

Moduladores geométricos fraccionarios de señales de tipo senoidal Fractional geometric modulators of sinusoidal baseband signals

M. V. Vega-Blanco ^a, L. Toledo-Sesma ^a

^aUnidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo. Instituto Politécnico Nacional. Carretera Pachuca-Actopan Kilómetro 1+500, Distrito de Educación, Salud, Ciencia, Tecnología e Innovación, San Agustín Tlaxiaca, 42162, Hidalgo.

Resumen

Presentamos una técnica de modulación de señales de tipo senoidal utilizando ideas de la geometría diferencial de superficies y del cálculo fraccionario, en particular de los flujos geodésicos sobre superficies y de la derivada de Caputo de orden fraccionario. El trabajo inicia con la introducción de los objetos geométricos denominados embudos que son superficies de revolución con frontera y sobre los cuales se define un flujo geodésico a partir de una señal portadora. Se muestra que si se define la señal modulada punto a punto como la componente normal a la frontera del vector velocidad de una geodésica de dicho flujo, entonces, bajo la derivada usual, tanto señal portadora como señal modulada tienen la misma frecuencia. Sin embargo, se muestra que cuando se utiliza la derivada de Caputo de orden fraccionario variable, donde el orden depende de una señal moduladora, entonces la señal modulada y la señal portadora tienen, en general, parámetros distintos, por lo cual se tiene un método de modulación factible en el cual la señal modulada depende tanto de la señal moduladora como de la geometría del embudo, característica que permite no solo la modulación sino también la encryptación de la información contenida en la señal moduladora.

Palabras Clave: Amplitud modulada, Geodésicas, superficies de revolución, flujo geodésico, modulación geométrica fraccionaria

Abstract

A sinusoidal-like signal modulation technique is presented, incorporating concepts from differential geometry of surfaces and fractional calculus, specifically involving geodesic flows and Caputo's fractional derivative. We start by introducing geometric objects called funnels, which are revolution surfaces with boundaries. Over these surfaces, we define a geodesic flow based on a carrier signal. We demonstrate that if we define the output signal point-to-point as the normal component of the velocity vector of a geodesic, then, under the first-order derivative, both the carrier signal and the output signal share the same frequency. However, we establish that when Caputo's fractional derivative with a time-dependent fractional order is considered, especially when the variable order depends on a baseband signal, both the carrier signal and the output signal generally exhibit distinct parameters. As a result, an applicable modulation method becomes available where the output signal depends not only on the baseband signal but also on the geometry of the surface. This characteristic not only enables signal modulation but also facilitates the encryption of the information contained in the baseband signal.

Keywords: Amplitude modulation, Geodesics, surfaces of revolution, geodesics flows, geometric fractional modulation.

1. Introducción

Los sistemas de comunicación han desempeñado un papel fundamental en el quehacer cotidiano, estos permiten la transferencia de información mediante señales que son moduladas. Sin embargo, las señales que comúnmente están en la escala de microondas se propagan a través de medios continuos, por ejemplo, la atmósfera terrestre. Sin embargo, la naturaleza absorbente y dispersiva del medio en que se propagan las ondas

electromagnéticas dificulta la transmisión de las señales. Por lo que dentro de la teoría de señales y sistemas existe el concepto de modulación de banda de paso; que se clasifica en dos tipos, a saber, *portadores analógicos* y *portadores digitales*, de hecho los primeros serán el tema de estudio de este trabajo. Dentro de los portadores analógicos figuran la *amplitud modulada* (AM), *frecuencia modulada* (FM) y *fase portadora* (PM).

El primer método de transmisión de señales con aplicación directa al telégrafo y teléfono se remonta al uso de la AM.

*Autor para correspondencia: mvvegab@ipn.mx

Correo electrónico: mvvegab@ipn.mx (Manuel Vladimir Vega-Blanco), ltoledos@ipn.mx (Leonel Toledo-Sesma).

Historial del manuscrito: recibido el 07/07/2023, última versión-revisada recibida el 14/11/2023, aceptado el 20/11/2023, en línea (postprint) desde el 21/11/2023, publicado el 05/07/2024. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v12i23.11429>



Sin embargo, este método presenta algunos inconvenientes; el método es susceptible de que el receptor de las señales amplifique y detecte ruido e interferencia electromagnética, haciendo que deba incrementarse la potencia del transmisor. Además, dentro de las otras desventajas de la técnica AM es que no es apropiada para la transmisión de música, restringiéndose su uso a situaciones más específicas como la comunicación mediante transmisión de voz (Bray y of Electrical Engineers, 2002).

Estas desventajas presentes en la AM orillan a los especialistas a la necesidad de buscar nuevas técnicas de modulación y demodulación de señales, tales como *Quadrature Amplitude Modulation and Digital Modulation Theory*, entre otras (Gardiol, 2011), (de Alencar, 2022) y (Faruque, 2016). Los sistemas de comunicación, tales como la telefonía celular, sistemas de comunicación satelital, estaciones de radio y otros más, pueden funcionar debido a un modelo fundamental, que de forma muy simplificada, consiste de un transmisor, un canal de transmisión y un receptor de la señal.

Los modelos matemáticos concebidos para modular señales, consisten en variar una o más características de la geometría de la onda portadora en función de la señal que contiene la información que se transmitirá. Por lo que, si la amplitud fuese el parámetro portador de la señal, entonces esta resultará ser una función de la señal modulada, en el caso de la frecuencia modulada (FM), la característica de la onda portadora de la señal es la fase de la onda y por último el esquema en el que ambos parámetros la amplitud y la fase varían simultáneamente (de Alencar, 2022). El presente trabajo aborda una perspectiva completamente diferente de la modulación de señales a las ya existentes hoy en día, al hacer uso de los conceptos de la geometría diferencial de superficies y el cálculo fraccionario, con la finalidad de proveer un marco teórico en el cual se estudien los métodos de modulación en términos geométricos.

El cálculo fraccionario es un conjunto de teorías matemáticas que generalizan los conceptos de derivada e integral al caso de órdenes arbitrarios; es un conjunto de teorías, porque existen diversas aproximaciones que generalizan a la derivada y a la integral y que no son consistentes entre sí (Podlubny, 1998), sin embargo, todos estos diversos enfoques coinciden en que la derivada usual con orden entero positivo puede recobrase de las diversas derivadas de orden fraccionario como un caso límite. La denominación de cálculo fraccionario quizás no es muy afortunada, pues sugiere que el orden puede restringirse solamente a los números racionales, los expertos apuntan que sería mejor llamarle cálculo de orden arbitrario (Mainardi, 2010), sin embargo, por razones históricas se ha conservado la primera denominación. Aun cuando el cálculo fraccionario se originó casi a la par que el cálculo usual, no fue hasta finales del siglo XIX, en una primera instancia y, después, en la segunda mitad del siglo XX, que adquirió un renovado empuje, debido a sus diversas y exitosas aplicaciones a la física y a la ingeniería (Oldham y Spanier, 1974). En particular, el cálculo fraccionario demostró ser útil para modelar fenómenos visco-elásticos y de propagación anómala de ondas en cierto tipo de medios materiales (Mainardi, 2010). En este trabajo consideraremos la derivada de Caputo de orden fraccionario introducida por Michele Caputo en 1967 (Caputo, 1967) y que comparte con la derivada usual varias propiedades como la aditividad, homogeneidad y la regla de Leibniz, además, como característica distintiva, la

derivada de Caputo de orden fraccionario de una constante es cero.

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera. En la sección 2 se describe brevemente la ecuación de onda y su solución, además de los métodos clásicos existentes para la modulación de señales senoidales. En la sección 3 se introducen los conceptos de superficies regulares y parametrización de superficies, aunado a estos conceptos en la sección 4 se introduce el concepto de curva geodésica en superficies regulares y de revolución. Estas nociones permiten definir los objetos geométricos denominados embudos en \mathbb{R}^3 , que se presentan en la sección 5. En la sección 6 se introduce el concepto de flujo geodésico en un embudo a partir de una señal periódica. La parte medular de este trabajo es la construcción de un método de modulación geométrico-fraccionario, por lo que la sección 7 está dedicada a dar los rudimentos de la derivada de Caputo de orden fraccionario y a continuación, en la sección 8 se presenta el método de modulación fraccionaria el cual se ilustra con un ejemplo concreto. Finalmente, la sección 9 corresponde a las conclusiones en la que los autores discurren acerca de posibles desarrollos de este método y formulan algunos cuestionamientos dirigidos al análisis y la reflexión acerca de las implicaciones que dicho método pudiera tener en diversas áreas de la física y la ingeniería.

