





Plataforma subactuada para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de control Underactuated device for teaching-learning of control theory

I. F. Manriquez-Silva ^a, D. Escalera-Sierra ^{a,*}, K. F. Maya-Gress ^a, R. Villafuerte-Segura ^a

^aÁrea Académica de Computación y Electrónica, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.

Resumen

La Teoría de Control es un campo interdisciplinario de la ingeniería y las ciencias físico matemáticas que parecen ser incomprendible en un inicio, tal vez debido a la gran cantidad de conocimientos abstractos requeridos, sin embargo, esto parece mejorar al relacionar y aplicar los conceptos adquiridos sobre plataformas experimentales. Así, al resaltar las clases prácticas sobre las especulativas se fomenta la capacidad creativa en los estudiantes (Klimenko and Botero Castello, 2016). Desafortunadamente, en la mayoría de los laboratorios de las escuelas superiores del país (México) no se cuenta con el equipo adecuado para poder implementar dicha teoría. Razón por la cual, en este manuscrito se presenta el diseño y la construcción de una plataforma experimental subactuada conocida como carro-péndulo de muy bajo costo y mantenimiento, para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de control clásica.

Palabras Clave: carro-péndulo, enseñanza-aprendizaje, control clásico.

Abstract

Control Theory is an interdisciplinary field of engineering and mathematical physical sciences that seems to be incomprehensible at first, perhaps due to the large amount of abstract knowledge required. However, this seems to improve by relating and applying the acquired concepts on experimental platforms. Thus, by highlighting the practical classes over the speculative ones, the creative capacity of the students is fostered (Klimenko and Botero Castello, 2016). Unfortunately, in most of the laboratories of the higher schools of the country (Mexico) there is not the adequate equipment to be able to implement said theory. For this reason, this manuscript presents the design and construction of an underactuated experimental platform of cost and maintenance low, it is known as cart-pendulum system, for the teaching-learning of control theory.

Keywords: cart-pendulum system, teaching-learning, classical control theory.

1. Introducción

Un carro-péndulo es una plataforma que consta de un péndulo invertido adaptado sobre un carro, con dos grados de libertad o movimientos: $\chi(t)$ posición horizontal/traslacional del carro y $\theta(t)$ posición vertical/angular del péndulo (Ruvalcaba et al., 2010). Se dice subactuado ya que en su estructura se tienen más grados de libertad que actuadores, es decir, solo con la actuación sobre la posición del carro se desea manipular la posición del péndulo. Esta plataforma es una de las más conocidas y empleadas por la comunidad científica debido a su gran similitud con otros sistemas de la vida real, tales como: cohete aeroespacial, que requiere un control activo para mantenerlo en posición vertical durante su despegue; un robot bípedo en el que

se puede controlar su equilibrio para mantener la verticalidad, como se menciona en Murillo Herrera et al. (2019); asimismo, bajo el mismo principio del péndulo invertido se han diseñado transportes de ruedas en un solo eje (segway) o incluso con una sola rueda, esto sin la necesidad de un esfuerzo de operador por mantener la verticalidad, entre otras. Sin lugar a duda, esta plataforma desafía el ingenio y la habilidad de los estudiantes de nivel superior, además de ser un excelente sistema en donde se puede aplicar una gran cantidad de conocimientos físico matemáticos.

El diseño y la construcción de esta plataforma de pruebas comenzaron con principios mecánicos básicos, donde se empleaban trenes de engranajes, desde ese entonces hasta hoy en día, los avances tecnológicos han permitido mejores resultados,

* Autor para correspondencia: es421544@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: ma420739@uaeh.edu.mx (Isaac Fernando Manriquez-Silva), es421544@uaeh.edu.mx (David Escalera-Sierra), kristian_maya10493@uaeh.edu.mx (Kristian Freyri Maya-Gress), villafuerte@uaeh.edu.mx (Raúl Villafuerte-Segura).

Historial del manuscrito: recibido el 01/07/2023, última versión-revisada recibida el 27/09/2023, aceptado el 21/09/2023, publicado el 30/11/2023. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v11iEspecial4.11404>



empleando tarjetas poco económicas y/o comunicación con ordenadores especiales para el manejo de datos, cuyas interfaces resultan tan complejas que incluso requieren de una capacitación, tanto en el software como en el hardware (Quanser, 2023). Además se trata de equipo sofisticado e industrial, donde la instalación y los requisitos específicos deben ser acatados puntualmente, ya sea por seguridad o para el buen funcionamiento, sin olvidar los altos costos para su adquisición.

A lo largo de los años, el análisis para la comprensión de esta plataforma ha sufrido varios cambios y adecuaciones. Desde sus primeros estudios solo sobre el péndulo simple al rededor de sus dos puntos de equilibrio: uno estable y otro inestable. Típicamente, un estudio sobre un péndulo invertido es aquel que se realiza sobre un péndulo simple al rededor del equilibrio inestable. Estos comportamientos inherentes (estable e inestable) y su facilidad de enseñar-aprender resulta un producto muy atractivo, razón por la cual su dinámicos y control han sido bien estudiadas por la comunidad del área (Huerta Gil, 2015). Incluso, Stephenson (1908) examinó el péndulo invertido y demostró que podía ser estabilizado al aplicar oscilaciones armónicas, rápidas y verticales a su base. Años más tarde, Lowenstern (1932) desarrolló ecuaciones de movimiento general para los péndulos invertidos, las cuales se relacionaban con el trabajo de Stephenson.

Para los años 60's la dinámica del péndulo invertido ya era bien conocida y varios artículos de esta época trataban sobre soluciones analíticas y aproximadas ante la respuesta de distintas entradas. Estas entradas eran por lo general señales sinusoidales, aleatorias o impulsos. En particular, varios investigadores demostraron que las entradas de conducción de alta frecuencia en las direcciones vertical y horizontal podrían estabilizar el péndulo (Bogdanoff and Citron, 1965; Phelps III and Hunter Jr, 1965; Blitzer, 1965; Ness, 1967).

En los años 80's algunos artículos presentaban controladores que podían estabilizar el péndulo invertido para una mayor variedad de entradas como señales parabólicas o de diente de sierra (Pippard, 1987). Por otra parte, Sahba (1983) utilizó un algoritmo de optimización para diseñar un servo controlador en lugar de utilizar método usual de diseño de controladores por linealización del sistema. Después, Yamakawa (1989) utilizó un controlador por lógica difusa con un procesador de gran poder con ese mismo propósito. Hernández Largacha et al. (2012) de la Universidad de Waseda en Japón, construyó el NXTwat el cual innovó considerablemente la forma de observar y analizar el péndulo invertido añadiendo un control remoto con la función de balancear y desplaza el robot. Desde entonces el péndulo invertido montado en una carro móvil representa una plataforma de pruebas para validar nuevas teorías de control (Castro, 2012).

A inicios de milenio, un estudio desarrolló un sistema de control en tiempo real para el sistema carro-péndulo, Cornejo Romero (2023), al realizar el modelo matemático del sistema, concluyó que las ecuaciones dinámicas del sistema son no lineales, por lo que para lograr una representación en variables de estado se recurrió a la linealización por medio de la serie de Taylor. Dicho sistema de control utiliza la herramienta de MATLAB, y una vez que los resultados de simulación en Simulink fueron satisfactorios, se inició con la interfaz en tiempo real en el sistema físico, sin embargo, se menciona que dicha

herramienta no soporta los contadores de la tarjeta de National Instruments por lo que se requirió del uso de una tarjeta adicional para adquirir la señal de posición angular.

Por otra parte, Ponce (2022) propuso una metodología para aplicar un control LQR utilizando un sistema equivalente lineal, lo cual evita la linealización del sistema. La metodología se aplicó a un sistema carro péndulo invertido, donde se simuló el sistema en lazo cerrado y se comparó su comportamiento con el caso donde se aplica la linealización del sistema. Los resultados muestran que al utilizar el sistema equivalente lineal se amplía la región de aplicación del controlador LQR, y el índice de desempeño definido por el control LQR es mejor que en el caso de la aplicación del sistema linealizado.

Por otra parte, estudios recientes comprueban que la enseñanza-aprendizaje de disciplinas, como la Teoría de Control, que requieren del conocimiento y la comprensión de conceptos teóricos abstractos en sí son difíciles, complicados y destinados a *los más inteligentes*, donde además se habla de un círculo vicioso (dificultad, aburrimiento, suspenso, fatalismo, bajo auto concepto, desmotivación, rechazo, dificultad), lo que confirma la mutua dependencia entre lo cognitivo y lo emocional (Blanco, 2012).

Además, estudios realizados por la Universidad de Chile (Aliste et al., 2006), el modelo de estilos de aprendizaje considera que la vía de ingreso de información al cerebro puede ser mediante el ojo, oído, cuerpo (estilos de aprendizaje de la Programación Neurolingüística - PNL) (Cazau, 2004) resultando fundamental en las preferencias de quién aprende o enseña, y de acuerdo a la prueba de la Programación Neurolingüística de Blander y Grindler, realizados en alumnado de la Universidad Autónoma de Tamaulipas en Tampico, Tamaulipas, México, los resultados precisan que en los estudiantes predomina el aprendizaje kinestésico con un 58.2 %, observándose relación entre el estilo de formación y el rendimiento académico (Cervantes López et al., 2020).

Sin lugar a duda, la asignatura de Teoría de Control que suele ser incomprensible a inicios del curso, puede ser favorecida al relacionarla con clases prácticas sobre una plataforma experimental de fácil construcción y bajo costo, como la aquí propuesta. Además, de que esta plataforma permite ratificar y ejemplificar conocimientos básicos y abstractos de otras áreas, tanto de la propia asignatura como de otras (Infante et al., 2021).

