

Controlador adaptable con restricciones exponenciales para manipuladores robóticos Adaptive controller with exponential constraints for robotic manipulators

M. Gomez-Correa ^{a,*}, D. Cruz-Ortiz ^b, I. Salgado ^a, M. Ballesteros ^{a,b}

^aCentro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, Instituto Politécnico Nacional, C.P. 07700, Ciudad de México, México.

^bLaboratorio de Robótica Médica y Bioseñales, Unidad Profesional Interdisciplinaria de Biotecnología, Instituto Politécnico Nacional, C.P. 07340, Ciudad de México, México.

Resumen

En este trabajo, se diseñó una solución de control para resolver el problema de seguimiento trayectoria de un robot manipulador. El control considera una estructura proporcional derivativa (PD) con ganancias adaptables. La ley de adaptación de las ganancias se obtiene mediante una función de Barrera de Lyapunov, que considera una forma logarítmica y una cota variable en el tiempo a través de una función exponencial decreciente. El diseño de la barrera impone una disminución exponencial del error de seguimiento con una velocidad prescrita. El control diseñado se implementa numéricamente para un modelo de robot manipulador de dos grados de libertad. Los resultados se comparan con un controlador PD clásico mostrando que el control diseñado se desempeña mejor en la tarea de seguimiento. El PD adaptable tiene un error cuadrático medio más pequeño que el PD clásico. El control diseñado se prueba con diferentes parámetros de convergencia y los resultados muestran cómo el límite exponencial impone una velocidad prescrita.

Palabras Clave: Restricciones Exponenciales, Función de Barrera de Lyapunov, Control Proporcional Derivativo Adaptable.

Abstract

A controller is designed to solve the problems associated with the trajectory tracking of a manipulator robot. The structure that contemplates the control is proportional derivative (PD) with the implementation of adaptive gains. A Lyapunov barrier function is used as the law of adaptation of the controller gains. This function considers a logarithmic structure and a variable limit or barrier in time through a decreasing exponential function. The designed barrier imposes an exponential decrease in the following error. The designed control is implemented numerically for a two-degree-of-freedom robotic arm model. Also, to observe the advantages of the designed control, it was compared with a classic PD controller. The adaptive PD has a smaller root mean square error than the classical PD. The designed control is tested with different convergence parameters, and the results show how the imposed barrier causes a preset system velocity.

Keywords: Exponential Constraint, Lyapunov Function, Adaptive Proportional Derivative Controller.

1. Introducción

Los manipuladores robóticos (MR) se pueden implementar en varias aplicaciones, incluida la industria, el sector médico y la investigación. En particular, el uso de estos robots ayuda a mejorar los servicios, disminuye los tiempos en los procesos de producción, reduce los costos y aumenta la utilidad de los equipos (Tika *et al.*, 2020). En consecuencia, el seguimiento de trayectoria de los MR es un problema relevante en varios sectores, considerando que las restricciones de estado en el seguimiento de trayectoria tienen gran importancia ya que garantizan requi-

sitos preestablecidos para evitar problemas en el rendimiento del sistema como la violación del espacio de trabajo y limitaciones en el rango de movimiento. También asegura que no se excedan los límites mecánicos de MR y evita las respuestas impredecibles que pueden provocar una falla del sistema (Dai *et al.*, 2020; Soukhanov, 1992).

Como se describe en (Hu *et al.*, 2019), algunos métodos habituales para resolver este problema son el control por modos deslizantes, el control de seguimiento sincronizado adaptable, el control robusto, las redes neuronales y el control no lineal

* Autor para correspondencia: mgomezc2103@alumno.ipn.mx

Correo electrónico: mgomezc2103@alumno.ipn.mx (Manuela Gomez-Correa), dcruzo@ipn.mx (David Cruz-Ortiz), isalgador@ipn.mx (Iván Salgado) y mballesterose@ipn.mx (Mariana Ballesteros).

exponencial, entre otros. Por ejemplo, el control predictivo de modelos se implementa en el sector industrial, lo que permite el control de un sistema complejo y el manejo eficiente de las restricciones (Dai *et al.*, 2020). Asimismo, se han estudiado otros métodos, como el control adaptativo basado en redes neuronales para solucionar los problemas asociados al seguimiento de la trayectoria de los MR. Esta técnica se utiliza para aplicaciones que contemplan sistemas no lineales complejos con incertidumbres (Liu *et al.*, 2019; Ballesteros *et al.*, 2020).

Específicamente, el controlador proporcional derivativo (PD) se usa ampliamente para controlar la posición de los robots. Este tipo de controlador ha sido implementado en varios sistemas gracias a su fácil implementación y diseño. A pesar de esto, en aplicaciones donde se requiere alta precisión en la trayectoria, el desempeño de los PD convencionales no es el adecuado, así como en sistemas complejos no lineales y variables en el tiempo. Este tipo de controlador presenta una convergencia asintótica, por lo que el error sólo convergerá cuando el tiempo tienda a infinito, y sus ganancias suelen ser fijas, lo que limita su desempeño y aplicación. Para mejorar su rendimiento sin perder las ventajas de utilizar un controlador de diseño simple, se implementan controladores PD en conjunto con otras técnicas (Ballesteros-Escamilla *et al.*, 2019; Guerrero *et al.*, 2020; Santoso *et al.*, 2019).