2. Ondas y modulación de ondas

2.1. La ecuación de onda

Si se considera una cuerda tensada por la que actúa una fuerza transversal neta, se vería que el movimiento en dicha cuerda se describe mediante la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

donde v es la velocidad de propagación. La ecuación (1) admite como soluciones todas las funciones de la forma:

$$u(x, t) = f(x \pm vt). \quad (2)$$

Las soluciones (2) representan ondas propagándose en la dirección negativa y positiva del eje x , respectivamente, esto permite construir la solución más general a la ecuación de onda al sumar dos ondas viajando una a la izquierda y la otra a la derecha (Griffiths, 1989):

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt). \quad (3)$$

De todas las formas posibles de ondas, una de las más relevantes es la forma senoidal con número de onda k , frecuencia angular ω viajando a la derecha y fase δ dado por:

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta). \quad (4)$$

La expresión (4) es muy común en la teoría de señales y sistemas para su aplicación en los sistemas de comunicación para la transmisión de la información a través de los distintos medios, tales como radio, televisión, internet, etc., donde la onda (4) conocida como la fuente se transmite por un canal de comunicación por medio un transmisor o modulador (Oppenheim et al., 1997).

Sin embargo, cuando una señal entra a un medio continuo, tal como la atmósfera, cuyas propiedades eléctricas y magnéticas son relevantes; puede apreciarse variaciones significativas

de los parámetros que caracterizan a la señal, *i.e.*, se presentan los fenómenos de señales reflejadas y transmitidas, haciendo que el medio atenúe y propague (la mayoría de las veces) las señales en un intervalo de frecuencia más alto a través de distancias más grandes. Lo anterior conduce al uso de conceptos muy específicos en la teoría de señales y sistemas, tales como la modulación y demodulación de señales senoidales. En términos simples, la modulación consiste en que el transmisor inserta una señal dentro de otra señal de frecuencia mayor y el proceso de extraer la señal que contiene la información se conoce como *demodulación*. La modulación de señales permite la transmisión simultánea de varias señales con espectros traslapados en un mismo canal, dando lugar al uso de multiplexaje (Oppenheim et al., 1997).

2.2. Método clásico de modulación de señales, amplitud modulada (AM)

En esta sección únicamente se aborda la modulación de señales cuya amplitud es una función dependiente del tiempo, por lo que se sugiere al lector interesado consultar las siguientes referencias para abordar y ahondar en las otras técnicas de modulación (de Alencar, 2022), (Faruque, 2016) y (Oppenheim et al., 1997).

La técnica de modulación más conocida es la de la amplitud modulada, que consiste en que la onda portadora de la señal su amplitud varía de acuerdo con una señal modulada, esta técnica también se le conoce como *Double-Sideband Amplitude Modulation* (AM-DSB), y es muy empleada para la radio comercial, además de ser muy simple en el diseño del receptor y tener fácil mantenimiento (de Alencar, 2022).

La señal AM puede representarse como una onda senoidal, tal como vemos de la siguiente expresión:

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega_c t + \delta), \quad (5)$$

donde A es la amplitud de la señal, ω_c es la frecuencia angular y δ representa la fase de la señal. En teoría de señales denotan por $m(t)$ la señal de modulación, tal que su frecuencia máxima sea mucho menor que la frecuencia de la señal portadora *i.e.*, $\omega_M \ll \omega_c$. El método AM tiene como objetivo que la amplitud de la portadora tenga variaciones proporcionales a la señal de modulación $m(t)$, por lo que, véase (de Alencar, 2022) para mayores detalles, la amplitud de la portadora toma la forma:

$$a(t) = A(1 + \Delta_{AM} m(t)), \quad (6)$$

donde $\Delta_{AM} = B/A$, la razón de las amplitudes de la portadora B modulada y la amplitud A de la señal; a esta razón de las amplitudes se le conoce como *índice de modulación AM*. La amplitud de la portadora produce la forma de onda modulada de la siguiente manera:

$$s(t) = A[1 + \Delta_{AM} m(t)] \cos(kx - \omega_c t + \delta). \quad (7)$$

3. Existencia y unicidad de las geodésicas sobre una superficie regular

En este trabajo se utilizará como marco teórico la geometría diferencial de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 como se aborda en los textos de (do Carmo, 2016), (O'Neill, 2014) y (Thorpe, 2012).

Con la finalidad de hacer más clara la exposición de las ideas centrales de este trabajo, se recuerda al lector la definición de geodésica sobre una superficie regular, las ecuaciones diferenciales de las geodésicas y el resultado que establece su existencia y unicidad, la demostración de este último puede consultarse en (do Carmo, 2016).

Antes de introducir dichas definiciones, es importante introducir la definición de plano tangente a una superficie regular (do Carmo, 2016), esta se presenta a continuación.

Definición 1. Dada una superficie regular S en \mathbb{R}^3 y dado $\mathbf{p} \in S$, se define el *plano tangente* a S en \mathbf{p} como la colección de parejas ordenadas de la forma (\mathbf{p}, \mathbf{v}) donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ para los cuales existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$, así como una curva regular $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya traza está contenida en S , para la cual $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{v}$. En lo subsecuente se denotará al plano tangente a S en \mathbf{p} por $T_{\mathbf{p}}S$.

Definición 2. Sea S una superficie regular. Una curva regular $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ es llamada *geodésica sobre S* , si la componente tangencial de $\ddot{\gamma}(t)$ es nula. Es decir, si para todo $t \in (a, b)$ y para todo $\mathbf{v} \in T_{\gamma(t)}S$ se cumple que $\ddot{\gamma}(t) \cdot \mathbf{v} = 0$.

Sean S una superficie regular, $\mathbf{p} \in S$, $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S entorno a \mathbf{p} . En coordenadas rectangulares se tiene que $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ para todo $(u, v) \in U$. Las funciones coordenadas $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son funciones diferenciables. Se define

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right), \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_v(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) \right), \quad (9)$$

$$\mathbf{n}(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v). \quad (10)$$

Como se sabe, los vectores $\mathbf{x}_u(u, v)$ y $\mathbf{x}_v(u, v)$ son una base de $T_{\mathbf{x}(u, v)}S$. Luego, $\mathbf{x}_u(u, v)$, $\mathbf{x}_v(u, v)$ y $\mathbf{n}(u, v)$ forman una base de \mathbb{R}^3 .

Como se puede consultar en (do Carmo, 2016), dada una curva regular $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ tal que $\gamma(t) \in \mathbf{x}(U)$ para todo $t \in (a, b)$, se tiene que su aceleración viene dada por la ecuación:

$$\ddot{\gamma}(t) = \left(\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 \right) \mathbf{x}_u + \left(\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 \right) \mathbf{x}_v + N\mathbf{n}, \quad (11)$$

donde los coeficientes Γ_{ij}^k son los *símbolos de Christoffel* y N es la componente de $\ddot{\gamma}(t)$ en \mathbf{n} .

Como consecuencia de (11), resulta que $\gamma : (a, b) \rightarrow S$ es una geodésica si y sólo si

$$\ddot{u} + \Gamma_{11}^1 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^1 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^1 \dot{v}^2 = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{v} + \Gamma_{11}^2 \dot{u}^2 + 2\Gamma_{12}^2 \dot{u}\dot{v} + \Gamma_{22}^2 \dot{v}^2 = 0. \quad (13)$$

Las ecuaciones (12) y (13) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, no lineales y acopladas, llamadas *ecuaciones diferenciales de las geodésicas*. Como también se puede consultar en (do Carmo, 2016), la siguiente proposición es verdadera.

Proposición 1 [Existencia y unicidad de las geodésicas] Sean S una superficie regular. Dado $\mathbf{p} \in S$ y $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$, tal

que $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, existe $\varepsilon > 0$ y una única geodésica parametrizada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{w}$.