En este manuscrito se presenta el diseño y la construcción de una plataforma experimental subactuada conocida como carro-péndulo de muy bajo costo y mantenimiento, para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de control. El diseño de la plataforma propuesta se realiza empleando el software CAD *SolidWorks*. Dicho diseño es laminado en *Ultimaker Cura* para su posterior impresión 3D en Código G (lenguaje de las máquinas CNC). Compuesto por un total de diez piezas: dos bases para los extremos, un carro, un acople del péndulo, un soporte para el sensor de distancia, una pared para su respectiva detección y cuatro límites para las guías transversales. En un extremo se coloca el actuador, motor de 12V DC de una velocidad de 1000 RPM, que junto con una polea de veinte dientes y una correa de distribución tipo *GT2*, permite el desplazamiento continuo. Para el sensado de la posición del carro, se emplea un módulo de rango *ultrasónico HC-SR04* ubicado en un extremo de la base

de la plataforma. Mientras que para la medición del posicionamiento angular, se ocupa un potenciómetro rotativo de una variación del tipo lineal de $10k\ \text{ohms}$. El software *NI LabVIEW* se utiliza para el procesamiento de datos e implementación de controladores, y una tarjeta de desarrollo *Arduino UNO* para la adquisición de datos. Finalmente, con el propósito de demostrar la efectividad y el buen desempeño de la plataforma experimental propuesta; y sin pérdida de generalidad, se implementó una ley de control PD+PD, mejor conocida como retroalimentación de estado, para la estabilización de la misma. Para la sintonización de las ganancias se implementaron dos técnicas clásicas y muy conocidas por la comunidad del área: asignación de polos y mediante la factibilidad de desigualdades lineales matriciales (LMIs).

Lo subsecuente de este trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: el planteamiento del problema y las contribuciones se presentan en la Sección 2, mientras que en la Sección 3 se presentan algunos conceptos y resultados teóricos necesarios para el desarrollo y aplicación de la teoría de control sobre la plataforma experimental. En la Sección 4 se presenta el diseño y construcción de la plataforma experimental. En la Sección 5 se realiza un análisis del espacio de estado y se proponen una retroalimentación de estado sintonizada por dos técnicas clásicas y bien conocidas. Seguido de la Sección 6, en donde se presentan los medios para la adquisición y el procesamiento de señales. Para corroborar la pertinencia y buen funcionamiento de la plataforma experimental propuesta, en la Sección 7 se muestra la implementación de un controlador PD+PD o retroalimentación de estado sobre el carro-péndulo. Finalmente, en la Sección 8 se presentan las conclusiones.

2. Planteamiento del problema y contribuciones

2.1. Planteamiento del problema

Como se mencionó anteriormente, al resaltar las clases prácticas sobre las especulativas se fomenta la capacidad creativa en los estudiantes. Una de la plataformas experimentales más empleadas por la comunidad de área, es aquella conocida como carro-péndulo, ver Figura 1. Sin lugar a duda, esta plataforma puede coadyuvar a fomentar dicha creatividad.

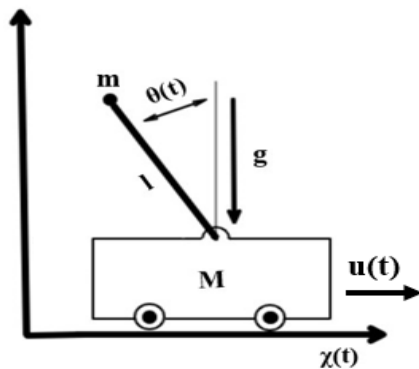


Figura 1: Representación de fuerzas sobre el péndulo.

Desafortunadamente, debido a los altos costos de construcción y/o adquisición partiendo de las tiendas digitales, donde se encuentra un precio estándar sin gastos de envío por \$4,300;

al cual se le añade un costo extra dependiendo los accesorios y mejoras electrónicas como es el caso del “Péndulo Invertido lineal IP570”: <https://costos.link/pendulo>; la mayoría de los laboratorios de las escuelas superiores del país (México) no cuentan con plataformas experimentales de este tipo. Además, su diseño, construcción, comprensión y control requieren de conocimientos básicos y abstractos de diferentes áreas de la ingeniería y las matemáticas.

2.2. Contribuciones

- Diseño y construcción de una plataformas subactuada conocida como carro-péndulo para la enseñanza-aprendizaje de la Teoría de Control.
- Implementación de un controladores clásicos PD+PD mediante el empleo del software *NI LabVIEW* y una tarjeta de desarrollo *Arduino UNO*.
- Facilitar el desarrollo de una plataforma experimental flexible y funcional que no supera los \$1,300 MXN, para tener una alternativa sugerente y competitiva a los prototipos comerciales.

3. Preliminares matemáticos

En esta sección se presentan algunos conceptos y resultados teóricos necesarios para el desarrollo y aplicación de la Teoría de Control sobre la plataforma experimental.

3.1. Conceptos y criterios de estabilidad

Considere la siguiente representación de espacio de estados de un sistema lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ es la entrada del sistema, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ es la salida del sistema, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de estado, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ es la matriz de entrada, $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ es la matriz de salida y $D \in \mathbb{R}^{k \times m}$ es la matriz de transmisión directa.

La estabilidad es la propiedad más importante de un sistema. Si un sistema es inestable, su respuesta transitoria y los errores en el estado estable son puntos debatibles. Un sistema lineal e invariante en el tiempo es estable si la respuesta libre tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito (Mazzone, 2002).

Definición 1. (Grossman et al., 2019) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz de $n \times n$ con entradas reales. El número λ (real o complejo) se llama valor propio de A si existe un vector diferente de cero $v \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

El vector v se llama vector propio de A correspondiente al valor propio λ .

Definición 2. (Chen, 1984) El sistema autónomo (1) ($u(t) = 0$) es estable en el sentido de Hurwitz si y solo si todos los valores propios de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tienen parte real negativa.

Theorem 3.1. (Chen, 1984) Todos los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tienen parte real negativa si y solo si para cualquier matriz simétrica definida positiva N , la ecuación de Lyapunov

$$A'M + MA = -N,$$

tiene una única solución simétrica M y esta es definida positiva.

Corollary 3.1.1. (Chen, 1984) Todos los valores propios de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tienen parte real negativa si y solo si para una matriz N de dimensiones $m \times n$ con $m < n$ y la propiedad

$$\text{Rank } O := \text{rank} \begin{bmatrix} \tilde{N} \\ \tilde{N}A \\ \vdots \\ \tilde{N}^{n-1} \end{bmatrix} = n,$$

donde O es una matriz de dimensiones $n \times n$, la ecuación de Lyapunov

$$A'M + MA = -\tilde{N}'\tilde{N} =: -N,$$

tiene una única solución simétrica M y es definida positiva.

Ahora, considerando solo la primera ecuación (ecuación de estado) de (1) y suponiendo que el sistema es no autónomo ($u(t) \neq 0$), se propone la retroalimentación de estado

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (2)$$

Así, se tiene que el lazo cerrado es de la forma

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t). \quad (3)$$

Theorem 3.2. (Chen, 1984) El sistema en lazo cerrado dado en (3) es estable si y solo si existe una matriz $X = X^T$ y una matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que satisfagan las siguientes desigualdades lineales matriciales (LMIs, linear matrix inequalities):

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ AX + BM + XA^T + M^T B^T &< 0. \end{aligned} \quad (4)$$

La función de Lyapunov viene entonces dada por: $V(x) = x^T X^{-1} x$ y las ganancias del controlador (2) son $K = MX^{-1}$.

El teorema anterior es uno de los resultados más empleados por la comunidad de área. Esta se emplea para sintonizar las ganancias de un controlador. Sin embargo, existen otras como la asignación de polos. Este es un método empleado para el diseño y sintonización de controladores que se emplea cuando se quiere que el desempeño del sistema a lazo cerrado cumpla con determinadas especificaciones de diseño. A continuación, este criterio es especificado.

Lemma 3.3 (Asignación de Polos SISO, Mazzone (2002)). Consideremos un lazo de realimentación de un grado de libertad con un controlador $C(s)$ y un modelo nominal $G_0(s)$ dado por

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)}, \quad G_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)}.$$

Suponiendo que $A_0(s)$ y $B_0(s)$ son coprimos y que sus grados son n y $n - 1$, respectivamente. Sea A_{lc} un polinomio arbitrario de grado $n_c = 2n - 1$. Entonces existen polinomios $P(s)$ y $L(s)$, con grados $n_p = n_l = n - 1$ tal que

$$A_0(s)L(s)B_0(s)P(s) = A_{lc}(s).$$

3.2. Controladores PID

Como su nombre lo indica, un control PID, reúne tres acciones de control: proporcional-integral-derivativa. La ecuación de un controlador con esta acción combinada se representa mediante

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt},$$

siendo $0 \neq k_p \in \mathbb{R}$ la ganancia proporcional, $0 \neq k_i \in \mathbb{R}$ el tiempo integral, $0 \neq k_d \in \mathbb{R}$ el tiempo derivativo y $e(t)$ el error con respecto a la referencia; cuya función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p + k_i \frac{1}{s} + k_d s.$$

3.3. Modelo matemático

Para obtener un modelo matemático del sistema carro-péndulo esquematizado en la Figura 1, es importante mencionar que en el análisis del sistema se considera un espacio de trabajo en dos dimensiones, es decir, el péndulo sólo tiene permitido moverse en el plano XY . Proponiendo que al aplicar una fuerza sobre el carro $u(t) \in \mathbb{R}$, está sea la encargada de estabilizar el péndulo. El cual consta de las siguientes variables y constantes, que interactúan entre sí con la finalidad de aplicar la fuerza necesaria que resulta en la estabilización del péndulo:

- $\chi(t) \in \mathbb{R}$: posición traslacional del carro,
- $\theta(t) \in \mathbb{R}$: posición angular del péndulo respecto a la normal vertical,
- $u(t) \in \mathbb{R}$: fuerza/señal de control aplicada al carro,
- $2l \in \mathbb{R}^+$: longitud del péndulo,
- $g \in \mathbb{R}^+$: es la aceleración de la gravedad,
- $M \in \mathbb{R}^+$: masa del carro,
- $m \in \mathbb{R}^+$: masa del péndulo,
- $I \in \mathbb{R}^+$: momento de inercia del péndulo alrededor de su centro de gravedad.

