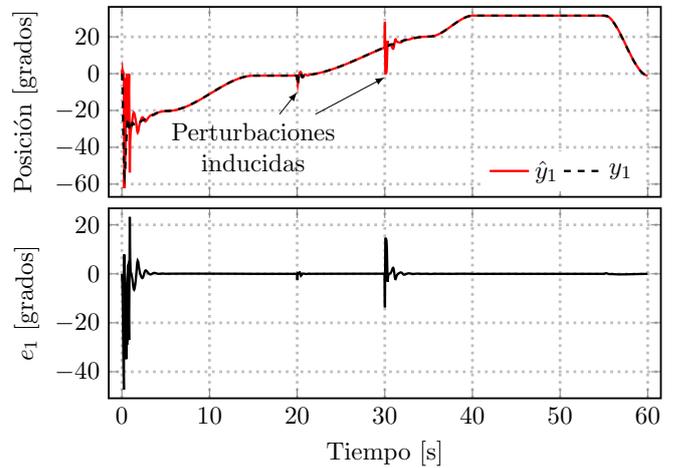


Figura 6: Resultados de identificación para la posición angular de cabeceo  $y_1(k)$  y su error de identificación  $e_1(k)$  utilizando la función POLYWOG3

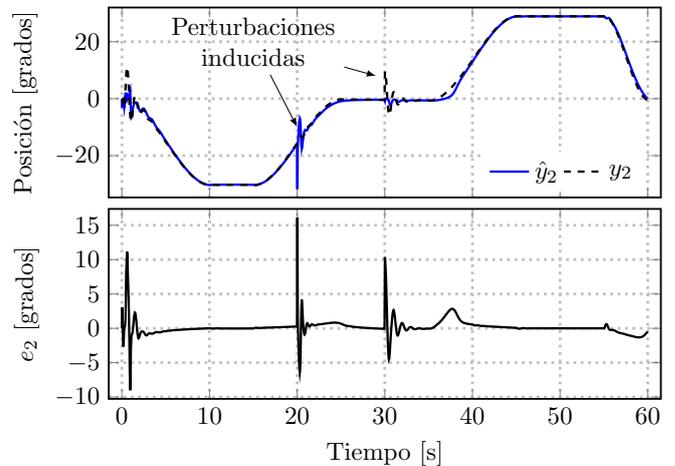


Figura 7: Resultados de identificación para la posición angular de guiñada  $y_2(k)$  y su error de identificación  $e_2(k)$  utilizando la función POLYWOG3

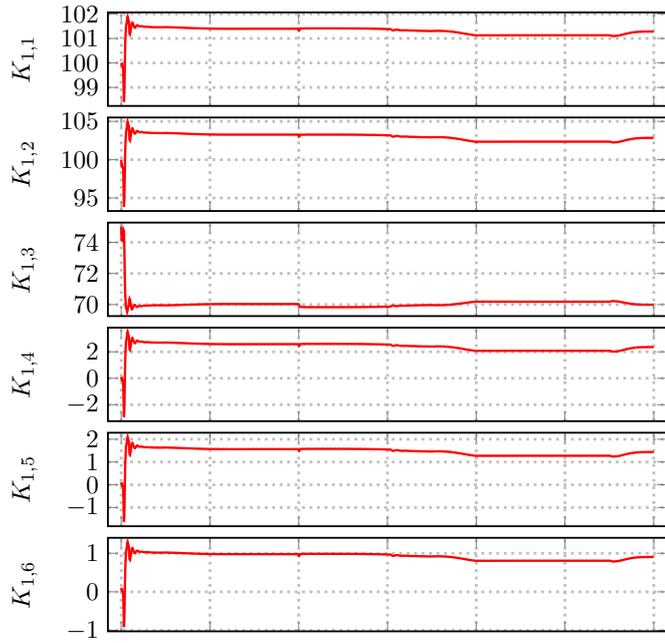


Figura 8: Comportamiento de las ganancias del controlador PMR para las posiciones angulares de cabeceo  $y_1(k)$  con un nivel de descomposición  $N = 5$