En (Guo *et al.*, 2019), se implementó un controlador PD difuso en el estudio de un robot submarino esférico aplicando un controlador adaptable cuyo principal reto fue el ajuste de las ganancias cuando el robot estaba bajo el agua. Por otro lado, en (Teng *et al.*, 2020) se combinaron un control PD, un control por modos deslizantes y un control de lógica difusa para regular una silla de ruedas de tal manera que esta pueda ser utilizada en personas con disfunción neuromuscular. A pesar de los avances en la adaptabilidad de los controladores PD, estos no suelen considerar las leyes de adaptación que imponen las restricciones en los estados. Adicionalmente, en la literatura se pueden encontrar controladores que permiten la inclusión de restricciones de estado como los controladores basados en Funciones de Barrera de Lyapunov (FBL) (Cruz-Ortiz *et al.*, 2022).

Por ejemplo, la FBL se considera una herramienta eficaz para aplicaciones con límites variables en el tiempo y el control de sistemas no lineales inciertos. Además, la FBL ofrece la ventaja de establecer condiciones iniciales menos restrictivas que otros métodos. Lo anterior genera restricciones más leves para los parámetros libres considerados en las condiciones iniciales y además, provoca la restricción del error de identificación (Liu *et al.*, 2021; Yang *et al.*, 2020).

Por lo anterior, considerando la fácil implementación de los controladores de PD, las ventajas de tener ganancias adaptables y los resultados obtenidos con la FBL, este trabajo desarrolla un control de PD adaptable para MR, utilizando restricciones de barrera de tipo exponencial. Las principales contribuciones de este trabajo, en relación con otros estudios, son las siguientes:

- El diseño del controlador con la FBL variable en el tiempo genera que el error de seguimiento disminuya exponencialmente, lo que permite su convergencia con una velocidad predefinida.
- La aplicación del PD adaptable implica la reducción del

sobreimpulso, lo que evita daños cuando la estructura tiene restricciones mecánicas.

- El esquema de control propuesto garantiza el cumplimiento de la restricción del error de seguimiento. En particular, la restricción viene predefinida por una función de tipo exponencial, lo que asegura que el error este acotado en todo momento por la función exponencial. Es crucial resaltar que el cumplimiento de la restricción por el error de seguimiento implica las restricciones de los estados.

Notaciones y preliminares: En este trabajo, el conjunto de los números reales se define como \mathbb{R} . \mathbb{R}^n es el espacio vectorial de n elementos reales. $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}$. Para la matriz dada por $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$, su transpuesta se denota como $R^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Para el vector $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ la norma Euclidiana está definida como $\|q\|$ y $\|q\|_G$ es la norma ponderada, definida como $\|q\|_G = \sqrt{q^T G q}$, con $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como matriz definida positiva, I_n denota la matriz identidad con $n \times n$ dimensiones. La traza de la matriz $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está definida como $\text{tr}\{S\}$. La norma de Frobenius está denotada por $\|D\|_F = \sqrt{\text{tr}\{D^T D\}}$ para $D \in \mathbb{R}^{n \times r}$.

Lema 1. (Desigualdad de logaritmos (Cruz-Ortiz *et al.*, 2021)):

La siguiente desigualdad es válida $\forall \Omega \in (0, 1)$: $-\frac{\Omega}{1-\Omega} \leq -\ln\left(\frac{1}{1-\Omega}\right)$.

2. Planteamiento del Problema

El problema de control de este trabajo consiste en encontrar las entradas para regular cada trayectoria de un MR considerando una restricción exponencial decreciente para el error de seguimiento. La Figura 1 muestra un diagrama de cuerpo libre del manipulador considerado en este estudio, d_1 y w_1 indican la longitud y la masa del primer eslabón, mientras que d_2 y w_2 indican la longitud y la masa del segundo eslabón, g es la aceleración de la gravedad, p_1 y p_2 son la posición angular del primer y segundo eslabón respectivamente. La Subsección 2.1 describe su modelo matemático.

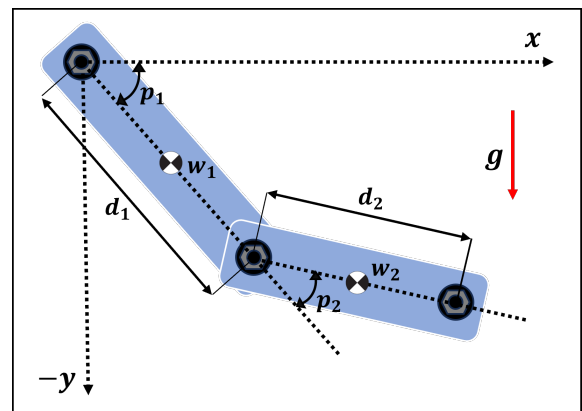


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre, MR de dos eslabones.

2.1. Descripción de la Planta

Considere el MR de dos eslabones de la Figura 1, la cual satisface la siguiente representación (Spong *et al.*, 2020).

$$I(p(t))\ddot{p}(t) + K(p(t), \dot{p}(t))\dot{p}(t) + M(p(t)) + \varphi(t) = u(t), \quad (1)$$

donde $p \in \mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^2$ caracteriza la posición angular generalizada del manipulador con $p = [p_1 \ p_2]^\top$, y $\dot{p} \in \mathbf{Y}_d \subset \mathbb{R}^2$ denota el vector de velocidad angular correspondiente, el cual está dado por $\dot{p} = [\dot{p}_1 \ \dot{p}_2]^\top$, $u \in \mathbb{R}^2$ representa el vector de control, y $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ describe las perturbaciones externas que actúan sobre el sistema robótico. Los conjuntos \mathbf{Y} y \mathbf{Y}_d están definidos como $\mathbf{Y} := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p\| \leq y_1^+, \forall t \in \mathbb{R}^+\}$ y $\mathbf{Y}_d := \{\dot{p} \in \mathbb{R}^2 : \|\dot{p}\| \leq y_2^+, \forall t \in \mathbb{R}^+\}$, y_1^+ y y_2^+ son constantes positivas. Adicionalmente, es importante resaltar que en este modelo no fue considerada la fricción.