Así, el movimiento angular del péndulo es:

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin(\theta) - Hl \cos(\theta), \quad (5)$$

donde H y V son los movimientos horizontal y vertical del centro de gravedad de la barra del péndulo, respectivamente; y están dado por:

$$\begin{aligned} H &= m \frac{d^2}{dt^2} (\chi + l \sin \theta), \\ V &= m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) + mg. \end{aligned}$$

Mientras que el movimiento traslacional/horizontal del carro es:

$$M\ddot{\chi} = u - H. \quad (6)$$

Dado que se desea mantener al péndulo en posición vertical, se puede suponer que el ángulo de desplazamiento $\theta(t)$ es muy pequeño, es decir, el sistema tendrá perturbaciones de pequeñas oscilaciones, de manera que se define $\theta(t) \approx 0$. Por lo consiguiente, las funciones trigonométricas se pueden simplificar a $\sin \theta \approx 0$ y $\cos \theta = 1$. Por lo que (5) puede reescribirse como:

$$(I + l^2 m)\ddot{\theta}(t) + lm\ddot{\chi}(t) - mgl\theta(t) = 0. \quad (7)$$

Mientras que (6) se reescribe como:

$$(M + m)\ddot{\chi}(t) + ml\ddot{\theta}(t) = u(t). \quad (8)$$

De esta manera, las ecuaciones diferenciales (7) y (8) describen el comportamiento dinámico del posicionamiento angular del péndulo y del posicionamiento traslacional del carro, respectivamente.

4. Diseño y construcción del carro-péndulo

En esta sección se presentan el diseño, construcción y puesta en marcha de la plataforma experimental subactuada conocida como carro-péndulo.

4.1. Diseño y construcción del prototipo

Esta subsección está dividida en tres partes: diseño asistido por computadora (CAD, computer-aided design), electrónica y procesamiento de señales; y puesta en marcha del carro-péndulo.

4.1.1. CAD del prototipo

El diseño de la plataforma propuesta se realiza empleando el software CAD *SolidWorks*. De acuerdo a una entidad bidimensional creada a partir de líneas, rectángulos y círculos se crea el diseño 3D mediante operaciones básicas, como lo son “Extruir saliente/base”, “Extruir corte”, “Redondeo”, entre otras, ver Figura 2.

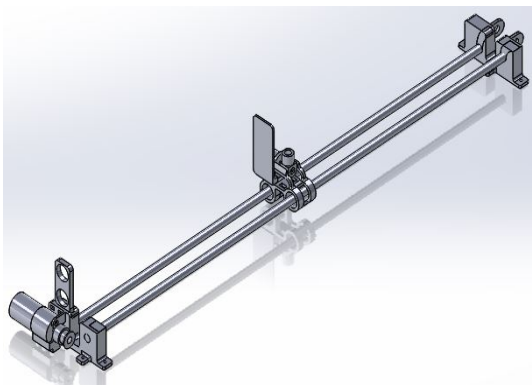


Figura 2: Plataforma final propuesta diseñado en *SolidWorks* 2019.

Algunas piezas creadas en *SolidWorks* fueron laminadas en *Ultimaker Cura* para su posterior impresión 3D en Código G (lenguaje de las máquinas CNC), con el uso de una bobina de 1kg de material PLA de color blanco cuyo diámetro es

de $1.75\text{mm} \pm 0.02$; a una temperatura de extrusión de 195°C , a 35°C en la cama caliente y a una velocidad de 40 mm/s . El PLA es un material biodegradable de bajo costo y accesible, ya que se encuentra en cualquier tienda en línea. De esta manera se realiza un total de nueve piezas (Figura 3), utilizando un aproximado de 55 gramos, con un valor total de \$38.28.

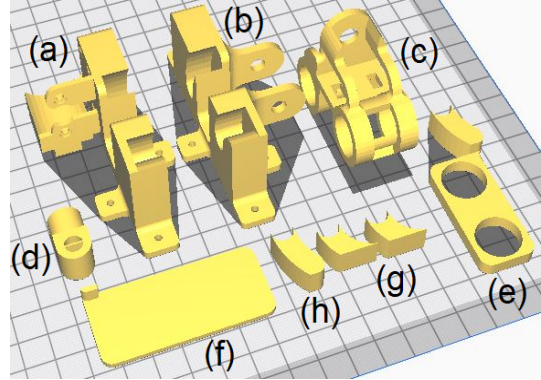


Figura 3: Bases para el extremo izquierdo (a) y para el extremo derecho (b), (c) carro o parte móvil, (d) acople del péndulo, (e) soporte para el sensor de distancia, (f) pared para su respectiva detección y límites superiores (g) e inferiores (h) para las guías transversales.

4.1.2. Electrónica y procesamiento de señales del prototipo

Para la adquisición de datos se utiliza la tarjeta *Arduino UNO*. Esta tarjeta se caracteriza por ser de bajo costo y cuenta con su propia interfaz de programación. Sin embargo, para mejorar el procesamiento y visualización de señales se ocupa *NI LabVIEW*.

Como actuador, se utiliza un motor DC de 12 Volts, de 1000 RPM, el cual permite una respuesta suficientemente rápida en la posición de carro $\chi(t)$. El sentido de giro del motor se determina mediante un puente *H* módulo L298N. Para la etapa de potencia se trabaja con una fuente externa de 12 Volts DC (Figura 4).

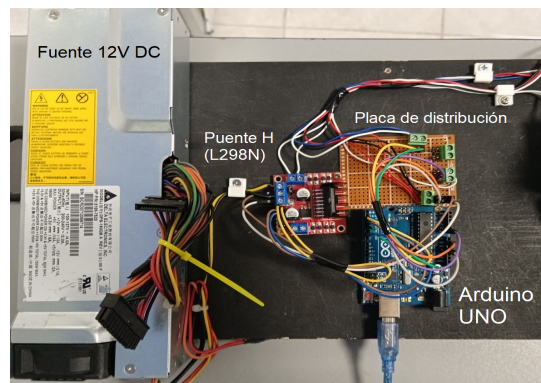


Figura 4: Electrónica principal del prototipo.

Para determinar la posición traslacional del carro (parte móvil) se hace uso del módulo de rango ultrasónico *HC-SR04*, ya que es de fácil adquisición y bajo costo. Dicho módulo es un modelo reflexivo del transductor ultrasónico, un oscilador emite y recibe ondas ultrasónicas. Estableciendo la distancia mediante el uso de ondas ultrasónicas: el cabezal emite una onda ultrasónica y recibe la onda reflejada que regresa del objeto.

Para la posición angular del péndulo, se hace uso de un potenciómetro rotativo de una variación del tipo lineal de $10K\Omega$, ya que al ser variable y de fácil adquisición se descartaron otros sensores específicamente fabricados para esta aplicación, como el giroscopio *MPU6050*.

4.1.3. Construcción y puesta en marcha del prototipo

El prototipo consta principalmente de dos extremos laterales y una parte móvil (también llamada carro), las cuales fueron diseñadas para ser ensambladas a presión sin dañar los materiales. Esto permite no usar ningún tipo de pegamento y facilita el desarmado y armado del mismo, como un set/kit de aprendizaje. Los extremos están separados por dos varillas lisas lineales con eje acerado de diámetro de 8mm y longitud de 0.6m, los cuales están asegurados por los límites superiores e inferiores, ver Figura 5.

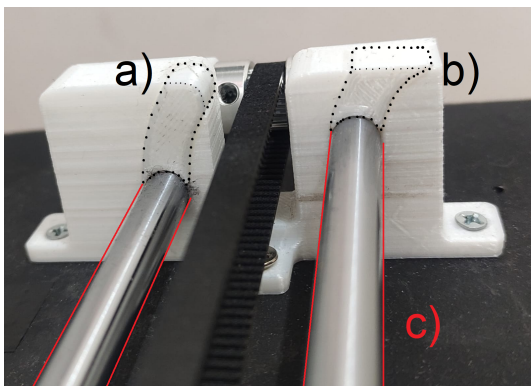


Figura 5: Extremo derecho: a) límite inferior, b) límite superior, c) varillas lisas lineales. Aplica lo mismo para el extremo izquierdo.

En el extremo izquierdo se coloca el actuador, un motor DC a 12 volts por la parte externa, de manera que el eje de giro señale a la parte frontal del conjunto; dicho motor es fijado con dos cinchos. Así mismo el módulo ultrasónico *HC-SR04* es ubicado sobre este extremo de forma vertical con ayuda de su propio soporte, que a su vez es parte de un límite inferior, por lo que no necesita de una adherencia física, ver Figura 6. Dicho sensor será el encargado de estabilizar el sistema en la posición central (mitad) de las varillas lineales, que, de acuerdo al diseño es aproximadamente $\chi^* = 25.845\text{cm}$.

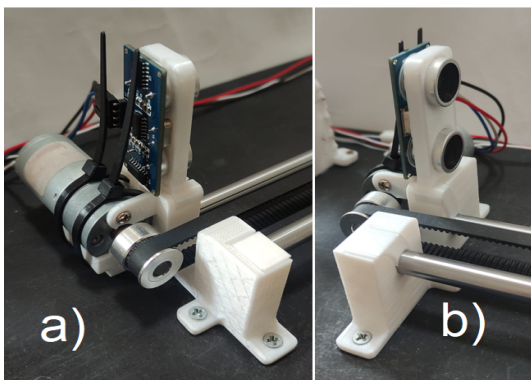


Figura 6: Extremo izquierdo; a) motor DC colocado, b) sensor *HC-SR04* encajado verticalmente.