También, se recuerda al lector que para hacer geometría en superficies regulares, se requiere medir distancias y ángulos, para ello, un concepto fundamental en la geometría diferencial es el de la *primera forma fundamental* (do Carmo, 2016), (O’Neill, 2014) y (Thorpe, 2012), la cual se define a continuación.

Definición 3. La *primera forma fundamental* sobre una superficie S , se define como la función que a cada $\mathbf{p} \in S$ le asigna la forma bilineal sobre $T_{\mathbf{p}}S \times T_{\mathbf{p}}S$ definida por la fórmula:

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}S, \quad (14)$$

donde \cdot denota al producto punto de \mathbb{R}^3 .

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S entorno a \mathbf{p} , así $\mathbf{x}(u_0, v_0) = \mathbf{p}$, entonces $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ son una base de $T_{\mathbf{p}}S$. Así, dados $\mathbf{a} = a_1\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + a_2\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{x}_u(u_0, v_0) + b_2\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ arbitrarios en $T_{\mathbf{p}}S$, los escalares a_1, a_2, b_1 y b_2 son las coordenadas de \mathbf{a} y \mathbf{b} en la base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, y se tiene que

$$I(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1E + (a_1b_2 + a_2b_1)F + a_2b_2G, \quad (15)$$

donde

$$E := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad (16)$$

$$F := \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad (17)$$

$$G := \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \quad (18)$$

Las funciones E, F y G son llamados *coeficientes de la primera forma fundamental*.

4. Geodésicas en superficies de revolución

En lo que sigue, S es una superficie de revolución definida mediante una parametrización de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (f(r) \cos \theta, f(r) \sin \theta, g(r)), \quad (19)$$

donde f y g son funciones continuas en el cerrado $[r_0, r_1]$, donde $r_0 > 0$; diferenciables en el abierto (r_0, r_1) , y tales que $f(r) > 0$ y $g(r) > 0$ para todo $r \in [r_0, r_1]$. A partir de la definición de la primera forma fundamental, un cálculo directo muestra que los coeficientes de la primera forma fundamental de S vienen dados por:

$$E = (f')^2 + (g')^2, \quad (20)$$

$$F = 0, \quad (21)$$

$$G = f^2. \quad (22)$$

Un resultado bien conocido de la geometría diferencial clásica de curvas y superficies (do Carmo, 2016) es que las ecuaciones diferenciales de las curvas geodésicas sobre S son

$$\ddot{\theta} + \frac{2ff'}{f^2} \dot{\theta} = 0, \quad (23)$$

$$\ddot{r} - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} \dot{\theta}^2 + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} \dot{r}^2 = 0. \quad (24)$$

Ya que se requiere manipular soluciones explícitas del sistema anterior, se mostrará como resolver estas ecuaciones.

Para tal efecto, note que

$$\frac{2ff'}{f^2} = \frac{d}{dr} \ln G, \quad (25)$$

$$\frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2} = \frac{1}{2E} \frac{d}{dr} \ln G, \quad (26)$$

$$\frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \ln E, \quad (27)$$

Luego, al sustituir (25) en (23) y al sustituir (26) y (27) en (24) el sistema (23) y (24) se reescribe como

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{d}{dr} \ln G \right) \dot{\theta} = 0, \quad (28)$$

$$\ddot{r} - \frac{1}{2E} \left(\frac{d}{dr} \ln G \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) \dot{r}^2 = 0. \quad (29)$$

Para resolver el sistema formado por (28) y (29), primero se aplica reducción de orden a (28) mediante el cambio $z = \dot{\theta}$, así de (28) se obtiene la ecuación

$$\dot{z} + \left(\frac{d}{dr} \ln G \right) rz = 0. \quad (30)$$

Por la regla de la cadena se tiene que

$$\dot{z} = \dot{r} \frac{dz}{dr} = rz'. \quad (31)$$

Por lo que combinando (30) y (31) queda la ecuación

$$z' + \left(\frac{d}{dr} \ln G \right) z = 0. \quad (32)$$

La ecuación (32) es de variables separables, por lo que una solución particular de esta es

$$z = \frac{1}{G}, \quad (33)$$

es decir

$$\dot{\theta} = \frac{1}{G}. \quad (34)$$

Al sustituir (34) en (29) se llega a la ecuación

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) \dot{r}^2 = \frac{1}{2EG^2} \frac{d}{dr} \ln G. \quad (35)$$

Al aplicar una reducción de orden a (35) mediante el cambio $p = \dot{r}$ se obtiene la ecuación

$$\dot{p} + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) p^2 = \frac{1}{2EG^2} \frac{d}{dr} \ln G. \quad (36)$$

En virtud de la regla de la cadena, se tiene que

$$\dot{p} = p \frac{dp}{dr} = pp'. \quad (37)$$

Así, al sustituir (37) en (36) se llega a la ecuación

$$pp' + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) p^2 = \frac{1}{2EG^2} \frac{d}{dr} \ln G. \quad (38)$$

Si se supone que las geodésicas son propias, entonces $\dot{r} \neq 0$, es decir $p \neq 0$. Luego (38) se reescribe como

$$p' + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) p = \frac{p^{-1}}{2EG^2} \frac{d}{dr} \ln G. \quad (39)$$

La ecuación (39) es una ecuación de Bernoulli (Zill y Cullen, 1997) que puede resolverse mediante técnicas estándar, por ejemplo, hágase

$$p = \varphi\psi, \quad (40)$$

donde φ y ψ son funciones derivables. Es claro que

$$p' = \varphi'\psi + \varphi\psi'. \quad (41)$$

De esta manera, al sustituir (40) y (41) en (39) se obtiene la ecuación

$$\varphi'\psi + \left[\psi' + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) \psi \right] \varphi = \frac{1}{2EG^2} \left(\frac{d}{dr} \ln G \right) \varphi^{-1} \psi^{-1}. \quad (42)$$

El método exige que en (42) se tenga

$$\psi' + \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dr} \ln E \right) \psi = 0. \quad (43)$$

La ecuación (43) es de variables separables y una solución particular es

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{E}}. \quad (44)$$

Ahora bien, la ecuación (43) implica que (42) se reescribe como

$$\varphi'\psi = \frac{1}{2EG} \left(\frac{d}{dr} \ln G \right) \varphi^{-1} \psi^{-1}. \quad (45)$$

Si en (45) se agrupan a la izquierda términos con φ y a la derecha términos con ψ y se sustituye ψ de (44), entonces la ecuación resultante es

$$\varphi\varphi' = \frac{1}{2G} \frac{d}{dr} \ln G. \quad (46)$$

Ahora, nótese que $\varphi\varphi' = \frac{1}{2} d\varphi^2/dr$ y que $d \ln G/dr = G'/G$, entonces (46) se reescribe como

$$\frac{d\varphi^2}{dr} = \frac{G'}{G^2}. \quad (47)$$

Luego, al integrar ambos lados de (47) se obtiene que

$$\varphi^2 = C - \frac{1}{G}, \quad (48)$$

donde C es una constante de integración.

De (48) se sigue que (47) tiene dos soluciones particulares, a saber

$$\varphi_1 = -\sqrt{C - \frac{1}{G}}, \quad (49)$$

$$\varphi_2 = \sqrt{C - \frac{1}{G}}. \quad (50)$$

De esta manera, la ecuación (39) tiene soluciones

$$p_1 = -\frac{\sqrt{CG - 1}}{\sqrt{EG}}, \quad (51)$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{CG - 1}}{\sqrt{EG}}. \quad (52)$$

En consecuencia, de (51) y de (52) se concluye que

$$\dot{r}_1 = -\frac{\sqrt{CG - 1}}{\sqrt{EG}}, \quad (53)$$

$$\dot{r}_2 = \frac{\sqrt{CG - 1}}{\sqrt{EG}}. \quad (54)$$

Ambas soluciones representan a la misma geodésica, la solución (53) corresponde con la geodésica recorrida en el sentido opuesto al vector tangente inicial, mientras que (54) corresponde con la geodésica recorrida en dirección del vector inicial, esta última es la que se considerará.

