

Control-observador para seguimiento en un robot diferencial de segundo orden Tracking control-observer for a second order differential-drive robot

L. A. Castro-Romero ^a, H. N. García-Lozano ^{a,*}, J. Santiaguillo-Salinas ^a, N. Pérez-Castro ^a

^aDivisión de Estudios de Posgrado, Universidad del Papaloapan, 68400, Loma Bonita, Oaxaca, México.

Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de un control con observador de estados para el seguimiento de trayectoria de un robot móvil diferencial. El modelo matemático del robot se construye con base en una extensión cinemática de segundo orden. Las velocidades lineales del modelo extendido no son fácilmente medibles, para lo cual se utiliza un observador de estados. Con el control (linealización entrada/salida) y utilizando los estados observados se garantiza la convergencia a cero del error, entre la trayectoria deseada y los estados. Los resultados teóricos, se validan por medio de una simulación numérica con el software Matlab Simulink.

Palabras Clave: observadores de estados, modelo cinemático extendido, robot diferencial, robots móviles, seguimiento de trayectorias.

Abstract

This work presents the design of a control with a state observer for the trajectory tracking of a differential mobile robot. The mathematical model of the robot is built based on a second-order kinematic extension. The linear velocities of the extended model are not easily measurable, for which a state observer is used. With control (input/output linearization) and using the observed states, convergence to zero of the error is guaranteed between the desired trajectory and the states. The theoretical results are validated through a numerical simulation with the Matlab Simulink software.

Keywords: state observers, extended kinematic model, differential robot, mobile robots, trajectory tracking.

1. INTRODUCCIÓN

Los robots móviles con ruedas son los más utilizados y eficientes para el desplazamiento en superficies suficientemente duras y libres de obstáculos, permitiendo velocidades relativamente altas (Baturone, 2005). Estos robots se diseñan con distintas configuraciones en su sistema de locomoción. Las más comunes son: Ackerman, triciclo clásico, diferencial, omnidireccional.

Los robots móviles diferenciales son vehículos de dos ruedas estándar motorizadas y una rueda libre que brinda soporte. Los movimientos del robot dependen de la diferencia de las velocidades entre las ruedas motorizadas, de allí su nombre de robot diferencial. Las tareas que desempeñan estos tipos de robots pueden ser realizadas, ya sea en forma guiada por un operador o en forma autónoma. Una de estas tareas, el seguimiento de trayectorias, puede expresarse como la obtención de una estrategia de control a fin de que el robot siga en forma autónoma una trayectoria de referencia (Baturone, 2005). Para la obtención de la estrategia de control es necesario conocer los estados del sistema. Sin embargo, algunas veces no se cuenta con los sensores necesarios para medir todos los estados o son difíciles de medir. En estos casos, los observadores son una alternativa para estimar los estados del sistema. Los observadores han sido ampliamente aplicados en sistemas de robótica móvil. Por ejemplo en (Lima-Pérez *et al.*, 2021) se propone un control para un robot de dos ruedas tipo péndulo invertido utilizando un observador de estados. En (González *et al.*, 2012) se hace uso de observadores de estados en robots móviles aéreos, aplicando una retroalimentación de estados, estimando los estados no medibles del robot. En (Rosaldo-Serrano *et al.*, 2019) se hace uso de observadores de estados en multi-agentes, estimando las velocidades angulares y lineales para generar una estrategia de control para el seguimiento de trayectorias.

* Autor para correspondencia: garcia.hiram@gmail.com

Correo electrónico: aldaircastro2022@outlook.com (Luis Aldair Castro-Romero), garcia.hiram@gmail.com (Hiram Netzahualcóyotl García-Lozano), jsantiaguillo@outlook.com (Jesús Santiaguillo-Salinas), perez.castro.nancy@gmail.com (Nancy Pérez-Castro).