El movimiento de la plataforma se debe a dos poleas dentadas de veinte dientes de aleación de aluminio, especial para la correa de distribución tipo *GT2*, este material es utilizado en los desplazamientos lineales de una impresora 3D del tipo cartesiana, que permite el desplazamiento continuo gracias a que en el otro extremo se encuentra otra polea del mismo tipo. De esta manera se facilita la transición entre diente y diente a lo largo del trayecto y tener un movimiento suave (Figura 7).

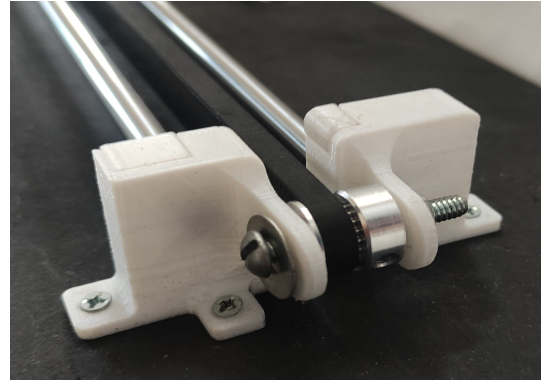


Figura 7: Extremo derecho de la base.

La parte móvil o carro, cuenta con dos baleros lineales acoplados a estructuras cilíndricas sujetas a las guías transversales (varrillas de acero), que reducen la fricción al momento del desplazamiento. Además, para la detección de su posición por parte del módulo *HC-SR04* se agrega una estructura lateral de área rectangular. Para la adquisición del posicionamiento angular, se tiene un potenciómetro rotativo convencional, ensamblado en el propio carro con ayuda de su propia rondana y tuerca. Este potenciómetro usa un acople en su eje que soporta una varilla de madera de 5mm de diámetro, con una longitud de 1.20 m, que permite un ángulo de apertura de $\pm 10^\circ$ respecto a la vertical (Figura 8). De acuerdo a varias pruebas realizadas y a la baja calidad en la lectura del potenciómetro, se observa que cuando la posición angular $\theta(t)$ del péndulo se encuentra en la vertical (punto de equilibrio inestables), la lectura del potenciómetro entrega un valor entre 2.43 y 2.49V. Por lo que se descarta un valor fijo, p. eje. 2.45V, como punto de referencia y este se determina al momento de iniciar y calibrar el sistema.

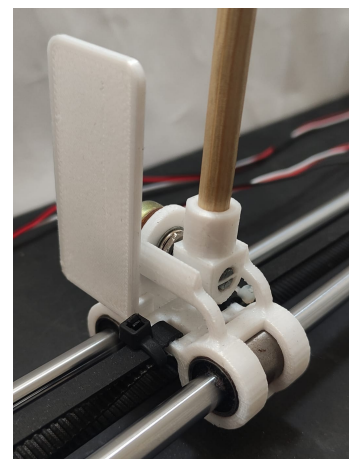


Figura 8: Carro (parte móvil del sistema).

Para obtener firmeza, las bases de la estructura se fijan a una tabla de madera de 1.5 m de longitud por 20 cm de ancho. La versión final del prototipo carro-péndulo se puede observar en la Figura 9. Los materiales requeridos y costos para el ensamble del prototipo se especifican en la Tabla 1, de igual manera se anexa la Tabla 2 agregando los detalles eléctricos de cada componente.

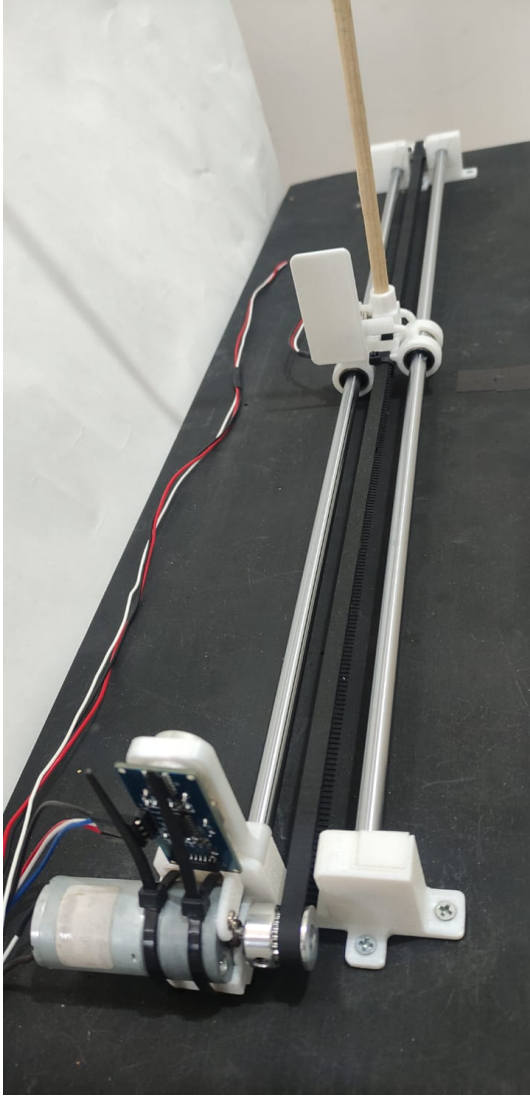


Figura 9: Estructura final del sistema carro-péndulo.

Tabla 1: Materiales utilizados y costo en pesos mexicanos del prototipo.

2 x Rodamiento lineal	LM8UU	\$148 MXN
2 x Varilla de acero	0.60m, $\phi = 8\text{mm}$	\$114 MXN
Banda dentada	GT2	\$300 MXN
Poleas dentadas	$\phi = 5\text{mm}$	\$140 MXN
Motor 12V DC	GA25YN370	\$173 MXN
Tornillo	$\phi = 4.5\text{mm}$	\$30 MXN
2 x Cincho	4.6x120mm	\$5 MXN
Arduino UNO	-	\$136 MXN
Fuente de voltaje	12V; 2A	\$116 MXN
Sensor ultrasónico	HCSR - 04	\$29 MXN
Potenciómetro rotativo	10 k Ω	\$9 MXN
Puente H	L298N	\$70 MXN
Total		\$1270 MXN

Tabla 2: Características eléctricas de los componentes hardware.

Motor DC	Voltaje nominal: 5 - 12 (V). Corriente nominal: 6 (mA). Potencia nominal: 3.5 (W). Velocidad angular: 1000 (RPM).
Arduino UNO	Fs: 65 (KHz). Velocidad de reloj: 16 (MHz). Voltaje de trabajo: 5 (V). Voltaje de entrada: 7.5 - 12 (V).
Fuente de voltaje	Voltaje nominal: 12 (VDC). Corriente nominal: 2 (A). Temperatura de trabajo: 0 - 50 (°C).
Sensor ultrasónico	Voltaje nominal: 5 (V). Corriente nominal: 1.5 (mA). Frecuencia de pulso: 40 (KHz). Rango de medición: 2 - 400 (cm).
Puente H	Voltaje nominal: 5 - 35 (V). Corriente nominal: 36 (mA). Capacidad de corriente: 2 (A). Potencia nominal: 20 (W).

5. Análisis y control del carro-péndulo

Para el análisis del comportamiento del sistema carro-péndulo se considera una representación en espacio de estado, la cual es una forma matemática de un sistema físico en términos de variables de entrada, salida y estado que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. El espacio de estado ayuda a tener una representación de un sistema con el mínimo número de variables, de forma que permite convertir las ecuaciones matemáticas en matrices con la finalidad de tener un mejor estudio de las mismas.

Recordando las ecuaciones (7) y (8) que describen las dinámicas del sistema carro-péndulo y realizando el cambio de variable $x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$, $x_3(t) = \chi(t)$ y $x_4(t) = \dot{\chi}(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{(M+m)gx_1(t)}{Ml} - \frac{u(t)}{Ml}, \\ \dot{x}_4(t) &= \frac{u(t)}{M} - \frac{mgx_1(t)}{M}, \end{aligned}$$

o en términos de una ecuación diferencial matricial de primer orden, conocida como ecuación de estado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -b_1 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix}}_B u(t), \quad (9)$$

donde $a_1 = \frac{(M+m)g}{Ml}$, $a_2 = \frac{mg}{M}$, $b_1 = \frac{1}{Ml}$, $b_2 = \frac{1}{M}$. Si se consideran la posición rotacional del péndulo $\theta(t)$ y la posición traslacional del carro $\chi(t)$ como las salidas del sistema, entonces la

ecuación de salida es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}. \quad (10)$$

Así, las ecuaciones de estado (9) y salida (10) forman el espacio de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (11)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$, $x(t) \in \mathbb{R}^4$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$ y $u(t) \in \mathbb{R}$. Este tipo de sistemas son conocidos como sistemas *SIMO* (Simple Input Multiple Output), ya que tiene una entrada ($u(t)$, control de velocidad y sentido de giro del motor) y múltiples salidas ($\theta(t)$ y $\chi(t)$). Además de ser un sistema subactuado ya que el sistema tiene dos grados de libertad $\theta(t)$ y $\chi(t)$; y solo un actuador sobre $\chi(t)$.

5.1. Inestabilidad del sistema autónomo

El analizar la estabilidad del sistema carro-péndulo, se puede realizar en el enfoque frecuencial o temporal. A continuación, se muestra la correlación entre estos.