Finalmente, una geodésica particular sobre S quedará determinada en forma única dadas las condiciones iniciales y las condiciones de frontera. De hecho, sabemos que $E = (f')^2 + (g')^2$ y $G = f^2$, luego (52), se obtiene que

$$\dot{r}(\tau) = \frac{\sqrt{Cf^2 - 1}}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}. \quad (55)$$

Note que, de (55) se tiene en particular que

$$\dot{r}(0) = \frac{\sqrt{Cf^2(r_0) - 1}}{\sqrt{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2}}, \quad (56)$$

por lo que al despejar a c se llega a que

$$C = \{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2\} \dot{r}^2(0) + 1/f^2(r_0). \quad (57)$$

Así, de (55) y de (57) se concluye que

$$\dot{r}(\tau) = \frac{\sqrt{\{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2\} \dot{r}^2(0) + 1/f^2(r_0) - 1/f^2(r)}}{\sqrt{[f'(r)]^2 + [g'(r)]^2}}. \quad (58)$$

5. Embudos en el espacio

Ahora se introducirá un nuevo concepto que será útil para los propósitos de este trabajo.

Definición 4. Sea $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ no vacío. Un conjunto no vacío \mathcal{E} es un *embudo* en \mathbb{R}^3 si

1. \mathcal{E} es conexo y compacto.
2. Existe $S \subset \mathbb{R}^3$, una superficie regular orientable tal que $\mathcal{E} \subset S$, se llamará a S la *superficie de fondo* de \mathcal{E} .
3. El conjunto $S \setminus \overline{\mathcal{E}} \cap \mathcal{E}$ es la unión disjunta de dos curvas simples cerradas. Una será denotada por $\partial\mathcal{E}_0$ y será llamada la *entrada del embudo* y la otra será denotada por $\partial\mathcal{E}_1$ y será llamada la *salida del embudo* (vease la figura 1).

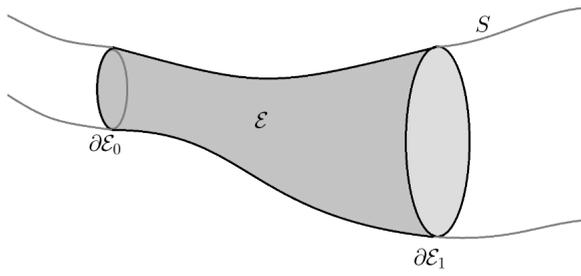


Figura 1: Embudo \mathcal{E} con su entrada $\partial\mathcal{E}_0$, salida $\partial\mathcal{E}_1$ y superficie de fondo S .

Observación 1. En particular, las superficies de revolución definidas mediante parametrizaciones de la forma (19) son embudos en \mathbb{R}^3 los cuales tienen por frontera la unión disjunta de dos circunferencias, una de radio r_0 y la otra de radio r_1 . La entrada y la salida del embudo son las circunferencias parametrizadas por

$$\mathbf{x}(r_0, t) = (f(r_0) \cos t, f(r_0) \sin t, g(r_0)), \quad (59)$$

$$\mathbf{x}(r_1, t) = (f(r_1) \cos t, f(r_1) \sin t, g(r_1)), \quad (60)$$

respectivamente y donde $t \in [0, 2\pi)$. En lo que sigue, se considerarán solamente a esta clase de embudos.

6. Flujo geodésico en un embudo asociado a una señal periódica

Para los fines que se persiguen en este trabajo, se considera que una *señal* es cualquier $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea diferenciable y periódica. Dada una señal f arbitraria con periodo p , se define $\sigma_f(t) = f(2\pi t/p)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Claramente, σ_f es una señal con periodo 2π . Luego, para determinar completamente a σ_f basta restringirse al intervalo $[0, 2\pi)$. Así, se identifica a las señales con las funciones continuas σ en $[0, 2\pi)$ que son diferenciables en $(0, 2\pi)$ y para las cuales se verifican las siguientes condiciones:

1. Se cumple que $\sigma(0) = \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} \sigma(t)$,
2. además $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sigma'(t) = \lim_{t \rightarrow 2\pi^-} \sigma'(t)$.

Sea \mathcal{E} un embudo y S su superficie de fondo, sea $\delta \in \mathbb{R}$ arbitrario tal que $0 < \delta < 1$. Dada una señal σ se define para cada $t \in [0, 2\pi)$ el vector:

$$\mathbf{w}_0(t; \phi) = \frac{1}{\sqrt{E}} \exp[\sigma(t)] \mathbf{x}_r(r_0, t) + \frac{\delta}{\sqrt{G}} \mathbf{x}_\theta(r_0, t). \quad (61)$$

El vector $\mathbf{w}_0(t; \phi)$ definido de esta manera, resulta ser un vector tangente a S en $\mathbf{x}(r_0, t)$. Se llamará a δ la *desviación* de la señal de entrada.

Al aplicar la proposición 1 a la superficie de fondo S , se asegura que existe una única geodésica $\gamma : (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ sobre S para la cual se cumplen las condiciones iniciales siguientes:

$$\gamma(\tau_0) = \mathbf{x}(\tau_0, t), \quad (62)$$

$$\dot{\gamma}(\tau_0) = \mathbf{w}_0(t; \phi). \quad (63)$$

La situación se puede visualizar como nos sugiere la figura 2. En consecuencia, la solución que se escogerá será (54), ya que implica que r_2 es creciente y, así, la geodésica correspondiente estará contenida en el embudo.

De esta manera se obtiene una familia de geodésicas sobre S parametrizada por t . Con la finalidad de enfatizar la dependencia de la geodésica de t y de δ , se escribirá $\gamma(\tau; t, \delta)$ para denotar al punto de la geodésica en τ correspondiente al parámetro t y a la desviación δ .

La construcción anterior sugiere que, dada una señal portadora $\sigma_0(t)$, se puede definir una señal modulada $\sigma_1(t)$, en la salida del embudo, si se consideran las componentes de las velocidades de las geodésicas en los vectores normales a la circunferencia de salida, esto es, un primer candidato a señal modulada es

$$\sigma_1(t) := \ln [\dot{\gamma}(\tau_1) \cdot \mathbf{n}(r_1, \theta_1)], \quad (64)$$

donde τ_1 es tal que $\gamma(\tau_1) = \mathbf{x}(r_1, \theta_1)$, siendo θ_1 el ángulo que corresponde a t .

En la proposición que se enuncia a continuación se afirma que si se transmite una señal portadora por unas de las circunferencias de la frontera de un embudo, entonces, independientemente de la geometría del embudo, la señal de salida en la otra circunferencia de la frontera tendrá la misma frecuencia que la señal de entrada.

Proposición 3. Sean \mathcal{E} un embudo, $\sigma_0(t)$ una señal de entrada con frecuencia ω_0 y amplitud A_0 . Si la señal de salida $\sigma_1(t)$, como se define en (64), tiene frecuencia $\omega_1(t)$ y amplitud $A_1(t)$, entonces:

1. Se tiene que $\omega_1(t)$ es constante, aún más, $\omega_0 = \omega_1$, y
2. la amplitud $A_1(t)$ es constante, aún más, existen constantes α y β tales que $A_1 = \frac{1}{2} \ln(\alpha e^{2A_0} + \beta)$.

DEMOSTRACIÓN: Un cálculo directo nos ofrece que

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \ln [\dot{\gamma}(\tau_1) \cdot \mathbf{r}(r_1, \theta_1)] \\ &= \ln \left\{ \left[\dot{r}(\tau_1) / \sqrt{E}(r_1) \mathbf{x}_r(r_1, \theta_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dot{\theta}(\tau_1) / \sqrt{G}(r_1, \theta_1) \mathbf{x}_\theta(r_1, \theta_1) \right] \cdot \mathbf{r}(r_1, \theta_1) \right\} \\ &= \ln \dot{r}(\tau_1) \\ &= \ln \sqrt{\frac{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2 e^{2\sigma_0(t)} + 1/f^2(r_0) - 1/f^2(r_1)}{[f'(r_1)]^2 + [g'(r_1)]^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2 e^{2\sigma_0(t)}}{[f'(r_1)]^2 + [g'(r_1)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^2(r_1) - f^2(r_0)}{f^2(r_0)f^2(r_1)[f'(r_1)]^2 + f^2(r_0)f^2(r_1)[g'(r_1)]^2} \right\} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2 e^{2\sigma_0(t)}}{[f'(r_1)]^2 + [g'(r_1)]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{f^2(r_1) - f^2(r_0)}{f^2(r_0)f^2(r_1)[f'(r_1)]^2 + f^2(r_0)f^2(r_1)[g'(r_1)]^2} \right\} \quad (65) \end{aligned}$$