En (1), I representa la matriz de inercia, K denota la matriz centrípeta de Coriolis y M describe el vector de fuerzas gravitacionales. Las matrices mencionadas así como el vector se definen a continuación (se omite la dependencia del tiempo para facilitar la lectura del trabajo).

$$I(p) = \begin{bmatrix} \zeta_1 + \zeta_2 + 2\zeta_3 \cos(p_2) & \zeta_2 + 2\zeta_3 \cos(p_2) \\ \zeta_2 + 2\zeta_3 \cos(p_2) & \zeta_2 \end{bmatrix},$$

$$K(p, \dot{p}) = \zeta_3 \cos(p_2) \begin{bmatrix} -\dot{p}_2 & -\dot{p}_1 - \dot{p}_2 \\ \dot{p}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M(p) = \begin{bmatrix} \zeta_4 \cos(p_1) + \zeta_5 \cos(p_1 + p_2) \\ \zeta_5 \cos(p_1 + p_2) \end{bmatrix},$$

donde $\zeta_1 = (w_1 + w_2)d_1^2$, $\zeta_2 = w_2l_2^2$, $\zeta_3 = w_2d_1d_2$, $\zeta_4 = (w_1 + w_2)gd_1$ y $\zeta_5 = w_2gd_1$.

Nota 1. Note que en este trabajo consideramos un MR de dos eslabones. Sin embargo, el trabajo se puede extender a otras configuraciones robóticas. El modelo dinámico de manipuladores de robots planares se puede obtener con el enfoque de Euler-Lagrange Spang et al. (2020).

El modelo para el MR descrito por la ecuación (1), se puede representar como se observa a continuación.

$$\ddot{p} = E(p, \dot{p}) + S(p)u + \varphi(p, t). \quad (2)$$

En la ecuación anterior, $p(0) = p_0$ y $\dot{p}(0) = p_{d0}$ son las condiciones iniciales del sistema, $p_0 \in \mathbb{R}^2$, $p_{d0} \in \mathbb{R}^2$. La función $E: \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}_d \rightarrow \mathbb{R}^2$ corresponde al término de la derivada, $E = -I^{-1}(K\dot{p} + M)$ y satisface la condición de Lipchitz localmente. El término $S: \mathbf{Y} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz conocida asociada a la señal de entrada $u \in \mathbb{R}^2$, esto es $S = I^{-1}$. La función no lineal $\varphi: \mathbf{Y} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ representa incertidumbres y dinámicas no modeladas, $\varphi = -I^{-1}\varphi$.

Definiendo $y = [p^\top \ \dot{p}^\top]^\top$, tal que, $y_1 = p$ y $y_2 = \dot{p}$, El sistema (2) acepta la siguiente representación

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= E(y) + S(y_1)u + \varphi(y, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Note que $y_1 = [y_{1,1} \ y_{1,2}]^\top$ y $y_2 = [y_{2,1} \ y_{2,2}]^\top$, $y_{1,1} = p_1$, $y_{1,2} = p_2$, $y_{2,1} = \dot{p}_1$ y $y_{2,2} = \dot{p}_2$. A lo largo de este manuscrito se cumplen las siguientes suposiciones para el sistema (3).

Suposición 1. El elemento φ no es conocido pero está acotado en el siguiente sentido, $\|\varphi(y, t)\| \leq \varphi^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, donde $\varphi^+ > 0$ es una constante positiva.

Suposición 2. La función no lineal $E(y)$ acepta el siguiente límite superior $\|E(y)\|^2 \leq \varepsilon^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ donde $\varepsilon^+ > 0$ es una constante positiva.

Para el sistema actual, es sencillo suponer que se deben imponer algunas restricciones sobre los estados y_1 y y_2 .

Suposición 3. Los estados en (3) están acotados por $\|y_1\|^2 \leq y_1^+$, $\|y_2\|^2 \leq y_2^+$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, con y_1^+ , y y_2^+ siendo constantes positivas conocidas. En consecuencia, es posible suponer que cada estado está limitado individualmente por $|y_{1,i}| \leq a_{c_{1,i}}^+$, $|y_{2,i}| \leq a_{c_{2,i}}^+$, donde $a_{c_{1,i}}^+ > 0$ y $a_{c_{2,i}}^+ > 0$ son constantes positivas, $i = \{1, 2\}$ considerando los dos eslabones.

2.2. Problema del seguimiento de trayectoria

El planteamiento del problema a tratar en este trabajo tiene como objetivo diseñar un control de seguimiento para el sistema (3) tal que a) el origen se convierte en un punto de equilibrio asintótico para el error de seguimiento, b) todas las señales en sistema de lazo cerrado estén acotadas; y c) no se violan las restricciones de estado impuestas en el error de seguimiento, es decir, el error de seguimiento $h_i = y_i - z_i$ debe satisfacer el límite $\|h_i\|_{C_i}^2 < \bar{h}_i(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, donde $\bar{h}_i(t)$ es una función decreciente exponencial positiva que se definirá a continuación, $C_i = C_i^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ es una matriz definida positiva, $z_i := [z_{r,i} \ \dot{z}_{r,i}]^\top$ es el vector que contiene la trayectoria deseada y su velocidad angular, $y_i := [y_{1,i} \ y_{2,i}]^\top$. Por lo tanto, la siguiente definición está implícita $h_i = [h_{1,i} \ h_{2,i}]^\top$. La trayectoria deseada para cada eslabón del MR satisface la siguiente suposición.