Aplicando la transformada de Laplace a (11) se tiene que

$$sX(s) = AX(s) + BU(s), \quad (12)$$

$$Y(s) = CX(s). \quad (13)$$

De la ecuación (12) se obtiene que

$$X(s) = [sI - A]^{-1}BU(s). \quad (14)$$

Combinando (13) y (14) se llega a que

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \operatorname{adj}[sI - A] B}{|sI - A|}, \quad (15)$$

donde $\operatorname{adj}[A]$ y $|A|$ son la matriz adjunta y el determinante de A , respectivamente. Ahora, es bien sabido que el denominador de (15) es el polinomio característico del sistema (11), es decir

$$\begin{aligned} p(s) &= |sI - A| \\ &= s^4 - a_1 s^2, \end{aligned}$$

por lo que el sistema autónomo (sin entrada de control) tiene cuatro raíces, las cuales se encuentran en:

$$s_{1,2} = 0 \text{ y } s_{3,4} = \pm \sqrt{a_1}.$$

Debido a que las masas, la longitud y la gravedad son magnitudes reales positivas, la constante a_1 expresada en (9) es un número real positivo, así se tiene que la raíz $s_4 = +\sqrt{a_1}$ se encuentra en el lado derecho del plano complejo, por lo tanto el sistema autónomo es inherentemente **inestable**.

5.2. Sistema en lazo cerrado con controlador PD+PD

En esta subsección se presenta dos métodos para sintonización de un controlador PD+PD: uno mediante la colocación de polos y otro empleando la factibilidad de la LMI dada en (4).

Considere una ley de control PD+PD, es decir, un control PD en términos de $\theta(t)$ más un control PD en términos de $\chi(t)$, cuya forma es

$$\begin{aligned} u(t) &= k_{p_2}\theta(t) + k_{d_2}\dot{\theta}(t) + k_{p_1}\chi(t) + k_{d_1}\dot{\chi}(t) \\ &= k_{p_2}x_1(t) + k_{d_2}x_2(t) + k_{p_1}x_3(t) + k_{d_1}x_4(t) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_{p_2} & k_{d_2} & k_{p_1} & k_{d_1} \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}}_{x(t)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Así, el sistema (11) en lazo cerrado con el control (16) es de la forma

$$\dot{x}(t) = \underbrace{(A + BK)}_{\hat{A}} x(t), \quad (17)$$

y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(s) &= |sI - \hat{A}| \\ &= s^4 + (b_1k_{d_2} - b_2k_{d_1})s^3 + (b_1k_{p_2} - b_2k_{p_1} - a_1)s^2 \\ &\quad + (a_1b_2 - a_2b_1)k_{d_1}s + (a_1b_2 - b_1a_2)k_{p_1}. \end{aligned} \quad (18)$$

5.2.1. Sintonización por asignación de polos

Para sintonizar las ganancias del controlador (16) se empleara la técnica conocida como asignación de polos o colocación de raíces, ver Lema 3.3. Sin pérdida de generalidad, se propone un polinomio deseado de cuarto orden, el cual tiene sus cuatro raíces en -1 , es decir, $s_i = -1$, $i = 1, \dots, 4$, siendo de la forma

$$\begin{aligned} p_d(s) &= (s + 1)^4 \\ &= s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Es claro que el polinomio (18) puede tener las mismas raíces que el polinomio (19) si

$$\begin{aligned} b_1k_{d_2} - b_2k_{d_1} &= 4 \implies k_{p_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ b_1k_{p_2} - b_2k_{p_1} - a_1 &= 6 \implies k_{d_1} = \frac{4}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ (a_1b_2 - a_2b_1)k_{d_1} &= 4 \implies k_{p_2} = \frac{6 + a_1 + b_2K_{p_1}}{b_1}, \\ (a_1b_2 - b_1a_2)k_{p_1} &= 1 \implies k_{d_2} = \frac{4 + b_2K_{d_1}}{b_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

5.2.2. Sintonización empleando LMIs

Aunque existen diferentes métodos para sintonizar una ley de control, por ejemplo la retroalimentación de estado de la forma (16), uno de las técnicas más empleadas por la comunidad científica es obteniendo factibilidad de una LMI, ver Teorema 3.2.

Considere el sistema en lazo cerrado dado en (17), el Teorema 3.2 y los siguientes valores para los parámetros de la plataforma experimental:

$$\begin{aligned} M &= 0.0427kg, & m &= 0.119kg, \\ l &= 0.6m, & g &= 9.81m/s^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Se utiliza la herramienta de MATLAB LMItoolbox, que ofrece poderosos solucionadores LMI junto con herramientas para especificar y manipular problemas de LMI de una manera directa teniendo cuatro etapas principales: la inicialización, donde se declaran las variables; la descripción, donde se describen las LMIs a utilizar; la prueba, donde se toman las LMIs creadas y se mandan llamar a alguno de los tres posibles solucionadores que son *feasp*, *mincx* y *gevp*; por último la etapa de resultados, donde se determina si los resultados arrojados por el solucionador tuvo solución o no (Bernal et al., 2019). Con apoyo de esta herramienta LMItoolbox se obtiene la factibilidad para la LMI dadas en (4), donde

$$X = \begin{bmatrix} 0.2751 & -1.4108 & 0.6280 & -0.5170 \\ -1.4108 & 40.6888 & -0.2545 & 37.1585 \\ 0.6280 & -0.2545 & 22.2130 & -8.5272 \\ -0.5170 & 37.1585 & -8.5272 & 61.3851 \end{bmatrix} > 0, \quad y$$

$$M = \begin{bmatrix} -1.4223 & 1.8717 & -1.9323 & -1.2503 \end{bmatrix}.$$

Así, las ganancias del controlador (16) son

$$K = MX^{-1} = \begin{bmatrix} -6.8760 & -0.3121 & 0.1545 & 0.1321 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

6. Procesamiento de señales

Para la adquisición y envío de datos se empleó una tarjeta de desarrollo *Arduino Uno*, del cual el ADC puede tomar muestras de voltaje en el rango de 0 a 5 volts con una resolución de 10 bits. Mientras que el procesamiento de las señales/datos se empleó la interfaz de *LabVIEW*, que viene siendo un lenguaje de programación gráfico con características para aplicaciones de simulación, control y DAQ.

Además, se utiliza el toolkit (kit de herramientas) *LabVIEW LINX* que agrega soporte a plataformas integradas como *Arduino*, *Raspberry Pi* y *BeagleBone* en *LabVIEW*. Mismo que es considerado un complemento que hace posible programar estos dispositivos usando dicho lenguaje. De esa manera permite crear aplicaciones de registro de datos, etc. sin la necesidad de un costoso dispositivo DAQ (Halvorsen, 2011). En esta interfaz se programa la propuesta de control PD+PD, haciendo la comunicación con la plataforma experimental, con un periodo de muestreo determinado por la misma programación en dicha interfaz de 0.05 segundos (50 ms).

Por otro lado, se emplearon ventanas gráficas para apreciar la respuesta, la señal de control y el error del sistema.

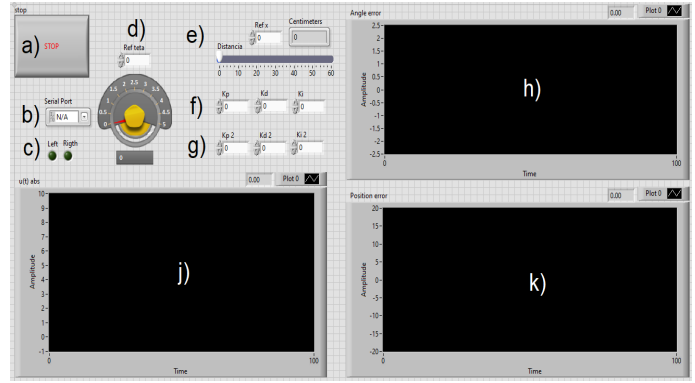


Figura 10: Panel frontal en la interfaz de *LabVIEW*; a) botón de paro, b) Selector para el puerto serial, c) Indicadores booleanos (en forma de LED), d) lectura del potenciómetro, e) lectura del módulo *HC-SR04*, f) ganancias para el control del posicionamiento angular en forma de constantes, g) ganancias para el control del posicionamiento transversal en forma de constantes, h) gráfica del error angular, j) gráfica de la señal PWM enviada al actuador, k) gráfica del error transversal.

En la Figura 10 se puede apreciar el Panel Frontal (*Front Panel*), el cual se detalla a continuación:

- Un botón digital de paro, para poder detener el ciclo *while* del diagrama de bloques, estructura que se utiliza para ejecutar un bloque de código *LabVIEW* repetidamente hasta que se cumple una condición determinada;
- Selector del puerto serial, para la comunicación con la tarjeta *Arduino UNO*, tratándose de un protocolo estandarizado que permite el intercambio de información en forma de bits entre dos o más dispositivos. Para este caso se hace usando los puertos USB de cada uno;
- Control de constantes, para poder ir modificando las ganancias en tiempo real, suministrando datos al diagrama de bloques del archivo VI;
- Indicadores: para el ángulo del péndulo, distancia detectada por el ultrasónico y dos en forma de LED digital, los cuales indican el sentido de giro del motor, que simulan dispositivos de salida de instrumentos y muestran los datos que el diagrama de bloques adquiere o genera;
- Graficadores: para el error del ángulo, error del posicionamiento transversal y la señal PWM enviada al actuador, estos muestran información adquirida en un intervalo de tiempo constante.

Por otro lado, el Diagrama de Bloques (*Block Diagram*) tiene el ciclo *while*, donde se inicializa y cierra con los bloques del toolkit *LabVIEW LINX*, mismo que se comunica por puerto serial con la tarjeta de adquisición de datos, ver Figura 11.