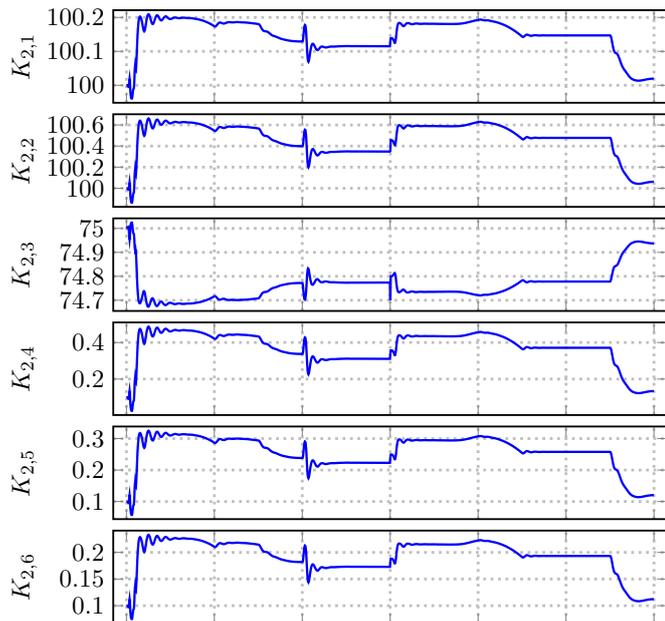


Figura 9: Comportamiento de las ganancias del controlador PMR para las posiciones angulares de guiñada  $y_2(k)$  con un nivel de descomposición  $N = 5$

En las Figuras 6 y 7 se presentan los resultados de identificación mediante la Wavenet-IIR de cada posición angular y sus errores identificación. Para el caso de los ángulos de cabeceo  $y_1(k)$ , en los primeros 4 segundos se tiene una variación en el error de identificación  $e_1$ , pero después  $e_1 \rightarrow 0$ . Nótese que a los 20s se aprecia el fenómeno de la perturbación inducida  $\mathcal{U}_1(k)$  y, por el acoplamiento del sistema, a los 30s se presentó

la perturbación  $\mathcal{U}_2(k)$ . Por otro lado, en los ángulos de guiñada  $y_2(k)$ , a pesar de que el error  $e_2$  se mantiene acotado, éste no converge a cero. Igualmente, los efectos de las perturbaciones  $\mathcal{U}_1(k)$  y  $\mathcal{U}_2(k)$  son visibles en las gráficas, aunque ahora  $\mathcal{U}_1(k)$  fue dado por el acoplamiento del sistema y  $\mathcal{U}_2(k)$  es propiamente la perturbación inducida en la posición angular de guiñada. Pese a la presencia de dichas perturbaciones, el rendimiento de la Wavenet-IIR fue aceptable.

En las Figuras 8 y 9 se muestra en el comportamiento de las ganancias  $\mathbf{K}$  en cada controlador PMR. Para las posiciones angulares de cabeceo  $y_1(k)$ , al inicio se tuvo una variación en los valores para después ser relativamente constantes. Por otro lado, para el control de las posiciones de guiñada  $y_2(k)$ , se presentaron cambios durante toda la simulación.

De igual manera, en la Figura 10 se aprecian las señales de control  $\mathbf{u}(k)$  obtenidas durante la simulación para los controladores PID clásico y PMR Wavenet-IIR. En ambos casos se presentó un comportamiento similar entre sí, aunque con el controlador PMR Wavenet-IIR se tienen picos de voltajes. Además, al inicio se presentaron oscilaciones bruscas, pero después tienen cambios suaves; y también se aprecian el efecto de las perturbaciones  $\mathcal{U}_1(k)$  y  $\mathcal{U}_2(k)$  a los 20 y 30s. A pesar de los sobre impulsos presentados al inicio de la operación, los voltajes de cada señal se mantuvieron dentro del rango dados por el fabricante Tabla 1.