Historial del manuscrito: recibido el 13/11/2023, última versión-revisada recibida el 09/03/2024, aceptado el 10/03/2024, publicado el 22/04/2024. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial2.12072>



En este trabajo se aborda el problema de seguimiento de trayectoria. Se considera el control del punto medio del eje de las ruedas traseras para realizar el seguimiento de trayectorias de un robot móvil diferencial utilizando el modelo cinemático extendido. A la cinemática extendida se asocian estados no medibles. Por lo que, a fin de estimar estos estados se propone un observador tipo Luenbergen (Marquez-Rubio *et al.*, 2019)(Dominguez *et al.*, 2006).

Este trabajo se encuentra organizado en 4 secciones. En la sección 2 se describe el modelo cinemático y su extensión. Posteriormente, en la sección 3, se diseña la estrategia de control para el seguimiento de trayectoria. La sección 4 presenta los resultados obtenidos de la validación numérica. Por último, en la sección 5 se plantean las conclusiones.

2. PRELIMINARES

2.1. Modelo cinemático

El modelo cinemático de un robot móvil es una representación matemática que describe el desplazamiento del robot en el plano en función de sus entradas de control, sin tener en cuenta las fuerzas involucradas. Para construir el modelo cinemático de un robot móvil a ruedas, se utilizan las siguientes premisas:

- El robot se mueve sobre una superficie plana.
- Los ejes de guiado son perpendiculares al suelo.
- No hay deslizamiento de las ruedas del robot sobre la superficie.
- El robot no tiene partes flexibles (Guzmán *et al.*, 2014).

2.1.1. Modelo cinemático del robot móvil diferencial

El robot móvil diferencial es una de las configuraciones más utilizadas debido a la simplicidad de su modelo cinemático. Este describe el desplazamiento y orientación de un marco de referencia móvil sobre el robot (x_r, y_r, θ) con respecto al marco de referencia inercial fijo (X, Y) , como se muestra en la figura (1). El punto de control del robot esta situado en el origen del marco de referencia móvil y el ángulo de orientación θ es la diferencia angular del marco de referencia fijo (X, Y) con respecto al marco de referencia móvil (x_r, y_r) . La velocidad v es la velocidad longitudinal del robot y ω es la velocidad angular.

El modelo cinemático, del robot diferencial está dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}, \quad (1)$$

donde $A(\theta)$ es la matriz de desacoplamiento del sistema.

Para que el robot móvil realice el seguimiento de una trayectoria deseada (x_d, y_d) , es necesario una estrategia de control. La estrategia de control seleccionada en este trabajo está basada en linealización entrada/salida (linealization input/output)(Bruno *et al.*, 1994). Esta estrategia requiere que la matriz de desacoplamiento $A(\theta)$ sea invertible, sin embargo, ésta es singular en el modelo cinemático (1). Para evitar la singularidad, se utiliza una técnica llamada extensión cinemática. Ésta técnica consiste en agregar un integrador a la entrada del sistema generando una nueva variable de control.

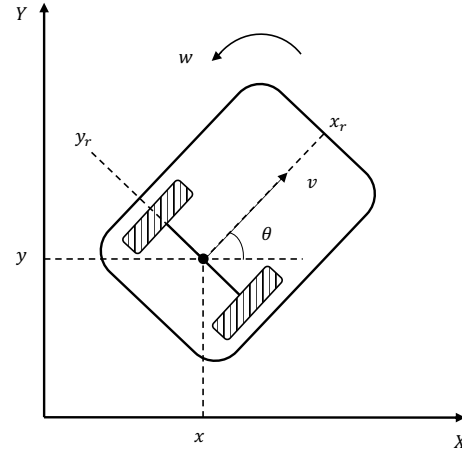


Figura 1: Esquema del robot diferencial.

2.1.2. Modelo cinemático extendido

El modelo cinemático extendido tiene una nueva variable de control, la aceleración longitudinal u . El modelo cinemático extendido es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos(\theta) \\ v \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (2)$$

Debido a que \dot{x} y \dot{y} , en el modelo (2), no dependen de las variables de control (u, ω) , se propone una dinámica de segundo orden (Ren y Beard, 2008). Esta se obtiene derivando las velocidades \dot{x} y \dot{y} y sustituyendo los valores de $\dot{\theta}$ y \dot{v} . La forma matricial del modelo es

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -v \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & v \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = A(v, \theta) \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (3)$$

La nueva matriz de desacoplamiento $A(v, \theta)$ es no singular ($\det A(v, \theta) \neq 0$). Esto permite la aplicación de una estrategia de control por linealización entrada/salida. Como consecuencia de la extensión cinemática, la velocidad lineal no es fácilmente medible.