Suposición 4. Las trayectorias deseadas $z_{r,i} \in \mathbb{R}$ y su primera derivada $\dot{z}_{r,i} \in \mathbb{R}$, $i = \{1, 2\}$ para cada eslabón, son continuos y acotados en el sentido subsiguiente, $|z_{r,i}| \leq z_{r,i}^+ \leq a_{c_{1,i}}^+$, $|\dot{z}_{r,i}| \leq \dot{z}_{r,i}^+ \leq a_{c_{2,i}}^+$.

La siguiente sección describe la estrategia de control para resolver el problema descrito.

3. Diseño del Control

La estrategia de control adopta una estructura general de un PD adaptable con ganancias variables en el tiempo, diseñadas para cumplir con los requisitos establecidos en el planteamiento del problema. Las leyes de adaptación para estas ganancias se obtienen mediante un FBL que analiza el punto de equilibrio del error de seguimiento. Para describir esta estrategia, consideramos una descomposición del sistema para diseñar cada entrada u_i de forma independiente. En este caso u_i , $i = \{1, 2\}$, describe la entrada para cada enlace. Tal descomposición se describe en la siguiente subsección. Observe que este fue descrito para el manipulador de dos enlaces. Sin embargo, puede usarse para otros MR que cumplan con los supuestos 1 al 4.

3.1. Descomposición del Sistema

El sistema incierto (3) se puede descomponer en dos sistemas de segundo orden, es decir,

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1,i} &= y_{2,i}, \\ \dot{y}_{2,i} &= e_i(y) + s_{i,i}(y_{1,i})u_i + \sum_{j=1, j \neq i}^2 s_{i,j}(y_1)u_j + \varphi_i(y_1, t). \end{aligned}$$

Aquí, los elementos $s_{i,i}$ son los elementos diagonales de la matriz $S(x)$, e_i es el elemento i -ésimo de la función E . El elemento $s_{i,j}$ agrupa el efecto de las restantes acciones de control u_j con $i \neq j$. Teniendo en cuenta la definición del error de seguimiento h_i , su dinámica se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{h}_{1,i} &= h_{2,i} \\ \dot{h}_{2,i} &= e_i(y) + s_{i,i}(y_{1,i})u_i \\ &+ \sum_{j=1, j \neq i}^2 s_{i,j}(y_1)u_j + \varphi_i(y_1, t) - \dot{z}_{r,i}. \end{aligned} \quad (4)$$

3.2. Diseño del Control

Propongamos el control resultante para resolver la tarea del seguimiento de trayectoria.

$$\begin{aligned} u_i &= s_{i,i}^{-1}(y_{1,i})(u_{k,i} + u_{l,i}), \\ u_{k,i} &= - \left(\gamma_i^+ + \sum_{j=1, j \neq i}^2 s_{i,j}(y_1)u_j - \dot{z}_{r,i} \right), \\ u_{l,i} &= -\tilde{\beta}_i(t)h_i(t), \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\tilde{\beta}_i(t) = \beta_i(t) + \bar{\rho}_i$ y el vector constante $\bar{\rho}_i = [\rho_{1,i} \quad \rho_{2,i}]$, $\rho_{1,i} > 0$, $\rho_{2,i} > 0$, $\gamma_i^+ > 0$ son constantes positivas. Calculamos la ley de adaptación con la siguiente ecuación,

$$\dot{\beta}_i(t) = \Psi_i^{-1} \Phi_{k,i}^{-1} N^T C_i h_i \dot{h}_i^T - \Phi_{l,i}^{-1} \Phi_{l,i} \beta_i(t), \quad (6)$$

donde $\Phi_{k,i}$ y $\Phi_{l,i}$ son constantes positivas seleccionadas tales que $\Phi_{l,i} \geq 2\Phi_{k,i}\Phi_{c,i}$, con $\Phi_{c,i} = \frac{\zeta_i \lambda_{\max}\{\tilde{T}_i\}}{\lambda_{\min}\{C_i\}}$, $\zeta_i > 0$ es una constante positiva, las matrices C_i y \tilde{T}_i son matrices definidas positivas que se definirán a continuación, $N \in \mathbb{R}^2$ está definida como $N = [0 \quad 1]^T$, $\Psi_i = \bar{h}_i^2(t) - \|h_i(t)\|_{C_i}^2$, Ψ_i es un elemento de las funciones de barrera diseñado para cumplir con las restricciones para cada error de seguimiento de ambos eslabones. Esta restricción se establece con la variable $\bar{h}_i(t)$ propuesta como un límite variable en el tiempo, esta es una función exponencial decreciente, esto es, $\bar{h}_i(t) = h_i^+ e^{-b_i t}$, con $b_i \geq 0$ y h_i^+ como constantes positivas, $C_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $C_i = C_i^T > 0$ es la solución positiva definida de las siguientes desigualdades de la matriz de Lyapunov,

$$\begin{aligned} C_i \bar{D}_i + \bar{D}_i^T C_i + T_i &\leq 0, \\ \frac{1}{4} T_i - b_i C_i &\geq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

donde $\bar{D}_i := D - N\beta_i^* - N\bar{\rho}_i$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T_i = 4\zeta_i \tilde{T}_i$, $\tilde{T}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\tilde{T}_i = \tilde{T}_i^T > 0$ es una matriz definida positiva, $\zeta_i > 0$ es una cons-

tante positiva y $\beta_i^* = [\beta_{1,i}^* \quad \beta_{2,i}^*]$, $\beta_{1,i}^* > 0$ y $\beta_{2,i}^* > 0$ son constantes positivas, tal que $\|\beta_i^*\|_F \leq \beta_i^+$. El Teorema 1 establece el resultado del controlador diseñado.