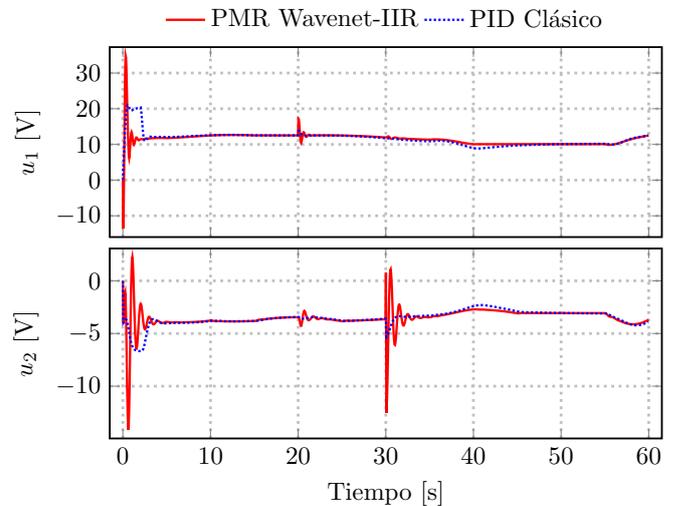


Figura 10: Señales de control utilizando los controladores PMR, donde  $u_1$  corresponde al eje de cabeceo  $\theta$  y  $u_2$  al de guiñada  $\phi$ .

Ahora, los resultados de las simulaciones en lazo cerrado de los controladores PID clásico y PMR Wavenet-IIR son dados en las Figuras 11 y 12. Ambas configuraciones fueron capaces de regular las posiciones angulares  $y_1(k)$  y  $y_2(k)$  del helicóptero Quanser de manera satisfactoria; no obstante, los intervalos donde estuvieron acotados los errores de seguimiento  $e_1(k)$  y  $e_2(k)$  son menores con el controlador PMR Wavenet-IIR y mayores con el controlador PID, es decir, el controlador propuesto mostró un mejor desempeño.

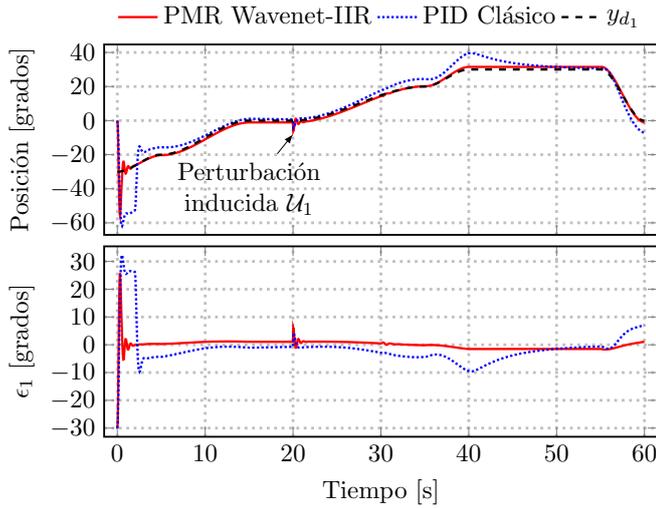


Figura 11: Resultados de cada controlador para la regulación de posiciones angulares de cabeceo  $y_1(k)$  y su error de seguimiento  $e_1(k)$

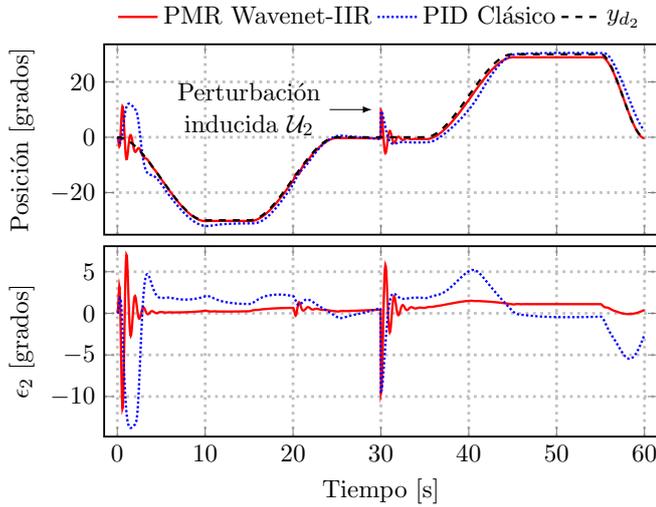


Figura 12: Resultados de cada controlador para la regulación de posiciones angulares de guiñada  $y_2(k)$  y su error de seguimiento  $e_2(k)$

### 3.1. Discusión

- **Evaluación de la WaveNet-IIR.** Una forma de evaluar la calidad de la aproximación del comportamiento entrada-salida del modelo es a través del factor de determinación  $R^2$ , cuya expresión es (James *et al.*, 2021, sec. 3.1.3)

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=0}^N (y_{d_i}(k) - \hat{y}_i)^2}{\sum_{k=0}^H (y_{d_i}(k) - \bar{y}_{d_i})^2}. \quad (43)$$

donde  $H$  indica la cantidad de muestras y  $\bar{y}_{d_i}$  es el promedio de las señales de referencia en cada eje.