Ahora, en (65), hágase

$$\alpha := \frac{[f'(r_0)]^2 + [g'(r_0)]^2}{[f'(r_1)]^2 + [g'(r_1)]^2} \quad (66)$$

$$\beta := \frac{f^2(r_1) - f^2(r_0)}{f^2(r_0)f^2(r_1)[f'(r_1)]^2 + f^2(r_0)f^2(r_1)[g'(r_1)]^2}. \quad (67)$$

Claramente α y β así definidas son constantes que no dependen ni de t , τ , r o θ . Se colige de (65), (66) y (67) que

$$\sigma_1(t) = \frac{1}{2} [\alpha e^{2\sigma_0(t)} + \beta]. \quad (68)$$

Es inmediato de (68) que $\omega_1 = \omega_0$, además, nótese que $\sigma_1(t)$ alcanza su máximo cuando $\sigma_0(t)$ alcanza también su máximo, que es A_0 , luego se cumple la ecuación siguiente:

$$A_1 = \frac{1}{2} \ln(\alpha e^{2A_0} + \beta).$$

De esta manera, la proposición ha quedado demostrada. □

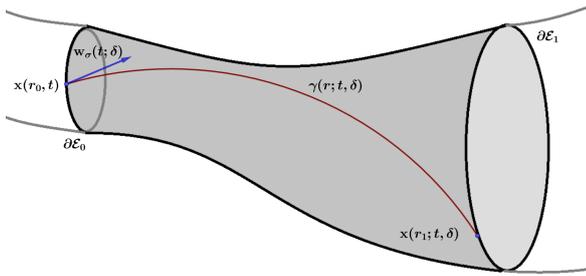


Figura 2: Un punto en $\partial\mathcal{E}_0$ y un vector tangente anclado en este punto determinan una única geodésica γ sobre \mathcal{S} .

7. La derivada de orden fraccionario de Caputo

Ahora introduciremos el concepto de la derivada de Caputo de orden fraccionario. Más detalles acerca de esta derivada pueden consultarse en (Caputo, 1967) así como en (Mainardi, 2010) y (Podlubny, 1998).

Definición 5. Sea f una función de clase C sobre un abierto (a, ∞) , sean n un entero positivo y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n - 1 < \alpha < n$. La derivada de Caputo de orden fraccionario α de f en $t \in (a, \infty)$ se define como

$${}_a^C D_t^\alpha [f](t) := \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - u)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(u) du. \quad (69)$$

En particular, si $a = 0$ y $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$${}_0^C D_t^\alpha [f](t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - u)^{-\alpha} f'(u) du. \quad (70)$$

Esta derivada fraccionaria cumple las propiedades que se enuncian a continuación y cuya demostración puede consultarse en (Podlubny, 1998).

Teorema 2. La derivada de Caputo de orden fraccionario α con $n - 1 < \alpha \leq n$ de $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que

$$\lim_{\alpha \rightarrow n^+} {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f^n(t), \quad \forall t \in (0, \infty). \quad (71)$$

Teorema 3. Sean f y g funciones tales que ${}_a^C D_t^\alpha [f]$ y ${}_a^C D_t^\alpha [g]$ existen y sea $c \in \mathbb{R}$. Las siguientes propiedades son válidas:

1. ${}_a^C D_t^\alpha [c] = 0$.
2. ${}_a^C D_t^\alpha [f + g] = {}_a^C D_t^\alpha [f] + {}_a^C D_t^\alpha [g]$.
3. ${}_a^C D_t^\alpha [\lambda f] = \lambda {}_a^C D_t^\alpha [f]$.

8. Método de modulación geométrico fraccionario

Ya se demostró que no tiene valor alguno, para efectos de la modulación de una señal, propagarla a lo largo de un embudo utilizando la primera derivada, ya que la primera derivada es un operador diferencial local y no tiene en cuenta la geometría global del embudo, es decir, no toma en cuenta los efectos no locales o históricos en un punto cualquiera de un embudo, a diferencia de las diferentes versiones de derivada fraccionaria, cuyos núcleos contienen una función de memoria (también llamada función causal) que permite la interacción global-local, como puede consultarse en (Podlubny y El-Sayed, 1996) y (Podlubny, 2004). Por esto, la propuesta central de este trabajo consiste en propagar una señal a lo largo de un embudo mediante la derivada de Caputo de orden fraccionario, considerando que el orden de derivación es variable, en particular que el orden de derivación es una función del tiempo, y con mayor exactitud, que el orden de derivación se puede expresar en términos de la señal moduladora. Si se conviene en interpretar el orden fraccionario como una medida de cuanto el operador derivada fraccionaria tiene en cuenta los efectos no locales, significa que la señal portadora dicta en cada instante el grado de olvido o ponderación de dichos efectos por parte de la derivada fraccionaria, y por esto, intuitivamente, se espera que dicha influencia se refleje en la señal de salida o señal modulada.

8.1. Propuesta

Sean \mathcal{E} un embudo y $\mathbf{p} \in \partial\mathcal{E}_0$. Sea $\sigma_m(t)$ la señal moduladora con amplitud A_m , sea $\sigma_p(t)$ la señal portadora, sea \mathbf{w}_0 el vector tangente correspondiente a $\sigma_p(t)$ dado como en (61), sea $\gamma(\tau)$ la única geodésica tal que $\gamma(0) = \mathbf{p}$ y $\dot{\gamma}(0) = \mathbf{w}_0$, y sea $i(\tau)$ la componente de $\dot{\gamma}(\tau)$ sobre \mathbf{x}_r . Se propone, como método de modulación, lo siguiente:

1. El orden fraccionario α sea función de t y venga dado por

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \eta \frac{\sigma_m(t)}{2A_m + 1} \right)^2, \quad (72)$$

donde η es una constante tal que $0 < \eta < 1$ a la cual se denominará *constante de acoplamiento entre el orden fraccionario y la señal moduladora*.

2. La señal de salida, la señal modulada, se definirá como

$$\sigma_s(t) := \ln \left[{}_a^C D_\tau^{\alpha(t)} r(\tau) \Big|_{\tau=\tau_1} \right]. \quad (73)$$

En este caso, $r(\tau_1) = r_1$.

La primera condición garantiza que $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, en efecto, nótese que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\eta\sigma_m(t)}{2A_m + 1}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\eta\sigma_m(t)}{2A_m + 1} + \frac{\eta^2\sigma_m^2(t)}{(2A_m + 1)^2}. \quad (74)$$

Proposición 5. Se cumple que $0 \leq \alpha(t) \leq 1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $|\sigma_m(t)| \leq A_m$, entonces $|\sigma_m(t)/(2A_m + 1)| \leq A_m/(2A_m + 1) = 1/(2 + 1/A_m) < 1/2$, así $\sigma_m(t)/(2A_m + 1) < 1/2$, esta última desigualdad, junto con el hecho de que $0 < \eta < 1$, implican que $\eta\sigma_m(t)/(2A_m + 1) < \eta/2 < 1/2$ de ésta última se sigue que $\eta^2\sigma_m^2(t)/(2A_m + 1)^2 < \eta^2/4 < 1/4$. Como consecuencia de las desigualdades obtenidas en este análisis y de (74) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq \alpha(t) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\eta\sigma_m(t)}{2A_m + 1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\eta\sigma_m(t)}{2A_m + 1} + \frac{\eta^2\sigma_m^2(t)}{(2A_m + 1)^2} \\ &< \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1. \end{aligned}$$

□

Ahora, desarrollemos ${}_0^C D_\tau^{\alpha(t)} r(\tau) |_{\tau=\tau_1}$. Aplicando la definición de derivada de Caputo fraccionaria (69), se tiene que

$${}_0^C D_\tau^{\alpha(t)} r(\tau) |_{\tau=\tau_1} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - u)^{-\alpha(t)} \dot{r}(u) du \quad (75)$$

Ya que $\dot{r}(u) = dr/du$, se sigue que al aplicar el teorema de cambio de variable a la integral del lado derecho de (75) que

$$\int_0^{\tau_1} (\tau_1 - u)^{-\alpha} \dot{r}(u) du = \int_{r_0}^{\tau_1} (\tau(r_1) - u(r))^{-\alpha(t)} dr \quad (76)$$

Así, de (75), (76) y (73) se obtiene que

$$\sigma_s(t) = \ln \left[\int_{r_0}^{\tau_1} (\tau(r_1) - u(r))^{-\alpha(t)} dr \right]. \quad (77)$$

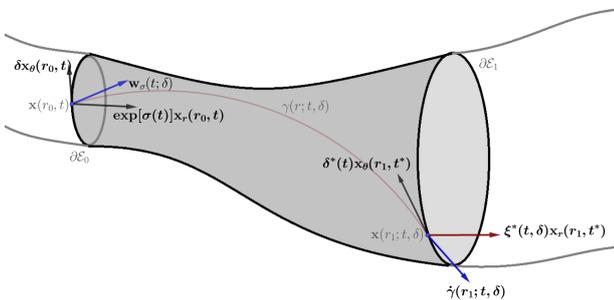


Figura 3: La componente radial $\dot{r}(\tau_1; t, \delta)$ puede interpretarse como el resultado de modular la señal de entrada $\sigma_0(t)$ mediante el embudo E_0 .