Teorema 1. Considerando el cumplimiento de los supuestos 1-4, la dinámica del error de seguimiento dada en (4) impulsada con la estrategia de señal de control adaptable descrita en (5), y la ley de adaptación en (6). Si el conjunto de desigualdades dado en (7) son factibles para soluciones definidas positivas $C_i = C_i^T > 0$ para cualquier condición inicial que satisfaga $\|h_i(0)\|_{C_i}^2 < (h_i^+)^2$. Entonces, el origen es un punto de equilibrio estable exponencial para el error de seguimiento dentro de la zona Γ_i definida como $\Gamma_i = \frac{\beta_i^+}{2\Phi_{c,i}}$. Además, se cumple la restricción $\Psi_i > 0 \forall t \geq 0$.

Demostración. Observe que (4) está acotado superiormente por

$$\begin{aligned} \dot{h}_{1,i} &= h_{2,i}, \\ \dot{h}_{2,i} &\leq s_{i,i}(y_{1,i})u_i + \sum_{j=1, j \neq i}^2 s_{i,j}(y_1)u_j - \dot{z}_{r,i} + \gamma_i, \end{aligned} \quad (8)$$

donde $\gamma_i = |\varepsilon_i| + |\varphi_i|$. Considerando los Supuestos 1 y 2, es válido que, $\gamma_i \leq \gamma_i^+$, donde γ_i^+ es una constante positiva. Reescribamos (8) en forma vectorial sustituyendo el control (5), tal que,

$$\dot{h}_i \leq D z_i - N\beta_i h_i - N\bar{\rho}_i h_i. \quad (9)$$

La FBL candidata utilizada para el diseño de las entradas se selecciona de la siguiente manera,

$$V_i(t) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\bar{h}_i^2}{\bar{h}_i^2 - \|h_i\|_{C_i}^2} \right) + \frac{1}{2} \gamma_{k,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2, \quad (10)$$

donde $\tilde{\beta}_i = \beta_i - \beta_i^*$, se calcula la derivada de tiempo completo de (10), tal que,

$$\dot{V}_i(t) = \frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i \dot{h}_i + \dot{\bar{h}}_i \left(\frac{1}{\bar{h}_i} - \frac{\bar{h}_i}{\Psi_i} \right) + \Phi_{k,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^T \dot{\beta}_i \right\}. \quad (11)$$

Sumando y restando el elemento $N\beta_i^* h_i$ en (9), y sustituyendo (9) en el primer elemento de (11), se obtiene la siguiente desigualdad,

$$\frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i \dot{h}_i \leq \frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i \left((D - N\beta_i^* - N\bar{\rho}_i) h_i - N\tilde{\beta}_i h_i \right). \quad (12)$$

Sumando y restando los términos $\frac{1}{\Psi_i} b_i h_i^T C_i h_i$ y $2 \frac{\zeta_i}{\Psi_i} h_i^T \tilde{T}_i h_i$, la desigualdad (12) se convierte en,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i \dot{h}_i &\leq \frac{1}{2\Psi_i} h_i^T (C_i \bar{D}_i + \bar{D}_i^T C_i + T_i) h_i - \frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i N \tilde{\beta}_i h_i \\ &- b_i \frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i h_i + b_i \frac{1}{\Psi_i} h_i^T C_i h_i - 2 \frac{\zeta_i}{\Psi_i} h_i^T \tilde{T}_i h_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Ahora, considerando la desigualdad (11), la derivada de tiempo completo cumple la desigualdad subsiguiente,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq \frac{1}{2\psi_i} h_i^\top (C_i \bar{D}_i + \bar{D}_i^\top C_i + T_i) h_i \\ &\quad - \frac{1}{\psi_i} h_i^\top C_i N \tilde{\beta}_i h_i - b_i \frac{1}{\psi_i} h_i^\top C_i h_i - \frac{\zeta_i}{\psi_i} h_i^\top \tilde{T}_i h_i \\ &\quad - \frac{1}{\psi_i} h_i^\top (\zeta_i \tilde{T}_i - b_i C_i) h_i + \dot{\tilde{h}}_i \left(\frac{1}{\tilde{h}_i} - \frac{\tilde{h}_i}{\psi_i} \right) + \phi_{k,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Contemplando el cumplimiento de (7), tomando la definición de la función $\tilde{h}_i(t)$, calculando su derivada, y reescribiendo $\frac{1}{\psi_i} h_i^\top C_i N \tilde{\beta}_i h_i$ usando el operador traza, la desigualdad (14) se convierte en,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq -b_i \frac{1}{\psi_i} h_i^\top C_i h_i - \frac{\zeta_i}{\psi_i} h_i^\top \tilde{T}_i h_i \\ &\quad - b_i \left(1 - \frac{\tilde{h}_i^2}{\psi_i} \right) + \text{tr} \left\{ \phi_{k,i} \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i - \frac{1}{\psi_i} \tilde{\beta}_i^\top N^\top C_i h_i h_i^\top \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Reuniendo los términos que incluyen v_i en (15) y considerando la ley adaptativa (6), la desigualdad (15) se puede reexpresar de manera que,

$$\dot{V}_i(t) \leq -\frac{\zeta_i}{\psi_i} h_i^\top \tilde{T}_i h_i - \phi_{l,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i \right\}. \quad (16)$$

Recordando la definición $\tilde{\beta}_i = \beta_i - \beta_i^*$, la desigualdad (16) da como resultado,

$$\dot{V}_i(t) \leq -\frac{\zeta_i}{\psi_i} h_i^\top \tilde{T}_i h_i - \phi_{l,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2 - \phi_{l,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i^* \right\}. \quad (17)$$