Los valores de  $R^2$  oscilan entre 0 y 1; mientras más cercano a 1, mejor será la aproximación. Por lo tanto, se dice

que la WaveNet-IIR realiza una buena aproximación, debido a que se obtuvieron valores de 0.9890 y 0.9776 para la identificación del comportamiento de los ejes de cabeceo  $\theta$  y guiñada  $\phi$ , respectivamente.

- **Selección de la función de activación.** Uno de los principales inconvenientes del algoritmo de identificación es la configuración de la WaveNet-IIR, sobre todo la selección de la función de activación. Por ejemplo, en (Zamora *et al.*, 2022) se utilizó la función RASP1 para la identificación de una interfaz háptica, mientras que en (Navarrete *et al.*, 2018) se implementó la función Morlet para un sistema sub-actuado. De tal forma que, al carecer de una manera analítica para la elegir de la función de activación acorde al sistema que se desea identificar, esta selección se hace a prueba y error. Asimismo, esto permite probar otro tipo de funciones como las ventanas o las atómicas (García-Castro *et al.*, 2023, 2022b).
- **Controladores PMR.** Para evaluar el desempeño de los controladores PMR Wavenet-IIR y PID clásico se aplicaron las métricas de la raíz del error cuadrático medio (RMSE) y el error absoluto medio (MAE), las cuales se definen como

$$RMSE_i = \sqrt{\frac{1}{H} \sum_{k=0}^H (y_{d_i}(k) - y_i(k))^2}, \quad (44)$$

$$MAE_i = \frac{1}{H} \sum_{k=0}^H |y_{d_i}(k) - y_i(k)|. \quad (45)$$

siendo  $i$  el grado de libertad al que se hace referencia (para  $\theta$  es  $i = 1$ ;  $\phi$ ,  $i = 2$ ) y  $H$  es la cantidad de muestras utilizadas. Aparte de las métricas ya mencionadas se calculó el promedio de los errores de seguimiento y los resultados se indican en la Tabla 6.

Tabla 6: Métricas para la evaluación de los controladores

	PMR Wavenet-IIR		PID clásico	
	Cabeceo	Guiñada	Cabeceo	Guiñada
Error promedio	-0.4005	0.3898	-1.4120	0.4413
RMSE	1.5263	1.1722	6.0773	3.1470
MAE	1.4500	0.6299	3.6683	2.1278

El controlador PMR Wavenet-IIR presentó un mejor rendimiento con respecto al PID clásico, ya que una de las principales ventajas de los controladores PMR frente a los tipo PID, es que son capaces de utilizar 2 o más ganancias en su estructura interna. Además, al realizar un procesamiento con el MRA, la señales utilizadas en el controlador se adecuan a las necesidades propias del sistema debido al análisis en diferentes frecuencias y escalas.

## 4. Conclusiones y trabajo a futuro

Se realizó el diseño de un controlador PMR Wavenet-IIR y se aplicó para el seguimiento de posiciones angulares del modelo no lineal del helicóptero Quanser de 2 GDL, validando

su funcionamiento su mediante simulaciones numéricas demostrando que se tiene un mejor desempeño y comparándolo con un controlador PID clásico. De acuerdo con los resultados mostrados, el controlador PMR Wavenet-IIR presentó el mejor desempeño.

Además, la función *wavelet* a utilizar para la identificación de la dinámica entrada-salida de un modelo depende del sistema con que se trabaje. Por lo anterior, para el PMR Wavenet-IIR aplicado al modelo no lineal del helicóptero Quanser de 2 GDL se utilizó a la función POLYWOG3.