La opción seleccionada para estimarla en este trabajo es el uso de observadores de estados.

2.2. Observadores de estados

Un observador estima las variables de estado de un sistema, a partir de la medición de las entradas de control y las salidas del sistema (Ogata, 2003). El sistema es completamente obser-

vale si la matriz de observabilidad

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

tiene rango igual a la dimensión del vector de estado. A continuación se presenta el diseño un observador de estados.

2.2.1. Diseño del observador de estados para el modelo cinemático extendido

La representación en variables de estado del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A\eta + B\mu, \\ \psi &= C\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

donde $\eta = [\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4]^T$, $\eta_1 = x, \eta_2 = y, \eta_3 = \dot{x}, \eta_4 = \dot{y}$, $\mu = [u, \omega]^T$ es el vector de entrada y

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos(\theta) & -v \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & v \cos(\theta) \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz de observabilidad (4) del sistema (5) es

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

con rango 4, por lo tanto, el sistema (5) es de estado completamente observable.

La forma general del observador de estado se presenta a continuación

$$\dot{\hat{\eta}} = A\hat{\eta} + B\mu + L(\psi - \hat{\psi}), \quad (7)$$

$$\hat{\psi} = C\hat{\eta}. \quad (8)$$

En donde $\hat{\eta}$ es el vector de estados observados y $\hat{\psi}$ son las salidas observadas.

La siguiente proposición garantiza la convergencia de los estados estimados a los estados del sistema.

Proposición 1. Sea el error $\hat{e} = \eta - \hat{\eta}$ y la dinámica del error como $\dot{\hat{e}} = \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}}$. Los estados estimados del observador (7) convergen a los estados del sistema (5), si se selecciona una matriz L Hurwitz (Ogata, 2003).

Prueba. Se define la dinámica del error como

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= \dot{\eta} - \dot{\hat{\eta}}, \\ &= A\eta + B\mu - A\hat{\eta} - B\mu - LC(\eta - \hat{\eta}), \\ &= (A - LC)\hat{e}. \end{aligned} \quad (9)$$

El comportamiento del error (9), con respecto al tiempo, está determinado por los valores propios de la matriz $(A - LC)$. Si se selecciona L , tal que los valores propios de $(A - LC)$ estén en el semi-plano complejo izquierdo, el error converge asintóticamente a cero, por lo tanto los estados del observador convergen a los estados del sistema. De esta manera, el diseño del observador se reduce a encontrar tal matriz L .

3. ESTRATEGIA DE CONTROL PARA EL SEGUIMIENTO DE TRAYECTORIAS

La estrategia de control por linealización entrada/salida linealiza el modelo del robot vía retroalimentación de estados reduciendo el problema de seguimiento de trayectoria a un control lineal en términos del error (Bruno et al., 1994).

Esta estrategia de control está dada por

$$\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = A^{-1}(v, \theta) \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}, \quad (10)$$

donde $A^{-1}(v, \theta)$ es la inversa de la matriz de desacoplamiento y el vector $(r_x, r_y)^T$ contiene las variables de control auxiliar. Sustituyendo la estrategia de control (10) en el sistema (3) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = A(v, \theta) \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} = A(v, \theta) A^{-1}(v, \theta) \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Proposición 2. Considere el sistema de ecuaciones (3). La aplicación de la estrategia de control (10) garantiza la convergencia de los errores de seguimiento a cero.