8.2. Aplicación numérica del método de modulación geométrico-fraccionario

En general, la integral que se tiene que calcular en (77) puede resultar difícil de expresar analíticamente en términos

de funciones elementales o estándar, puesto que involucra, al menos en el caso de integrandos algebraicos, la aparición de funciones irracionales que dan lugar a integrales elípticas o funciones especiales como las funciones hipergeométricas. A pesar de esta aparente complicación, es posible ilustrar el método de modulación propuesto en algunos casos particulares.

Considere la señal portadora $\sigma_p(t) = \sin(5t)$, la señal moduladora $\sigma_m(t) = \sin(t) + \sin(2t)$, ambas son señales de tipo senoidal con periodos 2π y $2\pi/5$ respectivamente, la amplitud de $\sigma_m(t)$ es $A_m = 2$. Las gráficas de $\sigma_m(t)$ y de $\sigma_p(t)$ se muestran en la figura 4.

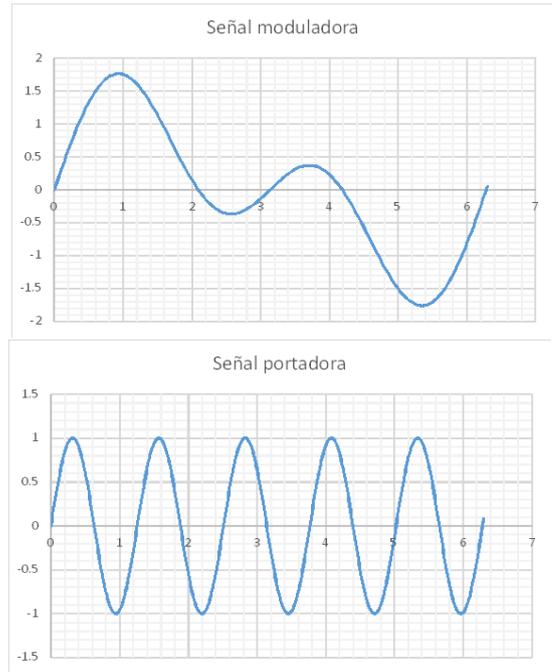


Figura 4: La figura superior es la señal moduladora $\sigma_m(t) = \sin(t) + \sin(2t)$ y la inferior es la señal portadora $\sigma_p(t) = \sin(5t)$.

Sea \mathcal{E} el embudo cuyas funciones generatrices son $f(r) = r^2$ y $g(r) = r^2 - 1$ donde $1 \leq r \leq 2$, este se muestra en la figura 5.

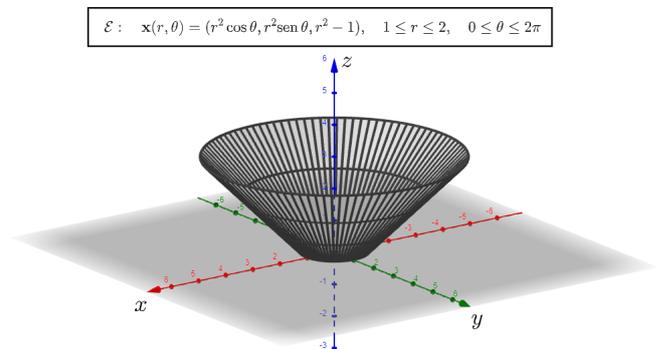


Figura 5: Embudo cuyas funciones generatrices son $f(r) = r^2$ y $g(r) = r^2 - 1$ donde $1 \leq r \leq 2$.

Los coeficientes de la primera forma fundamental de este embudo son $E = 8r^2$ y $G = r^4$. Luego, al sustituir E y F en (54)

se obtiene

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{cr^4 - 1}}{\sqrt{2}r^3}. \quad (78)$$

Ya que en $r = 1$ se debe tener que $\dot{r}(0) = \exp[\sigma_m(t)]$, entonces de (78) se tiene que

$$\exp[\sigma_m(t)] = \frac{\sqrt{c - 1}}{\sqrt{2}}. \quad (79)$$

De (79) se tiene al despejar a c que

$$c = 2 \exp[2\sigma_m(t)] + 1. \quad (80)$$

Luego, sustituyendo c de (80) en (78) se concluye que

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{(2 \exp[2\sigma_m(t)] + 1)r^4 - 1}}{\sqrt{2}r^3} \quad (81)$$

Nótese que (81) es separable, así, se tiene que (81) se escribe en forma diferencial como

$$d\tau = \frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{(2 \exp[2\sigma_m(t)] + 1)r^4 - 1}} dr,$$

por lo que al integrar se tiene que

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{\sqrt{2}r^3}{\sqrt{(2 \exp[2\sigma_m(t)] + 1)r^4 - 1}} dr \\ &= \frac{\sqrt{(2 \exp[2\sigma_m(t)] + 1)r^4 - 1}}{(2 \exp[2\sigma_m(t)] + 1) \sqrt{2}} + k \\ &= \frac{\sqrt{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1)r^4 - 1}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} + k, \end{aligned} \quad (82)$$

donde k es una constante de integración.

Luego, sustituyendo (82) en (76) se llega a

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_1} (\tau_1 - u)^{-\alpha(t)} \dot{r}(u) du &= \\ \int_{r_0}^{r_1} \left\{ \frac{\sqrt{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1)r^4 - 1}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1)r^4 - 1}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} \right\}^{\alpha(t)} dr. \end{aligned} \quad (83)$$

Ahora, si se sustituye $\sigma_m(t) = \text{sen}(t) + \text{sen}(2t)$ en (72) se obtiene que

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} - \eta \frac{\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)}{3} \right)^2. \quad (84)$$

De esta manera, sustituyendo (84), $r_0 = 1$ y $r_1 = 2$ en (83) se obtiene la integral

$$\int_0^{\tau_1} (\tau_1 - u)^{-\alpha(t)} \dot{r}(u) du = \int_1^2 \left\{ \frac{\sqrt{32 \exp[2\text{sen}(5t)] + 15}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} \right. \quad (85)$$

$$\left. - \frac{\sqrt{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1)r^4 - 1}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} \right\}^{-\left(\frac{1}{2} - \eta \frac{\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)}{3}\right)^2} dr. \quad (86)$$

De esta forma, al sustituir (86) en (77), la señal modulada queda escrita como

$$\sigma_s(t) = \ln \left[\int_1^2 \left\{ \frac{\sqrt{32 \exp[2\text{sen}(5t)] + 15}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} \frac{\sqrt{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1)r^4 - 1}}{(2 \exp[2\text{sen}(5t)] + 1) \sqrt{2}} \right\}^{-\left(\frac{1}{2} - \eta \frac{\text{sen}(t) + \text{sen}(2t)}{3}\right)^2} dr \right] \quad (87)$$

A continuación, en la figura 6, se muestran las gráficas de la señal modulada versus la gráfica de la señal portadora y la señal moduladora para $\eta = 0$, $\eta = 1/4$, $\eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$, en este ejemplo, la integral (86) se resolvió numéricamente mediante métodos estándar.