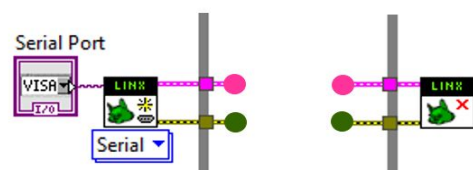


Figura 11: Comunicación por puerto serial: LINX.

Para el control de la posición angular $\theta(t)$, se da inicio con la lectura analógica del potenciómetro en el puerto A0 de la tarjeta *Arduino*, dicha señal es filtrada para su posterior visualización y restada por una constante, con el nombre de Referencia angular, mismo resultado que es enviado al bloque de control PD+PD (Figura 12).

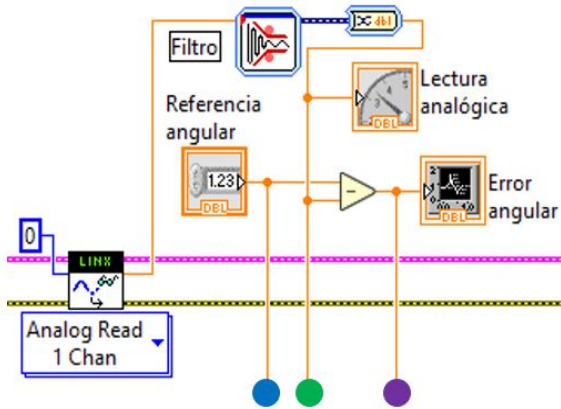


Figura 12: Lectura, referencia y error angular: LabVIEW LINX.

En la Figura 13 se muestra la recepción de la señal de error angular, esta señal es procesada en un bucle de simulación y control (*Control & Simulation Loop*), que permite al usuario manipular las ganancias del controlador PD. Aquí el valor de la ganancia integral es cero.

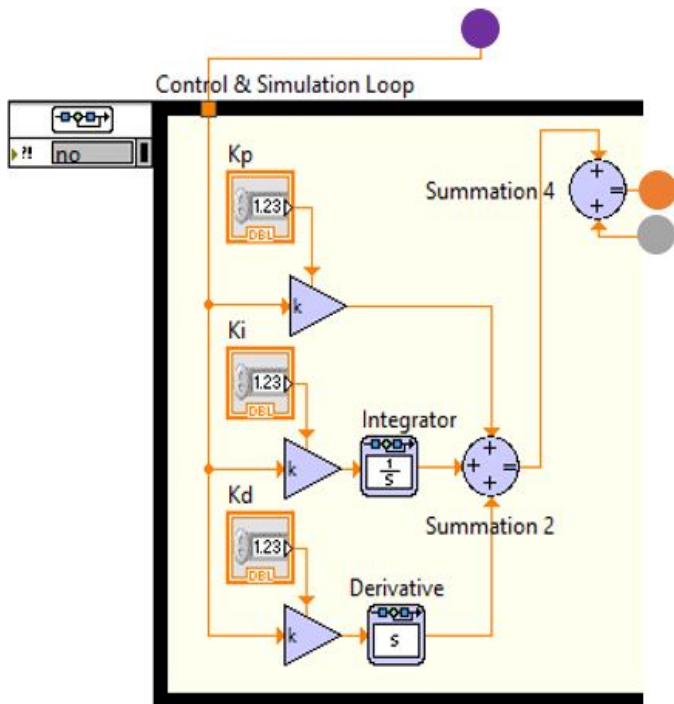


Figura 13: Controlador angular: LabVIEW LINX.

Por otro lado, para el control de la posición transversal $\chi(t)$ se comienza con la lectura del sensor ultrasónico por los puertos 2 y 4 de la tarjeta *arduino*, para el Trigger y el Echo del sensor respectivamente, dicha señal es igualmente filtrada para su pos-

terior visualización, tanto en un indicador numérico como en un deslizador horizontal, ver Figura 14. Así mismo, dicha lectura es comparada por una constante, con el nombre de Referencia transversal para obtener el Error transversal, el cual es enviado al mismo bucle de *Control & Simulation Loop*.

En la Figura 15) se muestra la recepción del Error transversal para contener la señal del controlador PD para la posición $\chi(t)$. Note que al sumar los controladores para $\theta(t)$ y $\chi(t)$ se obtiene el controlador PD+PD para el sistema (11).

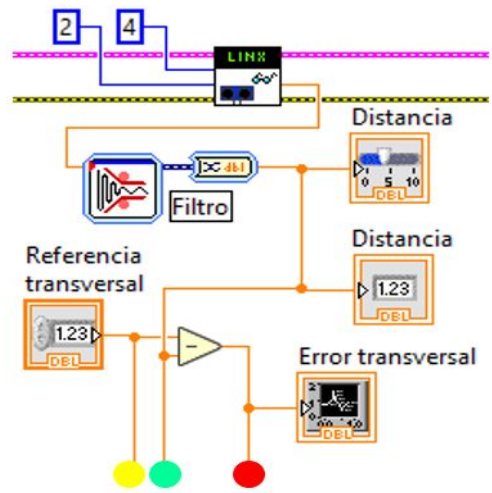


Figura 14: Lectura, referencia y error transversal: LabVIEW LINX.

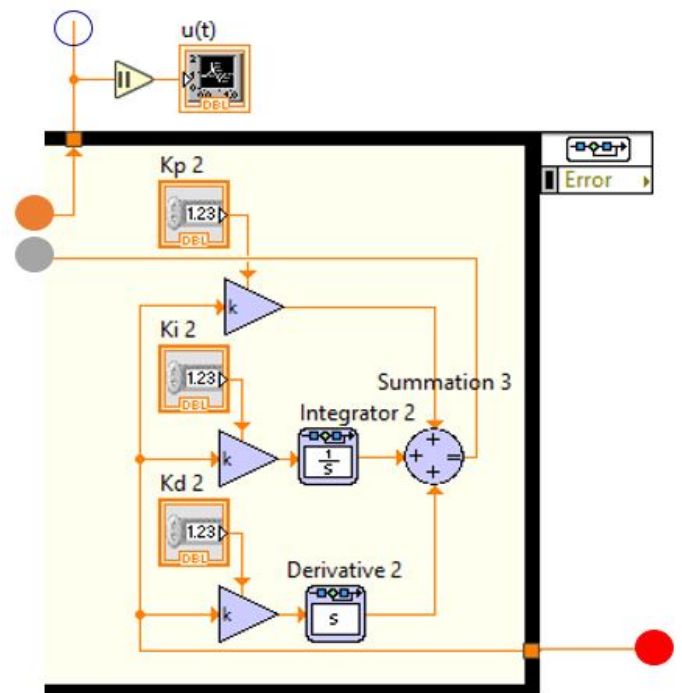


Figura 15: Controlador transversal: LabVIEW LINX.

De la suma de los controles para $\theta(t)$ y $\chi(t)$ resulta la señal $u(t)$, que es comparada por medio de su signo, es decir, si el valor final de $u(t)$ es mayor a 0, el motor girará hacia la izquierda, de lo contrario girará a la derecha, ver Figura 16. Esto es

enviado a los puertos 3 y 6 de la tarjeta Arduino en forma de PWM para el sentido de giro explicado anteriormente (Figura 17). Logrando capturar los datos en tiempo real de los resultados de la plataforma mediante un archivo .txt, ver Figura 18, para su graficación en MATLAB.

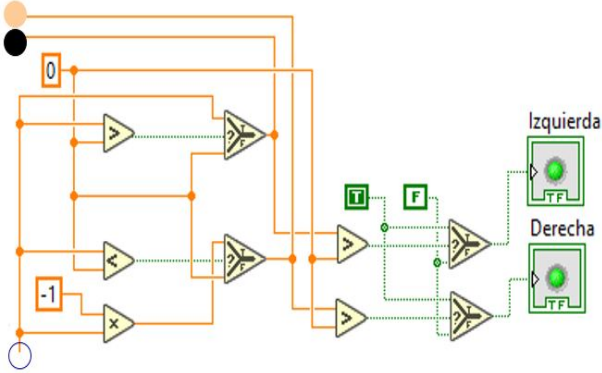


Figura 16: Condiciones a la fuerza $u(t)$ aplicada al actuador: LabVIEW LINX.

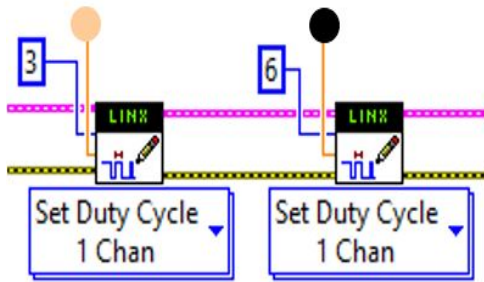


Figura 17: Puertos digitales para el envío de señal PWM a la tarjeta: LabVIEW LINX.

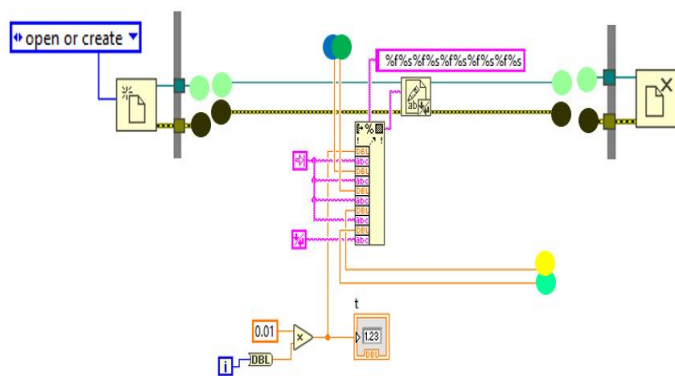


Figura 18: Captura de datos para el análisis de resultados: LabVIEW.