Prueba. Para establecer las señales auxiliares de control r_x y r_y se definen las componentes del error en x y y como sigue

$$e_1 = x - x_d = \eta_1 - x_d, \quad (12)$$

$$e_2 = y - y_d = \eta_2 - y_d.$$

Por lo tanto, se puede utilizar un control lineal de la forma

$$\begin{aligned} r_x &= -k_p e_1 - k_d \dot{e}_1 + \ddot{x}_d, \\ r_y &= -k_p e_2 - k_d \dot{e}_2 + \ddot{y}_d, \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\dot{e}_i = \frac{d e_i}{dt}$, para $i = 1, 2$.

Sustituyendo las señales de control (13) en el modelo matemático de segundo orden (11) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_p e_1 - k_d \dot{e}_1 + \ddot{x}_d \\ -k_p e_2 - k_d \dot{e}_2 + \ddot{y}_d \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Igualando (14) a cero y definiendo se obtienen ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 + k_d \dot{e}_1 + k_p e_1 &= 0, \\ \ddot{e}_2 + k_d \dot{e}_2 + k_p e_2 &= 0, \end{aligned}$$

donde $\ddot{e}_i = \frac{d^2 e_i}{dt^2}$, para $i = 1, 2$.

La selección de los valores de k_p y k_d . Determinan la forma en que el error decae a cero. La convergencia de los errores de seguimiento a cero se garantiza cuando los valores de k_p y k_d son mayores que cero

4. ESTRATEGIA DE CONTROL HACIENDO USO DEL OBSERVADOR DE ESTADOS

Considere el sistema (5) utilizando la estrategia de control (10). Dado que la velocidad en las componentes η_3, η_4 del robot, no son fácilmente medibles, se construye un observador que estime estos estados. El sistema robot-control-observador, con $\hat{\eta}_3$ y $\hat{\eta}_4$ estimadas, es el siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 \\ \dot{\hat{\eta}}_3 \\ \dot{\hat{\eta}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \hat{\eta}_3 \\ \hat{\eta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix}, \quad (15)$$

sustituyendo los valores de r_x y r_y definidos en (13), considerando la velocidad lineal y la velocidad angular observadas ($\hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4$), se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{\eta}}_1 \\ \dot{\hat{\eta}}_2 \\ \dot{\hat{\eta}}_3 \\ \dot{\hat{\eta}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \hat{\eta}_3 \\ \hat{\eta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_p(\eta_1 - x_d) - k_d(\hat{\eta}_3 - \dot{x}_d) + \ddot{x}_d \\ -k_p(\eta_2 - y_d) - k_d(\hat{\eta}_4 - \dot{y}_d) + \ddot{y}_d \end{bmatrix}.$$

Sea e el error entre el estado del sistema (5) y la trayectoria deseada, en cada uno de sus componentes, y defínase \hat{e} como en la proposición 1. Agrupando términos diferenciales de segundo orden se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 + \dot{x}_d \\ \dot{e}_2 + \dot{y}_d \\ \dot{\hat{\eta}}_3 - \dot{x}_d \\ \dot{\hat{\eta}}_4 - \dot{y}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\eta}_3 \\ \hat{\eta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k_p e_1 - k_d \hat{e}_3 \\ -k_p e_2 - k_d \hat{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Por lo tanto, la dinámica del error es la siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{\hat{e}}_3 \\ \dot{\hat{e}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_p & 0 & -k_d & 0 \\ 0 & -k_p & 0 & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Proposición 3. Sea (17) la dinámica del error entre la trayectoria deseada, los estados del sistema y los estimados, entonces el error converge a cero siempre y cuando los valores de k_p y k_d sean positivos. Más aún, si se selecciona $k_d = \frac{2\sqrt{k_p}}{\sqrt{2}}$ el error tendrá una rápida convergencia con muy poco sobrepaso.

Prueba. Los valores propios de (17) son $(s(s + k_d))^2 + 2k_p s(s + k_d) + k_p^2 = (s(s + k_d) + k_p)^2$, por lo tanto, si se selecciona los valores k_p y k_d positivos, el polinomio es Hurwitz. Adicionalmente si se selecciona $k_d = 1,4\sqrt{k_p}$ el polinomio característico tendrá un factor de amortiguamiento de 0,707.