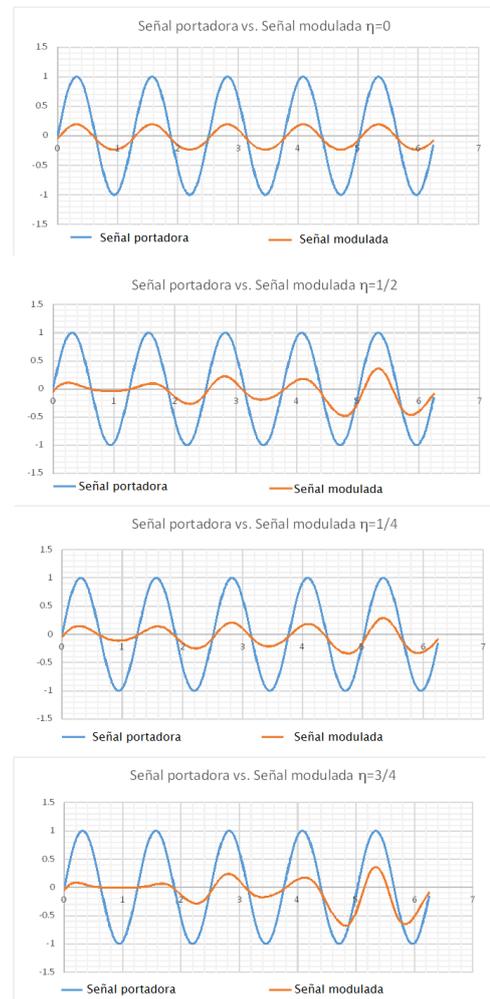


Figura 6: Gráficas de la señal modulada (en rojo) versus señal portadora (en azul) correspondientes a $\eta = 0$, $\eta = 1/4$, $\eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$.

Podemos aplicar una traslación y una dilatación/contracción respecto al eje vertical para normalizar las gráficas de las señales moduladas. En este caso, el valor de la traslación viene dado por el valor promedio de la señal en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\bar{\sigma}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_m(t) dt. \quad (88)$$

Mientras que la dilatación/contracción viene dado por el cociente de la señal portadora y la señal moduladora A_p/A_m . Así, la señal modulada normalizada viene dada por

$$\sigma_s^{\text{Norm}}(t) = \frac{A_p}{A_m} (\sigma_s(t) - \bar{\sigma}_m). \quad (89)$$

A continuación, en la figura 7, se muestran las gráficas de la señal modulada normalizada versus la señal portadora y la señal moduladora para los valores de la constante de acoplamiento $\eta = 0, \eta = 1/4, \eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$.

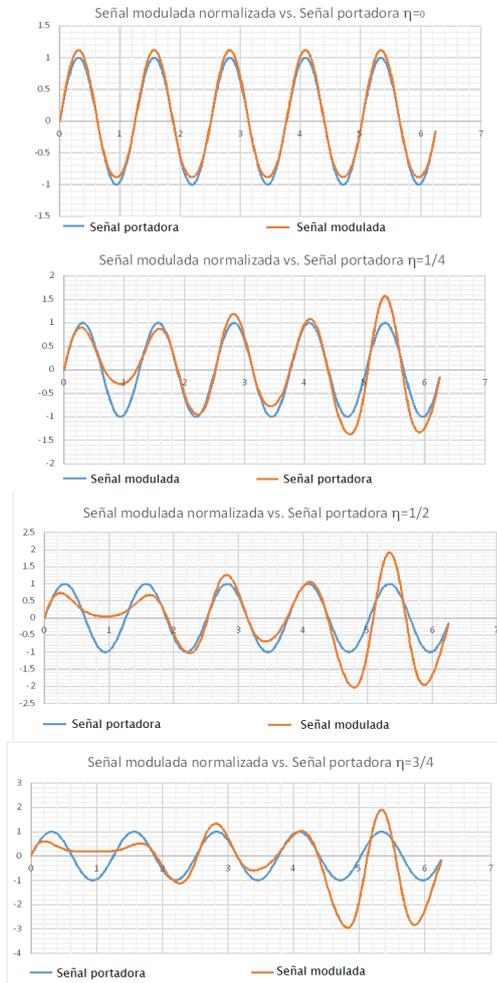


Figura 7: Gráficas de la señal modulada normalizada (en rojo) versus señal portadora (en azul) la correspondientes a $\eta = 0, \eta = 1/4, \eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$.

También se muestra, en la figura 8, las gráficas de la señal moduladora versus la señal modulada y en la figura 9 las gráficas de la señal moduladora versus la señal modulada normalizada para distintos valores de la constante de acoplamiento.

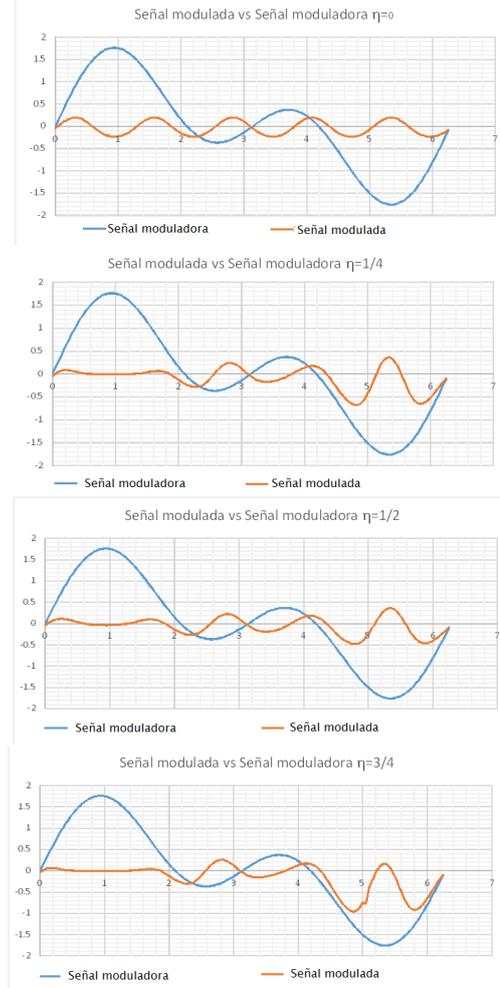


Figura 8: Gráficas de la señal moduladora (en azul) versus la señal modulada (en rojo) correspondientes a $\eta = 0, \eta = 1/4, \eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$.

Finalmente, para dar al lector una idea de la dependencia de la señal modulada normalizada del orden fraccionario respecto a la señal portadora, se define, como una medida de la desviación de la señal modulada respecto a la señal portadora, la *variación cuadrática de una señal modulada respecto a la señal portadora* por la fórmula:

$$V[\sigma_s, \sigma_p](t) = (\sigma_p(t) - \sigma_s^{\text{Norm}}(t))^2, \quad \forall t \in [0, 2\pi]. \quad (90)$$

Se muestra en la figura 10, las gráficas de las variaciones cuadráticas respecto de las señales moduladas normalizadas respecto a la señal portadora para $\eta = 0, \eta = 1/4, \eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$.

9. Conclusiones

En las gráficas de la figura 7 muestran que, para valores de la constante de acoplamiento cercanos a cero, la señal portadora y la señal modulada son muy parecidas y conforme la constante de acoplamiento aumenta, también aumenta la influencia de la señal moduladora en la geometría de la señal modulada. Así, la constante de acoplamiento, en efecto, regula la acción de la señal moduladora sobre la señal portadora para determinar a la señal modulada.

