DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 0 No. 0 (2024) 1-8

La perspectiva didáctica de modelos y modelación
Models and modeling didactical perspective

Y. L. Islas-Arias [a], E. Espinosa-Ramírez [a*], A. V. Reyes-Rodríguez [a]

[a] *Área Académica de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, 42184, Pachuca, Hidalgo, México.*

Resumen

En este artículo de divulgación se describe la perspectiva didáctica de modelos y modelación, así como sus fundamentos, en términos accesibles para docentes de matemáticas de bachillerato o licenciatura. Esta aproximación, utilizada también como marco de investigación en educación matemática, fue propuesta y desarrollada por el matemático y educador matemático estadounidense Richard Lesh. En esta perspectiva, las tareas de instrucción se denominan model eliciting activities, y tienen la finalidad de que los estudiantes aprendan nuevos contenidos al dar sentido a situaciones problemáticas contextualizadas, mediante la construcción de sistemas conceptuales, denominados modelos matemáticos. También se exponen los principios para el diseño de tareas y las características de un escenario de instrucción con base en los postulados de la teoría. El trabajo pretende despertar el interés de profesores de matemáticas, en el aprendizaje y la enseñanza a través de la modelación; además de favorecer la reflexión respecto de la relevancia de incorporar elementos teóricos en el diseño de tareas y escenarios instruccionales.

Palabras Clave: formación de docentes, método de enseñanza, tareas de instrucción, procesos de aprendizaje, modelo matemático.

Abstract

This popular science article describes the models and modeling didactical perspective, as well as its foundations, in accessible terms for high school or undergraduate mathematics teachers. This approach, also used as a research framework in mathematics education, was proposed and developed by the American mathematician, and mathematics educator, Richard Lesh. In this perspective, the instructional tasks are called model eliciting activities, and their purpose is to promote students' learning through contextualized problematic situations involving the construction of conceptual systems, called mathematical models. Some suggestions for task design and the characteristics of an instructional scenario based on the theory principles are also presented. The aim's work is to attract the interest of teachers to the promotion of mathematics learning through mathematical modeling; in addition to promoting the reflection regarding the relevance of incorporating theoretical elements into tasks and instructional scenarios design.

Keywords: teacher education, teaching methods, instructional tasks, learning processes, mathematical models.

1. Introducción

Desde etapas tempranas de la existencia humana las matemáticas se han desarrollado y utilizado como herramientas para describir y comprender el mundo que nos rodea (Stillman y Brown, 2019). Al respecto, un modelo matemático es una versión simplificada de un fenómeno o situación real, que describe la forma en la que los seres humanos percibimos la realidad. Por ello, la habilidad para construir modelos, especialmente modelos matemáticos, otorga ventajas competitivas a los seres humanos, con respecto a otros seres vivos (Schichl, 2004).

La necesidad de representar fenómenos del mundo real, mediante herramientas matemáticas, se remonta a los orígenes de la cultura humana, cuyos primeros registros perduran en la forma de pinturas rupestres. En la Grecia clásica, Tales de Mileto usó herramientas geométricas para explicar y predecir los eclipses solares, como el ocurrido en 585 a.C., y Eratóstenes desarrolló el primer modelo para medir la circunferencia de la tierra. Por otra parte, durante la edad moderna se produjo un florecimiento de la matemática y la ciencia en general, particularmente se sistematizó y generalizó el uso de modelos matemáticos como medio para comprender a la naturaleza. Al respecto, en 1649 Kepler desarrolló un modelo capaz de explicar el movimiento de la tierra, mismo

*Autor para la correspondencia: Yesica Liliana Islas Arias
Correo electrónico: is477758@uaeh.edu.mx (Yesica Liliana Islas Arias), es197147@uaeh.edu.mx (Eduardo Espinosa Ramírez), aaronr@uaeh.edu.mx (Aarón Víctor Reyes Rodríguez).

Historial del manuscrito: recibido el 21/11/2023, última versión-revisada recibida el 02/02/2024, aceptado el 08/03/2024, en línea (postprint) desde el 02/04/2024, publicado el DD/MM/AAAA. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v12i24.12104

Este manuscrito ha sido aceptado después de una revisión a doble-ciego por pares y será publicado en una futura edición de esta revista. Su contenido es definitivo y únicamente cambiará en la versión final la información relativa al volumen, número, fecha de publicación y paginado.

que fue refinado por Issac Newton y, posteriormente, por Albert Einstein.