Observación: En (Ogata, 2003) se demuestra que los polos de lazo cerrado del sistema control-observador consisten en los polos debido al diseño del control más los polos debidos al diseño del observador. En la proposición 1 se garantiza la convergencia de error de observación, en la proposición 2 se garantiza el seguimiento de trayectoria con error igual a cero,

para k_p y k_d mayor que cero, con lo que se cumple este criterio. Adicionalmente la proposición 3 establece condiciones suficientes en forma reducida de este criterio, para el sistema controlador-observador.

5. VALIDACIÓN NUMÉRICA

La estrategia de control para el seguimiento de trayectorias y el observador de estados diseñado, se validaron numéricamente mediante el software Matlab Simulink. Para el seguimiento se seleccionaron dos trayectorias, un círculo y una Lemniscata de Bernoulli.

Para el diseño del observador de estados se consideró que la matriz $(A - LC)$ es Hurwitz, por lo tanto, los estados observados convergen asintóticamente a los estados del modelo del robot.

Considere L como sigue

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{31} & l_{32} \\ l_{41} & l_{42} \end{bmatrix}.$$

La dinámica de error del observador (9), tiene el siguiente polinomio característico

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4,$$

donde $a_1 = l_{11} + l_{22}; a_2 = l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21} + l_{31} + l_{42}; a_3 = l_{11}l_{42} + l_{22}l_{31} - l_{21}l_{32} - l_{21}l_{41}; a_4 = l_{42}l_{31} - l_{32}l_{41}$.

Por el criterio de Routh, si en la primer columna no hay cambio signo, es condición suficiente para garantizar la convergencia asintótica del error a cero.

Tabla 1: Tabla de Routh

λ^4	1	a_2	a_4
λ^3	a_1	a_3	0
λ^2	b_1	a_4	0
λ	b_2	0	0
λ^0	b_3	0	0

donde $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, b_2 = \frac{b_1 a_3 - a_1 a_4}{b_1}$ y $b_3 = a_4$.

Los valores seleccionados para L se presentan a continuación

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 8 & 20 \\ 30 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Con estos valores se satisfacen cada uno de los puntos del criterio de Routh, garantizando la convergencia del error a cero.

Cabe resaltar que la posición (x, y) se considera medible por medio de sensores, por lo tanto, para este trabajo solo se utilizan las velocidades lineales en x y y y estimadas por el observador.

A continuación se presentan las simulaciones numéricas.

5.1. Simulación 1

En la simulación 1 se selecciona la siguiente trayectoria deseada: $x_d = 3 \cos\left(\frac{2\pi * t}{T}\right)$, $y_d = 3 \sin\left(\frac{2\pi * t}{T}\right)$, la cual describe un círculo con un diámetro de 3m.

En la Figura (2) se muestra el seguimiento de trayectoria por el robot diferencial. Se observa como el robot converge hacia la trayectoria deseada y una vez alcanzada, permanece sobre ella.

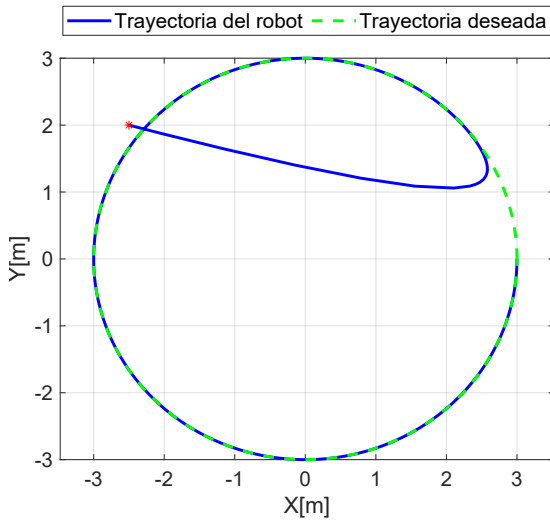


Figura 2: Movimiento del robot en el plano.

Los errores de seguimiento se presentan en la Figura (3). Dado que la posición inicial del robot es $(-2, 5, -2)$ y la trayectoria deseada inicia en $x_d = 2,5$, el error en x , en $t = 0$, es 5 y decrece exponencialmente, de acuerdo a lo diseñado. Por otro lado, en el instante inicial, el error en y es de -2 , sin embargo este también decrece exponencialmente a cero.