Considerando la desigualdad de Rayleigh podemos reescribir (17) tal que,

$$\dot{V}_i(t) \leq -\frac{\phi_{c,i}}{\psi_i} h_i^\top C_i h_i - \phi_{l,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2 - \phi_{l,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i^* \right\}. \quad (18)$$

Tomando la definición de ψ_i , reescribiendo $-\frac{\phi_{c,i}}{\psi_i} h_i^\top C_i h_i$ y aplicando el Lema 1, (18) se convierte en,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq -\phi_{c,i} \ln \left(\frac{\tilde{h}_i^2(t)}{\tilde{h}_i^2(t) - \|h_i\|_{C_i}^2} \right) \\ &\quad - \phi_{l,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2 - \phi_{l,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i^* \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ahora, considerando (10), y agregando y restando el elemento $\phi_{k,i} \phi_{c,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2$, la desigualdad (19) da como resultado,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -2\phi_{c,i} V_i + \phi_{k,i} \phi_{c,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2 - \phi_{l,i} \|\tilde{\beta}_i\|_F^2 \\ &\quad - \phi_{l,i} \text{tr} \left\{ \tilde{\beta}_i^\top \dot{\beta}_i^* \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Considerando la desigualdad de Young podemos obtener la siguiente expresión $\dot{V}_i \leq -2\phi_{c,i} V_i - \alpha_i \|\tilde{\beta}_i\|_F^2 + \beta_i^+$, con $\alpha_i =$

$\frac{\phi_{l,i}}{2} - \phi_{k,i} \phi_{c,i}$. Finalmente, mediante el lema de comparación hecho en (Khalil, 2015), se puede probar la estabilidad práctica a la zona definida en el Teorema 1. \square

4. Simulación Numérica

El control diseñado fue probado para regular el seguimiento de la trayectoria del sistema (1). Para la simulación del modelo, el valor de la gravedad es $9,81 \text{ m/s}^2$. Asimismo, para el primer eslabón, el valor de masa coincide con $w_1 = 0,8 \text{ Kg}$, y la longitud fue de $d_1 = 0,3 \text{ m}$. En cambio, para el segundo eslabón, el valor de masa corresponde a $w_2 = 0,6 \text{ Kg}$, y la longitud a $d_2 = 0,25 \text{ m}$. Además, para la simulación se utilizó la caja de herramientas de Matlab®, Simulink. En particular, el solucionador ode4 (Runge-Kutta) se implementó con un tamaño de paso fijo de 0.000001 s .

Las trayectorias fueron seleccionadas como $z_1(t) = \frac{\pi}{2} \sin(2t) + \frac{\pi}{2}$ y $z_2(t) = \frac{\pi}{4} \sin(2t) + \frac{\pi}{4}$. Las Figuras 2 y 3 muestran la comparación del seguimiento de la trayectoria de ambos eslabones. Estas figuras muestran las trayectorias de referencia y el rendimiento obtenido al utilizar los controladores PD y el PD adaptable (PDA). De lo anterior, se evidencia que el rendimiento obtenido con el controlador PDA es superior en comparación con el controlador PD convencional, demostrando que se alcanzó la trayectoria de seguimiento en menor tiempo.

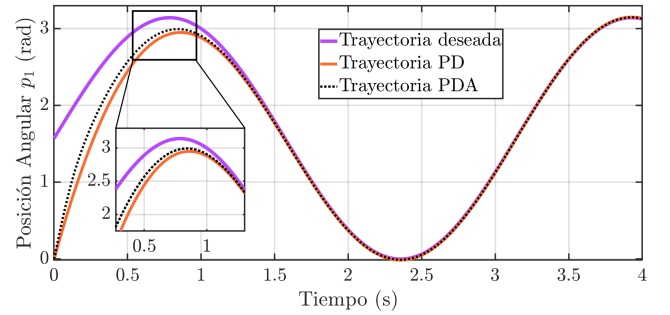


Figura 2: Comparación de seguimiento de trayectoria para el primer enlace utilizando los controladores PD y PDA.

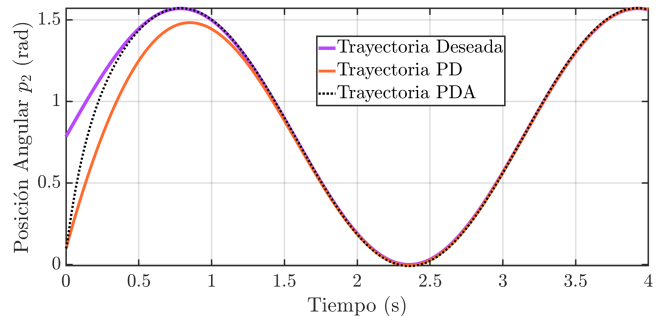


Figura 3: Comparación de seguimiento de trayectoria para el segundo enlace utilizando los controladores PD y PDA.

La Figura 4 compara la norma de error de seguimiento de $z = [h_1^\top \ h_2^\top]^\top$. De esta figura se puede observar que la norma obtenida con la implementación del PDA es menor que la obtenida con el controlador PD. Además, el PDA propuesto ofrecía

una convergencia más rápida de la norma de error de seguimiento.

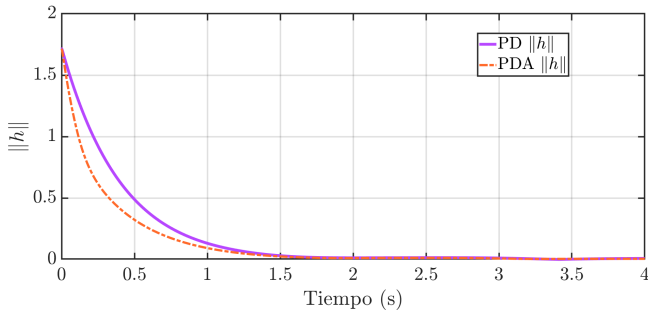


Figura 4: Comparación de la norma de error entre controladores PD y PDA.