De esta manera se puede seleccionar sobre el prototipo los puntos de referencia adecuados para que el sistema sea estable, como un ángulo de apertura de $\theta^* = 0^\circ$ del péndulo respecto a la vertical, y una distancia de $\chi^* = 25.85\text{cm}$ en el módulo HCSR - 04 para el carro, que indica el punto medio del trayecto total que se tiene sobre el movimiento horizontal (Figura 19).

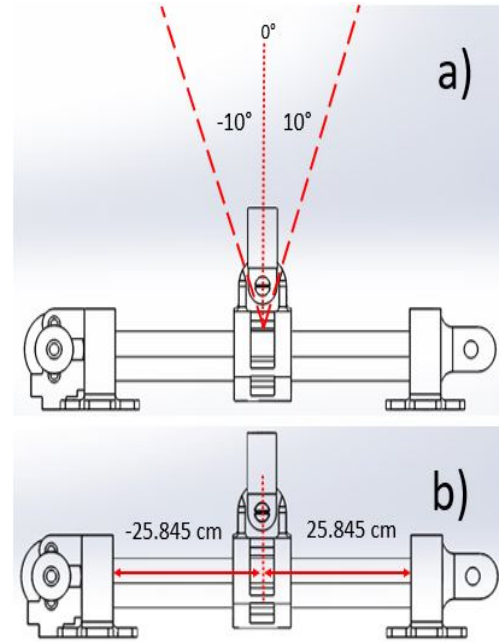


Figura 19: Interpretación para el usuario: a) rango de movimientos angulares $\theta(t)$ permitidos, b) rango de movimientos transversales $\chi(t)$ permitidos.

7. Pruebas y resultados experimentales

En esta sección se realiza la implementación del controlador PD+PD dado en la Subsección 5.2, cuyas ganancias fueron sintonizadas empleando dos técnicas: colocación de polos y factibilidad de una LMI.

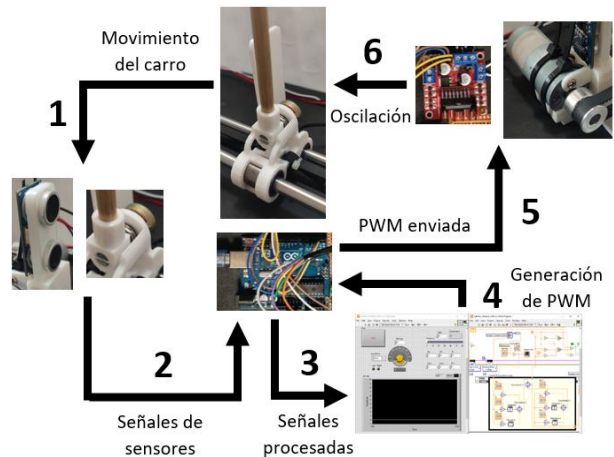


Figura 20: Diagrama a bloques del funcionamiento del prototipo.

En la Figura 20 se presenta un diagrama para esquematizar lo realizado. Los detalles se describen a continuación:

1. Los sensores generan una señal eléctrica independientemente, una proporcional a la distancia que existe entre el carro y el propio sensor, y otra proporcional al voltaje, que expresa el ángulo de inclinación del péndulo.
2. Las señales producidas por los sensores son enviadas a la tarjeta Arduino UNO y a través de su convertidor analógico-digital (ADC) se procesa dicha señal.

3. Una vez que las señales son procesadas por el ADC, estas son convertidas a distancia y voltaje, para determinar el error mediante un código de programación de extensión .vi (interfaces LabVIEW). Posteriormente se envían al controlador PD+PD, integrado en las interfaces para corregir este error.
4. Después de que el controlador PD+PD realiza los cálculos correspondientes se genera una señal PWM (modulación por ancho de pulsos, siglas en ingles de pulse-width modulation).
5. Esta señal PWM es enviada al actuador del sistema por medio de un circuito de potencia (Puente H), el cual va variando su velocidad y/o sentido de giro.
6. Esto permite el desplazamiento del carro y la oscilación del péndulo. Repitiéndose el ciclo hasta alcanzar los puntos de referencia.

De esta forma las posiciones angular $\theta(t)$ y traslacional $\chi(t)$ comienzan a oscilar alrededor de los puntos de referencia $\theta^* = 0^\circ$ y $\chi^* = 25.85\text{cm}$, regulando el movimiento hasta alcanzar el punto estable en ambos (Figura 21).

Las gráficas que muestran la respuesta de la plataforma experimental carro-péndulo fueron obtenidas empleando *LabVIEW* y guardadas en un archivo .txt de cinco columnas expresando: el tiempo transcurrido en intervalos de 0.01 segundos, el voltaje de referencia y su lectura para el potenciómetro, la posición transversal de referencia y su respuesta. Consecuentemente, las gráficas fueron generadas utilizando este archivo y el comando *plot()* de MATLAB.

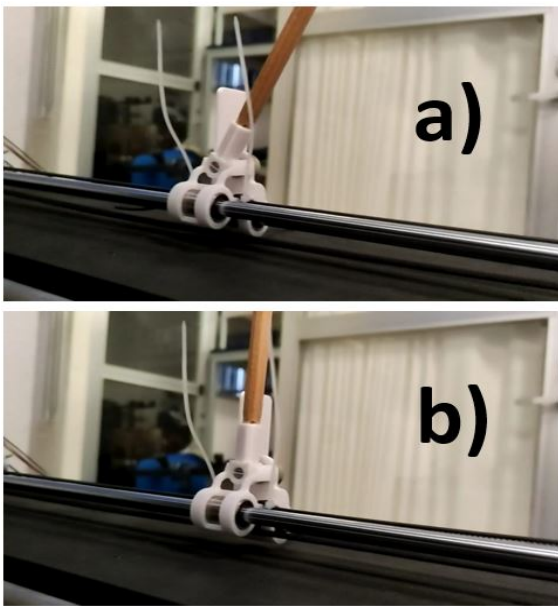


Figura 21: Funcionamiento de prototipo: a) movimientos oscilatorios ejecutados por el actuador, b) estabilización en ambas salidas.

7.1. Implementación PD+PD por asignación de polos

A continuación se presenta la respuesta del sistema (11) en lazo cerrado con la ley control (16). Para la sintonización se emplearon los parámetros (21) y de (20) se tienen los valores de las ganancias correspondientes:

$$\begin{aligned} k_{p1} &= -0.1, & k_{d1} &= -5 \times 10^{-5}, \\ k_{p2} &= 20, & \text{y} & \quad k_{d2} = 0.000838. \end{aligned} \quad (23)$$

En la Figura 22 se muestran las posiciones del péndulo $\theta(t)$ y del carro $\chi(t)$. La posición angular del péndulo $\theta(t)$ es determinada a partir de la lectura del potenciómetro en voltios. Recordando que un voltaje aproximado de 2.45V indica un ángulo de apertura de $\theta^* = 0^\circ$ del péndulo ($\theta^* = 0^\circ \equiv 2.45\text{V}$). La posición transversal/traslacional del carro $\chi(t)$ es medida por el módulo *HCSR-04*. Aquí el punto de referencia/establecimiento es $\chi^* = 25.85\text{cm}$ e indica el punto medio del trayecto total que se tiene sobre el movimiento horizontal.

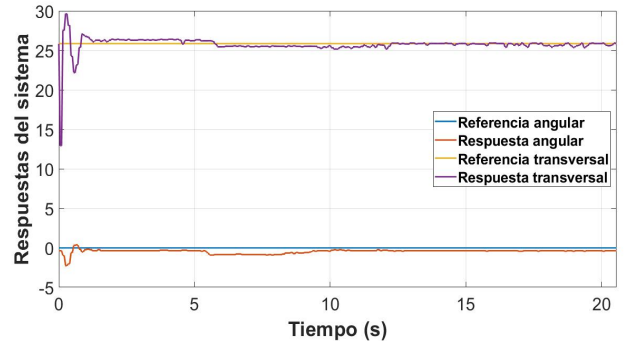


Figura 22: Posiciones del péndulo $\theta(t)$ y del carro $\chi(t)$ usando (23).

En la Figura 23, se muestran acercamientos de la lectura del potenciómetro encargado de medir la posición angular del péndulo $\theta(t)$, y de la posición del carro $\chi(t)$ medida por el módulo *HCSR-04*.

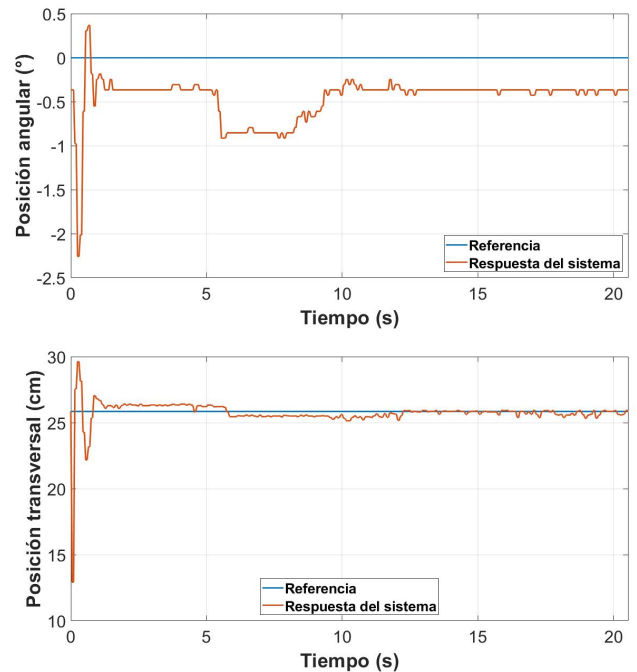


Figura 23: Acercamientos a las posiciones $\theta(t)$ y $\chi(t)$ usando (23).