Las señales de control r_x y r_y se utilizan con la finalidad de que la trayectoria del robot converja a la deseada. Estas señales auxiliares de control se presentan en la Figura (4).

En la Figura (5) se muestran las velocidades estimadas por el observador de estados, se puede observar que las velocidades son suaves y continuas durante el tiempo de ejecución.

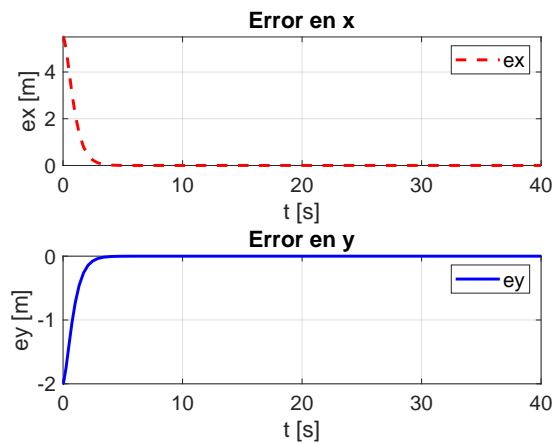


Figura 3: Errores de seguimientos.

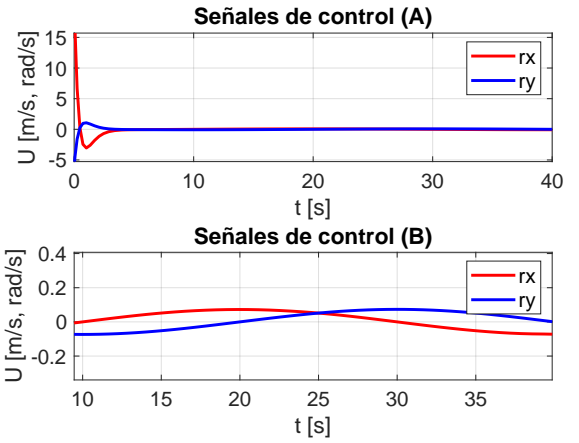


Figura 4: Entradas de control.

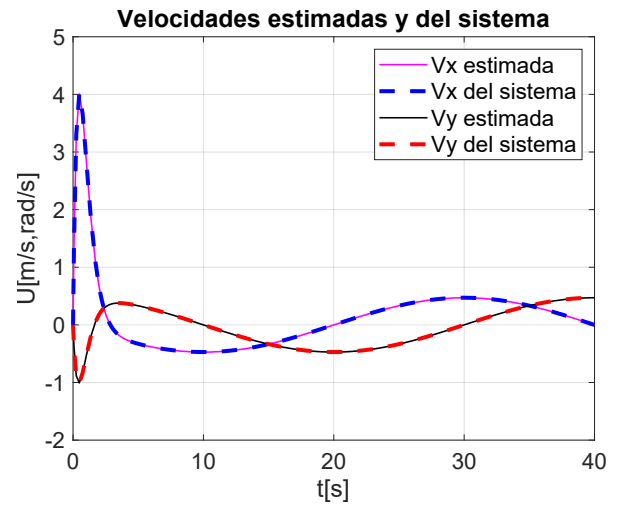


Figura 5: Velocidades estimadas.

5.2. Simulación 2

Una Lemniscata de Bernoulli es la trayectoria seleccionada para la segunda simulación, la cual tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x_d &= 3 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \\ y_d &= 3 \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

En la figura (6) se muestra, en una línea continua azul, la trayectoria del robot y en verde, en líneas punteadas, la trayectoria deseada. Como se puede observar, el robot inicia en la posición inicial $(-2, 5, -0,5)$ fuera de la trayectoria deseada. Este se desplaza sobre el plano hasta alcanzar la trayectoria deseada después de 3seg. Como se puede observar la Figura (7) el error decrece exponencialmente.