La Figura 5 representa la integral de la norma de las señales de control. A partir de esto, se evidencia que el PD convencional requiere menos energía para hacer cumplir la trayectoria de seguimiento. Por el contrario, la PDA propuesta asegura el seguimiento de la trayectoria con más consumo de energía pero satisface las restricciones de error.

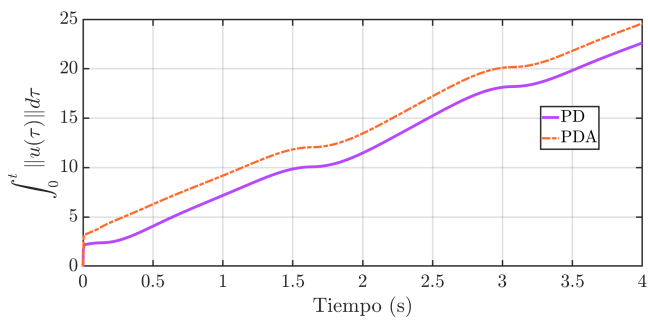


Figura 5: Comparación de la norma del controlador entre controladores PD y PDA.

Además, las Figuras 6 y 7 muestran el comportamiento general del error de seguimiento de ambos controladores. En estos, se evidencia que para ambos casos el PD supera la barrera mientras que el PDA ajusta la trayectoria a la barrera establecida.

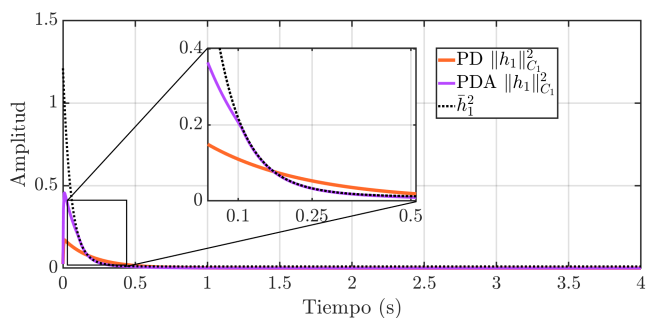


Figura 6: Comparación del rendimiento del error de seguimiento para el primer eslabón.

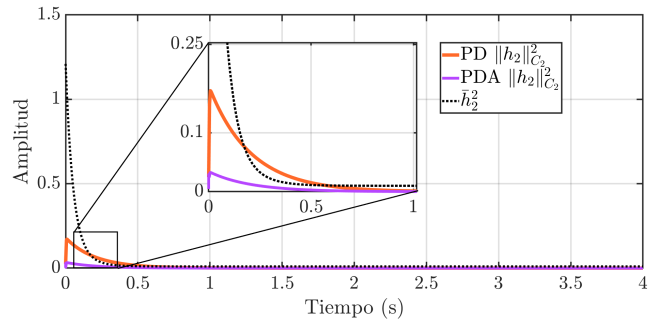


Figura 7: Comparación del rendimiento del error de seguimiento para el segundo eslabón.

En la Figura 8 se muestra la evolución temporal de las ganancias del control adaptable. El rendimiento obtenido muestra la adaptación variable en el tiempo, que coincide con el fenómeno descrito por la integral de la norma de la señal de control en la Figura 5.

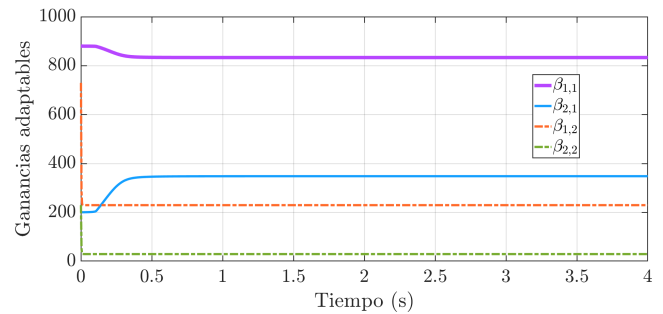


Figura 8: Evolución de las ganancias adaptables del PDA para ambos enlaces.

Para evidenciar el desempeño superior obtenido con el PDA propuesto, se ejecutaron un conjunto de simulaciones numéricas considerando diferentes valores para v_i . Para estas pruebas se seleccionó $b_1 = b_2 = b$. Por lo tanto, la matriz ponderada C es $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$. La Figura 9 muestra los rendimientos obtenidos. Esta figura muestra que si el valor de b aumenta, la velocidad de convergencia es más rápida ya que la función exponencial disminuye más rápido cerca del origen. Adicionalmente, para ver el desempeño con una perturbación, se agregó una función sinusoidal $r(t) = 30 \sin(60\pi t)$. La Figura 10 evidencia cómo, a pesar de la perturbación, el PDA siempre permanece por debajo de la barrera $\bar{h}_i(t)$, situación que no ocurre con el PD convencional.

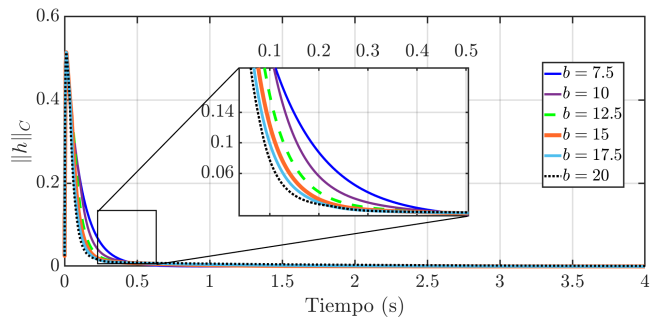


Figura 9: Comparación de la norma del error del seguimiento de trayectoria seleccionando diferentes valores para b_i en las funciones exponenciales $\bar{h}_i(t)$.