7.2. Implementación PD+PD empleando LMIs

En la Figura 24 se presenta la respuesta de las posiciones del péndulo $\theta(t)$ y del carro $\chi(t)$ del sistema (11) en lazo cerrado con la ley control (16). En esta ocasión la sintonización de las ganancias del controlador PD+PD se realizó mediante

la obtención de factibilidad de una LMI, dando como resultado (22). Al igual que en la subsección anterior, los puntos de establecimiento son $\theta^* = 0^\circ$ y $\chi^* = 25.85\text{cm}$.

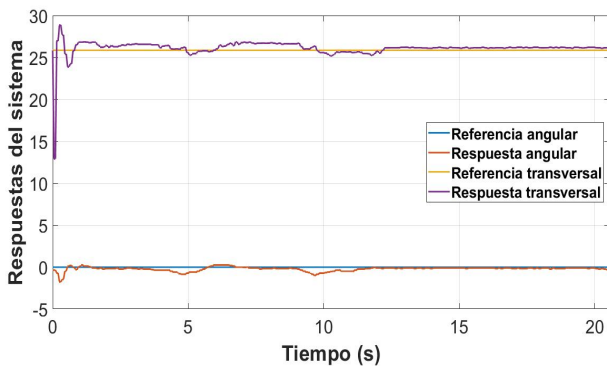


Figura 24: Posiciones del péndulo $\theta(t)$ y del carro $\chi(t)$ usando (22).

En la Figura 25 se presentan acercamientos a la posición angular del péndulo $\theta(t)$, y a la posición del carro $\chi(t)$.

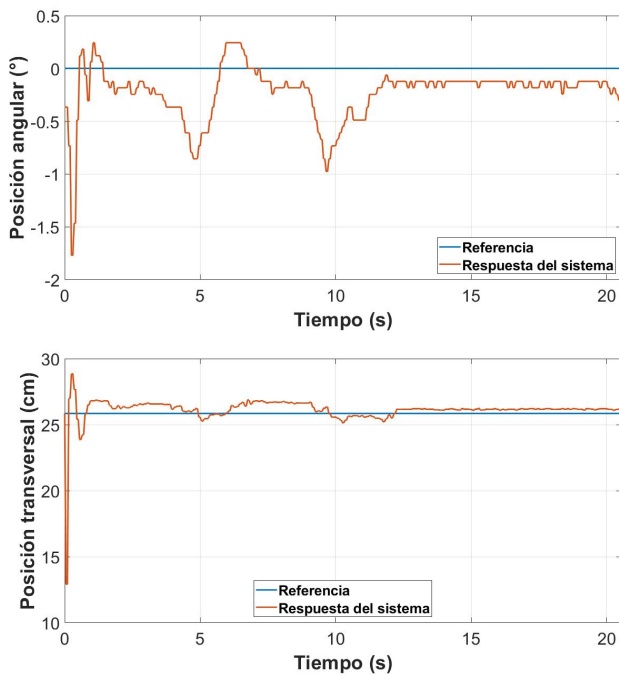


Figura 25: Acercamiento a las posiciones $\theta(t)$ y $\chi(t)$ usando (22).

En la Tabla 3 se sintetizan los valores de las ganancias empleadas anteriormente. El desempeño del controlador PD+PD, empleando las dos técnicas de sintonización pueden ser visualizado en el siguiente vídeo: <https://acortar.link/nnfujb>.

Tabla 3: Ganancias del controlador PD+PD.

	k_{p1}	k_{d1}	k_{p2}	k_{d2}
Asignación de polos	-0.1	-5×10^{-5}	20	8.38×10^{-4}
Factibilidad de LMI	-6.8760	-0.3121	0.1545	0.1321

8. Conclusiones

Cuando se resaltan las clases prácticas sobre las especulativas se fomenta la capacidad creativa en los estudiantes. Por lo tanto, el empleo de plataformas experimentales, para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de control, sin lugar a duda coadyuvará a fomentar dicha creatividad.

En este trabajo se presenta el diseño y la construcción de una plataforma experimental subactuada conocida como carro-péndulo de muy bajo costo y mantenimiento, para la enseñanza-aprendizaje de la Teoría de Control. El diseño de la plataforma propuesta se realiza empleando el software CAD *SolidWorks*. Para el sensado de la posición del carro $\chi(t)$, se emplea un módulo de rango ultrasónico *HC-SR04* ubicado en un extremo de la base de la plataforma. Mientras que para la medición del posicionamiento angular del péndulo $\theta(t)$, se ocupa un potenciómetro rotativo de una variación del tipo lineal de *10k ohms*. Para el procesamiento de datos e implementación de controladores, se utiliza el software *NI LabVIEW*. Mientras que para la adquisición de datos se emplea una tarjeta de desarrollo *Arduino UNO*. Finalmente, la efectividad y el buen desempeño de la plataforma experimental propuesta se corrobora al responder adecuadamente a lo que dicta la teoría al implementar el controlador PD+PD o retroalimentación de estado analizado en la Sección 5. Esto hace presuponer que la plataforma se encuentra lista para implementar otras técnicas y/o tipo de controladores (trabajo futuro). La sintonización de las ganancias se realizó mediante asignación de polos y mediante la factibilidad de LMIs.

Con base a los resultados observados; y dada la complejidad que conlleva diseñar, construir y controlar una plataforma como la propuesta, se puede mencionar que nuestra propuesta es una sugerente alternativa de uso para la enseñanza-aprendizaje de la Teoría de Control.

Referencias

Aliste, M. E. R., Real, D. L., and Bravo, I. L. (2006). ¿Eres visual, auditivo o kinestésico? Estilos de aprendizaje desde el modelo de la Programación Neurolingüística (PNL). *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(2):1–10.

Bernal, M., Estrada, V., and Márquez, R. (2019). *Diseño e implementación de sistemas de control basados en estructuras convexas y desigualdades matriciales lineales*, volume 1. Pearson: México city, Mexico.

Blanco, L. J. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*, 41:171.

Blitzer, L. (1965). Inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 33(12):1076–1078.

Bogdanoff, J. and Citron, S. (1965). Experiments with an inverted pendulum subject to random parametric excitation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 38(3):447–452.

Castro, A. (2012). *Modeling and dynamic analysis of a two-wheeled inverted-pendulum*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology.

Cazau, P. (2004). Estilos de aprendizaje: Generalidades. *Consultado el*, 11(11):2005.

Cervantes López, M. J., Llanes Castillo, A., Peña Maldonado, A. A., and Cruz Casados, J. (2020). Estrategias para potenciar el aprendizaje y el rendimiento académico en estudiantes universitarios. *Revista Venezolana de Gerencia*, 25(90):579–594.

Chen, C.-T. (1984). *Linear system theory and design*. Saunders college publishing.

Cornejo Romero, C. (2023). Control en tiempo real de un sistema carro-péndulo. *Universidad Nacional Autónoma de México*, Tesis para obtener grado de ingeniería.

- Grossman, S., Stanley, I., et al. (2019). Álgebra lineal. *Biblioteca Hernán Malo González*.
- Halvorsen, H. P. (2011). Control and simulation in labview. *Department of Electrical Engineering, Information Technology and Cybernetics, Telemark University College Porsgrunn, Norway*.
- Hernández Largacha, A., Legaspi Martínez, M., and Peláez Martín, J. (2012). Control inteligente del péndulo invertido. *Universidad Complutense de Madrid, Proyecto de sistemas informáticos, Facultad de informática*.
- Huerta Gil, R. D. (2015). Control de un péndulo invertido sobre dos ruedas de tres grados de libertad. *Universidad Nacional Autónoma de México, Tesis para obtener el grado de ingeniería*.
- Infante, R. C. H., Miranda, M. E. I., Collaguazo, W. A., and Espinosa, J. S. P. (2021). Sugerencias metodológicas para el desarrollo de clases teóricas y prácticas en la enseñanza superior. *Revista Conrado*, 17(S1):16–23.
- Klimenko, O. and Botero Castello, A. M. (2016). Fomento de la capacidad creativa desde las prácticas de enseñanza en una institución universitaria. *Katharsis: Revista de Ciencias Sociales*.
- Lowenstern, E. (1932). Xxxix. the stabilizing effect of imposed oscillations of high frequency on a dynamical system. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 13(84):458–486.
- Mazzone, V. (2002). Estructuras prácticas de control siso. *Automatización y Control Industrial, Universidad Nacional de Quilmes*, page 3.
- Murillo Herrera, S. et al. (2019). Robot caminador bipedo semi-pasivo como plataforma educativa de bajo costo. *Universidad de los Andes*.
- Ness, D. J. (1967). Small oscillations of a stabilized, inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 35(10):964–967.
- Phelps III, F. and Hunter Jr, J. (1965). An analytical solution of the inverted pendulum. *American Journal of Physics*, 33(4):285–295.
- Pippard, A. (1987). The inverted pendulum. *European Journal of Physics*, 8(3):203.
- Ponce, I. (2022). Estabilización del carro péndulo invertido aplicando control óptimo no lineal variante en tiempo. *Instituto de Ingeniería y Tecnología*.
- Quanser (2023). <https://www.quanser.com/products/linear-servo-base-unit-inverted-pendulum/>, 22 de Agosto de 2013.
- Ruvalcaba, F., Llama, M., and Santibáñez, V. (2010). Control de un carro péndulo como un sistema de cuarto orden. In *Congreso Anual*.
- Sahba, M. (1983). Computer-aided design of feedback controllers for nonlinear systems with applications to control of a double-inverted pendulum. In *IEE Proceedings D-Control Theory and Applications*, volume 6, pages 350–358.
- Stephenson, A. (1908). On a new type of dynamical stability. *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 52(8).
- Yamakawa, T. (1989). Stabilization of an inverted pendulum by a high-speed fuzzy logic controller hardware system. *Fuzzy sets and Systems*, 32(2):161–180.