Cuando se aborda el modelado de fenómenos o situaciones problemáticas en el aula, se ofrece a los estudiantes oportunidades para describir, explicar o predecir el comportamiento de diversos fenómenos del mundo que nos rodea, mediante herramientas matemáticas propias de cada nivel escolar. Con estudiantes de niveles básicos, el uso del lenguaje natural, imágenes y materiales manipulables es relevante para dar sentido a los números y a las operaciones aritméticas. En el bachillerato, el uso de las tecnologías digitales, junto con el simbolismo algebraico constituyen los elementos básicos para que los estudiantes de este nivel modelen una amplia variedad de fenómenos a través de las funciones (NCTM, 2000).

En esta línea de ideas, la *perspectiva de modelos y modelación* (en lo subsecuente PMM) es una aproximación didáctica que promueve el aprendizaje de matemáticas a través de tareas que incluyen contextos cercanos a la realidad e intereses de los estudiantes (Lesh y Doerr, 2003; Lesh y Zawojewski, 2007; Vargas y Montero, 2023). Las tareas en esta teoría se denominan *model eliciting activities* (MEA en lo sucesivo). Decidimos utilizar el acrónimo MEA, en lugar de las traducciones usuales de model eliciting activities como actividades *provocadoras de modelos*, o *actividades reveladoras de modelos*, ya que estas traducciones no dan cuenta del significado que el término tiene en inglés.

Una MEA tiene la finalidad de que los estudiantes den sentido o significado a ciertas situaciones problemáticas, mediante la construcción y el refinamiento de sistemas conceptuales (modelos). La PMM busca promover en los estudiantes experiencias que involucren aspectos clave presentes en las prácticas de aquellos profesionales que hacen uso de herramientas matemáticas en su actividad laboral (Brady, 2018).

El conocimiento de teorías didácticas es importante en la práctica docente ya que, su empleo en el diseño e implementación de tareas, permite sustentar o justificar las acciones que docentes y estudiantes llevan a cabo en el aula. Así, la teoría y la práctica educativa dependen necesariamente una de la otra, y mantienen una relación de mutua interdependencia (Álvarez-Valdés, 1985). Cada teoría tiene diferentes formas de concebir qué son las matemáticas, qué es el conocimiento, qué es el aprendizaje y cuáles son los medios o mecanismos más adecuados para promover el aprendizaje (Arce et al., 2019).

Las teorías o perspectivas teóricas en la didáctica de la matemática (resolución de problemas, teoría de situaciones didácticas, modelos y modelación, teoría de la variación, teoría de la educación matemática realista, entre muchas otras) tienen ventajas y limitaciones al implementarlas en las aulas. Sin embargo, su conocimiento y utilización es importante, porque los elementos teóricos permiten al docente fundamentar sus decisiones y entender el efecto de las tareas y el escenario instruccional sobre las formas de pensar y de razonar de los estudiantes (Arce et al., 2019). Como menciona Lester (2005), una teoría o modelo teórico tiene la finalidad de permitirnos trascender el sentido común. Los constructos teóricos son herramientas que nos permiten ver aspectos del proceso educativo que no serían posibles sin el uso de la teoría.

Este documento es un artículo de divulgación y su objetivo consiste en describir la aproximación didáctica de modelos y modelación, explicar los conceptos que la integran, así como los principios subyacentes en las recomendaciones que proporciona para el diseño de tareas y la organización del escenario instruccional.

En este sentido, se pretende explicar, en los términos más simples que nos es posible, un conjunto de principios, teóricos y prácticos, que pueden ser útiles para que docentes de matemáticas fundamenten el diseño e implementación de actividades instruccionales inmersas en escenarios que comparten características de los contextos en los que laboran los profesionales que hacen un uso intensivo de herramientas matemáticas.

Lo que distingue a este trabajo de otros similares es que se sintetiza, en español, información relevante que se encuentra dispersa en diversas fuentes en inglés. Además, se presta atención a la descripción de algunos fundamentos (ontológicos, epistemológicos y didácticos) subyacentes en la PMM, los cuales, generalmente, no se explicitan en la literatura relacionada, ya sea de investigación o divulgación.