Las señales de control auxiliar se presentan en la Figura (8). Como se observa, en el instante que el robot inicia su trayectoria, la señal auxiliar de control es relativamente grande, una vez terminado este impulso las señales de control son continuas y suaves.

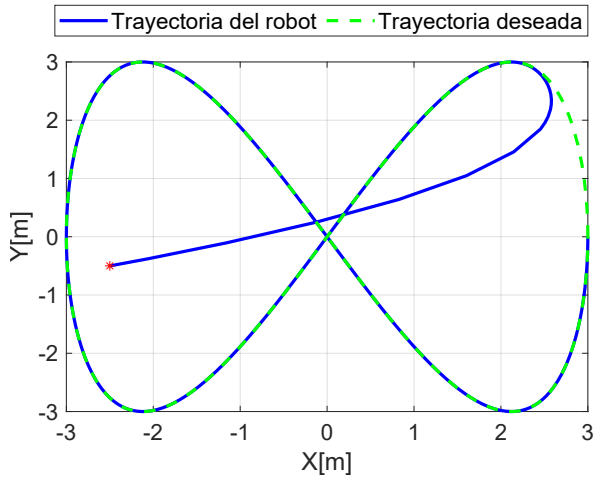


Figura 6: Lemniscata de Bernoulli.

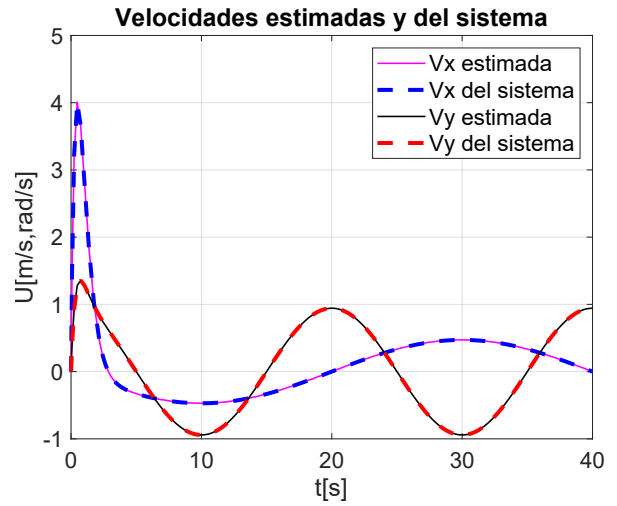


Figura 9: Velocidades estimadas.

En esta figura se puede observar como la velocidad en "y" y la velocidad en "x" son continuas y oscilan durante el tiempo de ejecución.

6. CONCLUSIÓN

En este trabajo, se realizó la construcción de un modelo cinemático extendido para un robot móvil diferencial. La cinemática extendida se utilizó para evitar que la matriz de desacoplamiento cinemático en el modelo del robot fuera singular. Esto permitió hacer uso de la estrategia de control linealización entrada/salida.

Se construyó un observador de estados, a fin de estimar las velocidades lineales del modelo del robot, las cuales se consideran que físicamente no son fácilmente medibles. La selección de la matriz L , para el observador, garantiza que los estados estimados del observador converjan a los estados del robot. Utilizando una estrategia de control linealización entrada/salida, con las entradas de velocidad observadas y con la selección adecuada de las ganancias de control k_p y k_d , se verificó la convergencia de la posición del robot hacia la trayectoria deseada.

Para las pruebas numéricas se emplearon dos trayectorias distintas. En ambas, observamos que la trayectoria del robot converge relativamente rápido a las trayectorias deseadas.

Para trabajos futuros, en primera instancia se considera la implementación del control con observador de estados en un robot móvil diferencial. Además, la construcción del modelo cinemático de segundo orden, haciendo uso de un punto de control externo (punto frontal), con fines comparativos. Evaluar el desempeño del control con observador en comparación con otros sistemas de control, por ejemplo, con sistemas de control con retroalimentación por medio de sensores abordo, con control no lineal y/o con retardo.