No obstante, el algoritmo del controlador PMR Wavenet-IIR resulta complejo al momento de realizar la configuración de sus parámetros, sobre todo sus tasas de actualización. Por lo tanto, una mejora a realizar es aplicar otro método de optimización para el ajuste dinámico de sus parámetros, por ejemplo, el ADADELTA, el Levenberg-Marquardt o el gradiente conjugado. Finalmente, otro trabajo a futuro es realizar las pruebas experimentales con el controlador PMR Wavenet-IIR presentado.

### Agradecimientos

Este trabajo fue apoyado parcialmente por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) con el número de referencia 1148156.

### Referencias

- Bennett, S. (1993). Development of the PID controller. *IEEE Control Systems*, 13(6):58–62.
- Blancas, J. G., Domínguez, O. A., y Ramos-Velasco, L. E. (2019). Control proporcional multiresolución para un robot de 2GDL a través de un sistema BCI. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 7(Especial):111–115.
- Daubechies, I. (1992). *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM.
- Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., y Ong, C. S. (2020). *Mathematics for machine learning*. Cambridge University Press.
- Díaz-López, F. A., Ramos-Velasco, L. E., Domínguez-Ramírez, O. A., y Parra-Vega, V. (2013). Multiresolution WaveNet PID control for global regulation of robots. *9th Asian Control Conference (ASCC), Istanbul, Turkey*, pp. 1–6.
- García-Castro, O. F., Ramos-Velasco, L. E., Escamilla-Hernández, E., García-Rodríguez, R., Vega-Navarrete, M. A., Domínguez-Mayorga, C. R., y Oliva-Moreno, L. N. (2023). Neuro-adaptive PID helicopter controller based on atomic functions. En *Proceedings of 19th Latin American Control Congress (LACC 2022)*, pp. 239–250. Springer International Publishing.
- García-Castro, O. F., Ramos-Velasco, L. E., García-Rodríguez, R., Vega-Navarrete, M. A., Escamilla-Hernández, E., y Oliva-Moreno, L. N. (2022a). Estudio comparativo de controladores PID WaveNet-IIR aplicado a un helicóptero de 2 GDL. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 10(Especial5):36–42.
- García-Castro, O. F., Ramos-Velasco, L. E., Vega-Navarrete, M. A., García-Rodríguez, R., Domínguez-Mayorga, C. R., Escamilla-Hernández, E., y Oliva-Moreno, L. N. (2022b). RBF neural network based on FT-windows for auto-tuning PID controller. En *Advances in Computational Intelligence*, pp. 138–149. Springer Nature Switzerland.
- Hespanha, J. P. (2021). *Advanced undergraduate topics in control systems design*. Universidad de California.
- Inc., Q. (2012). *User manual 2 DOF helicopter experiment, set up and configuration*. Markham, Ontario.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., y Tibshirani, R. (2021). *Introduction to Statistical Learning With Applications in R*. Springer.
- Khalil, H. K. (2015). *Nonlinear control*, volumen 406. Pearson New York.
- Mendoza-Monjaraz, E., Cruz-Tolentino, J. A., Jarillo-Silva, A., y Pacheco-Mendoza, J. (2015). Implementación de un control multiresolución empleando un dispositivo háptico. *Research in Computing Science*, 91(1):167–178.
- Navarrete, M. V., Velasco, L. R., Mayorga, C. D., Carreón, P. A., Hernández, J. V., Romero, V. D., Parra-Vega, V., y Vera, M. M. (2018). Output feedback self-tuning wavenet control for underactuated Euler-Lagrange systems. *IFAC-PapersOnLine*, 51(13):633–638.
- Parvez, S. y Gao, Z. (2005). A wavelet-based multiresolution PID controller. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 41(2):537–543.
- Vetterli, M. y Kovačević, J. (1995). *Wavelets and subband coding*. Prentice-hall.
- Zamora, J. D. R., Ramírez, O. A. D., Cervantes, G. S., Velasco, L. E. R., y Silva, A. J. (2022). Interfaz háptica adaptable para neurorehabilitación y fisioterapia asistida en miembro superior. *Pádi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 10(Especial3):30–39.
- Zhang, P., Daraz, A., Malik, S., Sun, C., Basit, A., y Zhang, G. (2023). Multi-resolution based PID controller for frequency regulation of a hybrid power system with multiple interconnected systems. *Front. Energy Res.*, 1109063(10):1–16.
- Zhang, Q. y Benveniste, A. (1992). Wavelet networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 3(6):889–898.