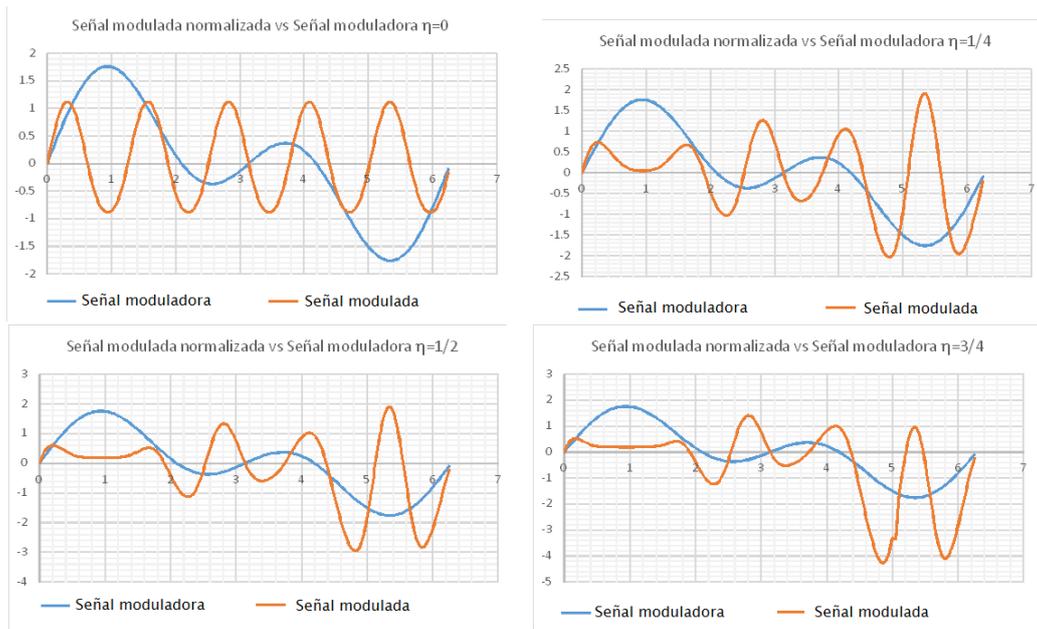


Figura 9: Gráficas de la señal moduladora (en azul) versus la señal modulada normalizada correspondientes (en rojo) a $\eta = 0$, $\eta = 1/4$, $\eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$.

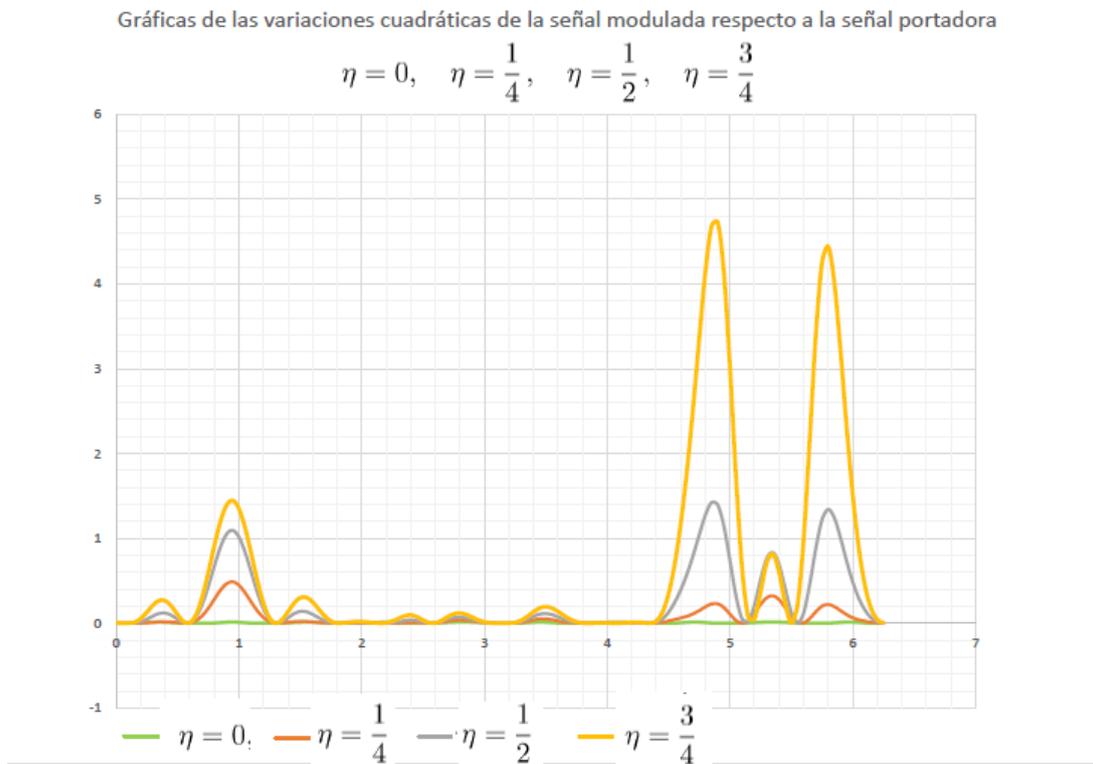


Figura 10: Variaciones cuadráticas de las señales moduladas normalizadas con respecto a la señal portadora para $\eta = 0$, $\eta = 1/4$, $\eta = 1/2$ y $\eta = 3/4$. Nótese que a mayor valor de la constante de acoplamiento, mayor diferencia entre la señal modulada respecto a la señal portadora.

En el caso de la gráfica (10) se puede observar que entre mayor es el valor de la constante de acoplamiento, mayores son los valores máximos de la variación cuadrática de la señal modulada respecto a la señal portadora. Los valores extremos, para todos los valores de la constante de acoplamiento, se ubican donde la señal moduladora alcanza sus valores extremos. Este patrón sugiere que la demodulación, es decir, la obtención de la señal moduladora, es posible a partir del conocimiento de la señal portadora y de la señal modulada. Actualmente, este es un tema de investigación que ocupa a los autores del presente trabajo.

Como se podrá advertir, aunque el método de modulación propuesto aún se encuentra en un estado incipiente, los resultados mostrados en este trabajo sugieren que puede ser útil para abordar problemáticas propias de la geometría diferencial, el análisis de señales y la física, por ende se sospecha que puede ser base de algunas aplicaciones concretas en diversos campos de la ingeniería. Por esto, los autores concuerdan en que puede ser un punto de partida novedoso, al menos no convencional, que merece ser estudiado acuciosamente.

El método propuesto insinúa que los distintos métodos de modulación pueden unificarse en un solo marco teórico en el cual, cada método corresponde con una clase de embudos y órdenes fraccionarios. Surge la siguiente pregunta: ¿Existe una clasificación de embudos y órdenes fraccionarios que corresponda biunívocamente con los métodos de modulación conocidos? Es decir, ¿existe una partición (en consecuencia existe una relación de equivalencia) en la clase formada por parejas ordenadas de embudos y órdenes fraccionarios, de tal manera que cada conjunto de la partición corresponda con un método de modulación?

Con relación a los cuestionamientos previos, si existe tal correspondencia biunívoca entre métodos de modulación y clases de equivalencia entre parejas ordenadas de embudos y órdenes fraccionarios, ¿qué criterios permiten decidir si dos métodos de modulación son equivalentes?

Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores sus valiosas y acertadas observaciones, ya que enriquecieron sustancialmente la versión inicial de este trabajo. También agradecemos al equipo editorial por su apoyo, comprensión y paciencia.

Referencias

- Bray, J. y of Electrical Engineers, I. (2002). *Innovation and the Communications Revolution: From the Victorian Pioneers to Broadband Internet*. History and Management of Technology. Institution of Engineering and Technology.
- Caputo, M. (1967). Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent—II. *Geophysical Journal International*, 13(5):529–539.
- de Alencar, M. (2022). *Modulation Theory*. River Publishers.
- do Carmo, M. (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Revised and Updated Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.
- Faruque, S. (2016). *Radio Frequency Modulation Made Easy*. SpringerBriefs in Electrical and Computer Engineering. Springer International Publishing.
- Gardiol, F. E. (2011). About the beginnings of wireless. *International Journal of Microwave and Wireless Technologies*, 3(4):391–398.
- Griffiths, D. (1989). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice Hall.
- Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models*. Imperial College Press.
- Oldham, K. y Spanier, J. (1974). *The Fractional Calculus Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. ISSN. Elsevier Science.
- O’Neill, B. (2014). *Elementary Differential Geometry*. Elsevier Science.
- Oppenheim, A., Willsky, A., y Nawab, S. (1997). *Signals & Systems*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall.
- Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. ISSN. Elsevier Science.
- Podlubny, I. (2004). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5.
- Podlubny, I. y El-Sayed, A. (1996). *On Two Definitions of Fractional Derivatives*. UEF SAV.
- Thorpe, J. (2012). *Elementary Topics in Differential Geometry*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York.
- Zill, D. y Cullen, M. (1997). *Differential Equations with Boundary-value Problems*. Mathematics Series. Brooks/Cole Publishing Company.