Referencias

Baturone, A. O. (2005). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo.
 Bruno, S., Lorenzo, S., Luigi, V., y Giuseppe, O. (1994). *Robotics: modelling, planning and control, 2010*. Springer London.
 Dominguez, S., Campoy, P., Sebastián, J., y Jiménez, A. (2006). *Control en el espacio de estado*. Pearson.

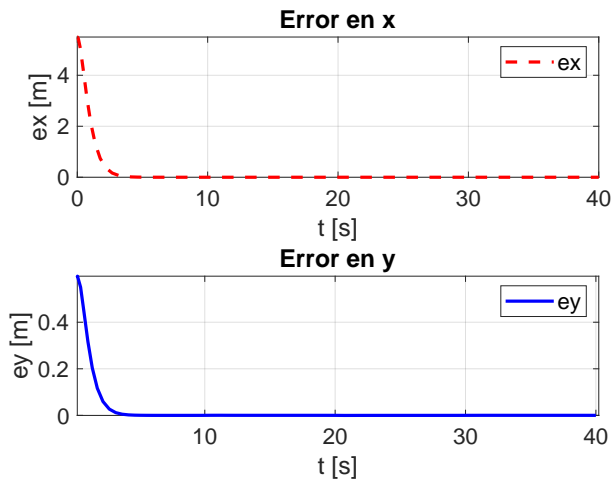


Figura 7: Errores de seguimiento.

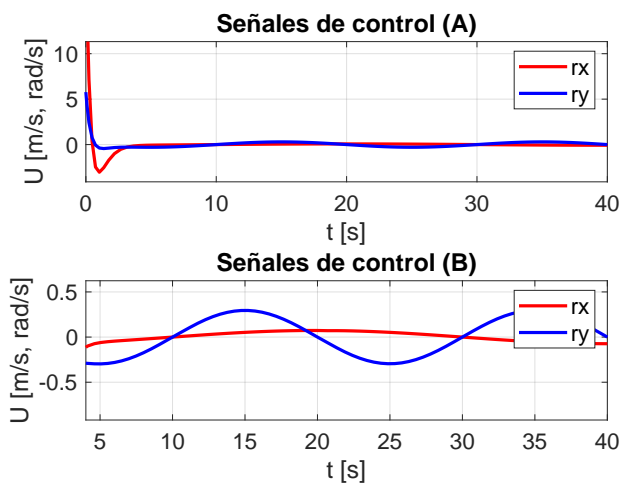


Figura 8: Entradas de control.

Las velocidades estimadas por el observador de estados, para el seguimiento de la lemniscata de Bernoulli, definida en (18), se muestran en la Figura (9).

- González, E. C. V., Rivera, D. M., y Gómez, E. J. (2012). Model and observer-based controller design for a quanser helicopter with two dof. En *2012 IEEE Ninth Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference*, pp. 267–271.
- Guzmán, L. E. S., Villa, M. A. M., y Vásquez, E. L. R. (2014). Seguimiento de trayectorias con un robot móvil de configuración diferencial. *Ingenierías USBMed*, 5(1):26–34.
- Lima-Pérez, A., Díaz-Téllez, J., Gutiérrez-Vicente, V., Estévez-Carreón, J., Pérez-Pérez, J., García-Ramírez, R. S., y Chávez-Galán, J. (2021). Robust control of a two-wheeled self-balancing mobile robot. En *International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering*, pp. 196–201. IEEE.
- Marquez-Rubio, J., Pimentel-Medina, V., Del Muro-Cuéllar, B., y Novella-Rodríguez, D. (2019). Obtención de los parámetros de un observador de estados propuesto para sistemas con retardo. En *Proceedings of the Congreso Nacional de Control Automático (AMCA), Puebla, Mexico*, pp. 23–25.
- Ogata, K. (2003). *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación.
- Ren, W. y Beard, R. W. (2008). *Consensus Algorithms for Double-integrator Dynamics*, pp. 77–104. Springer London.
- Rosaldo-Serrano, M. A., Santiaguillo-Salinas, J., y Aranda-Bricaire, E. (2019). Observer-based time-varying backstepping control for a quadrotor multi-agent system. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 93:135–150.