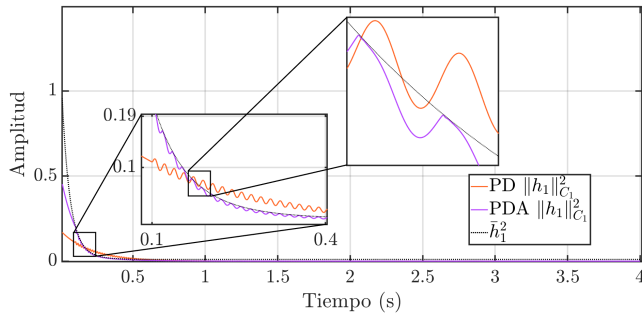


Figura 10: Comparación de la norma del error del seguimiento de trayectoria entre el PD convencional y el PDA propuesto considerando la perturbación.

5. Conclusiones

En el presente trabajo, se diseñó un controlador de seguimiento adaptable con restricciones exponenciales. El FBL implementado permitió modificar las ganancias mediante una expresión exponencial decreciente que genera un mejor desempeño controlando un MR de dos grados de libertad en comparación con un controlador PD clásico. En particular, el PDA tuvo un error cuadrático medio más pequeño que el PD clásico. Asimismo, los resultados evidenciaron la reducción exponencial del error de seguimiento, confirmando que éste estaba acotado para todos los tiempos, por lo que la disminución de la velocidad de la restricción exponencial determinaba su convergencia. Finalmente, considerando que el controlador propuesto delimitaba todos los estados, presentaba una ventaja en los sistemas físicos ya que se podían contemplar las restricciones que presentan los sistemas. Esta situación no ocurre con los controladores PD convencionales ya que no limitan la velocidad, lo que permite superar las condiciones físicas del sistema.

Agradecimientos

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo brindado a través de los proyectos SIP20232834, SIP20231293, SIP20232773, SIP20231337, 20231030 y 20231089. M. Gomez-Correa agradece la beca otorgada por CONAHCyT, CVUs: 1242726.

Referencias

- Ballesteros, M., Polyakov, A., Efimov, D., Chairez, I., y Poznyak, A. (2020). Adaptive discontinuous control for homogeneous systems approximated by neural networks. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):7885–7890.
- Ballesteros-Escamilla, M. F., Cruz-Ortiz, D., Chairez, I., y Luviano-Juárez, A. (2019). Adaptive output control of a mobile manipulator hanging from a quadcopter unmanned vehicle. *ISA transactions*, 94:200–217.
- Cruz-Ortiz, D., Chairez, I., y Poznyak, A. (2021). Non-singular terminal sliding-mode control for a manipulator robot using a barrier Lyapunov function. *ISA transactions*.
- Cruz-Ortiz, D., Chairez, I., y Poznyak, A. (2022). Sliding-Mode Control of Full-State Constraint Nonlinear Systems: A Barrier Lyapunov Function Approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*.
- Dai, L., Yu, Y., Zhai, D.-H., Huang, T., y Xia, Y. (2020). Robust model predictive tracking control for robot manipulators with disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(5):4288–4297.
- Guerrero, J., Torres, J., Creuze, V., y Chemori, A. (2020). Adaptive disturbance observer for trajectory tracking control of underwater vehicles. *Ocean Engineering*, 200:107080.
- Guo, J., Li, C., y Guo, S. (2019). Study on autonomous hovering of the spherical underwater robot based on fuzzy pd controller. En *2019 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, pp. 1601–1606. IEEE.
- Hu, Y., Wang, W., Liu, H., y Liu, L. (2019). Reinforcement learning tracking control for robotic manipulator with kernel-based dynamic model. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 31(9):3570–3578.
- Khalil, H. K. (2015). *Nonlinear control*, volumen 406. Pearson New York.
- Liu, C., Zhao, Z., y Wen, G. (2019). Adaptive neural network control with optimal number of hidden nodes for trajectory tracking of robot manipulators. *Neurocomputing*, 350:136–145.
- Liu, L., Gao, T., Liu, Y.-J., Tong, S., Chen, C. P., y Ma, L. (2021). Time-varying IBLFs-based adaptive control of uncertain nonlinear systems with full state constraints. *Automatica*, 129:109595.
- Santoso, F., Garratt, M. A., y Anavatti, S. G. (2019). Hybrid PD-fuzzy and PD controllers for trajectory tracking of a quadrotor unmanned aerial vehicle: Autopilot designs and real-time flight tests. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(3):1817–1829.
- Soukhanov, A. H., editor (1992). *The American Heritage. Dictionary of the American Language*. Houghton Mifflin Company.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., y Vidyasagar, M. (2020). *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons.
- Teng, L., Gull, M. A., y Bai, S. (2020). Pd-based fuzzy sliding mode control of a wheelchair exoskeleton robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 25(5):2546–2555.
- Tika, A., Gafur, N., Yfantis, V., y Bajcinca, N. (2020). Optimal scheduling and model predictive control for trajectory planning of cooperative robot manipulators. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):9080–9086.
- Yang, C., Huang, D., He, W., y Cheng, L. (2020). Neural control of robot manipulators with trajectory tracking constraints and input saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 32(9):4231–4242.