1.1. Antecedentes y descripción de la PMM

La PMM es una aproximación didáctica, y marco de investigación enmarcada en la *tradición o escuela anglo-americana de la educación matemática* (Ontiveros, 1995; Scheiner et al., 2022). Es una teoría estrechamente relacionada con los modelos de resolución de problemas, con la perspectiva de aprendizaje STEAM y con diversas propuestas de educación transdisciplinaria (Merçon, 2021; Wall y Shankar, 2008).

Esta perspectiva didáctica fue desarrollada por el matemático y educador matemático estadounidense Richard Lesh, actualmente profesor emérito de la universidad de Indiana, y un equipo de investigadores adscritos a las universidades de Indiana, Purdue y Wisconsin.

Los orígenes de la teoría se remontan a un proyecto apoyado por la National Science Foundation de los Estados Unidos, en la década de los años ochenta del siglo pasado, cuya finalidad fue responder a la pregunta de ¿qué se necesita para que los estudiantes utilicen ideas matemáticas al abordar situaciones cotidianas de resolución de problemas? Una de las actividades principales del proyecto consistió en grabar en video a estudiantes mientras abordaban situaciones problemáticas “del mundo real”, típicas de su vida cotidiana, la de sus amigos y de sus familias, utilizando ideas matemáticas básicas. A partir de lo anterior se identificaron: (a) situaciones problemáticas, más allá del contexto escolar, donde las matemáticas son útiles y (b) conocimientos y habilidades que permiten a los estudiantes enfrentar con éxito tales situaciones.
La versión más conocida y utilizada de la PMM, a la cual denominamos *versión clásica*, se publicó en el libro titulado

Este manuscrito ha sido aceptado después de una revisión a doble-ciego por pares y será publicado en una futura edición de esta revista. Su contenido es definitivo y únicamente cambiará en la versión final la información relativa al volumen, número, fecha de publicación y paginado.

Beyond Constructivism (Lesh y Doerr, 2003a). Aunque ha habido otros desarrollos del marco, en los cuales, además de las MEA, consideran tareas complementarias y de seguimiento, denominadas *model exploration activity* (MXA) y *model adaptation activity* (MAA), respectivamente. A la secuencia de implementación de tareas MEA-MXA-MAA se le denomina *secuencia de desarrollo de modelos*, abreviada como SDM (Vargas y Montero, 2023).

Una MXA se orienta a que los estudiantes generen sistemas robustos de representación al dar sentido a un fenómeno de referencia; por ejemplo, identificando los supuestos subyacentes en la parte de la realidad que se busca representar; por ejemplo, cuando para modelar el crecimiento de una población bacteriana se establecen los supuestos de que la comida y el espacio son ilimitados, que los individuos se reproducen en cualquier momento, que no existen depredadores y que no hay fuentes de mortalidad en la población. Al abordar una MXA los estudiantes desarrollan un lenguaje y sistemas de representación, para pensar con los conceptos matemáticos y para reflexionar sobre esos conceptos. Por otra parte, una MAA se enfoca en la aplicación de las herramientas generadas durante la MEA y refinadas durante una MXA. En una MAA se proponen problemas difíciles de enfrentar sin las herramientas generadas en las fases previas. Usualmente, las MAA se abordan de forma individual, a diferencia de las MEA, que se llevan a cabo trabajando en pequeños grupos (Lesh et al., 2003; Vargas y Montero, 2023).

En este artículo profundizaremos en la descripción de versión clásica de la PMM, por ser la más conocida y utilizada. La PMM promueve que los estudiantes desarrollen un aprendizaje significativo basado en el descubrimiento (Ausubel, 2000), al abordar tareas inmersas en contextos cercanos a las experiencias cotidianas de los estudiantes. La finalidad de las tareas es que los estudiantes den sentido a una situación problemática mediante la construcción de modelos que están en un continuo proceso de refinamiento y mejora (ciclos iterativos). La teoría supone que resolver problemas situados o contextualizados es más fácil que resolver problemas abstractos y descontextualizados porque, en el primer caso, el resolutor debe dar sentido a las representaciones externas (gráficas, fórmulas, tablas, etcétera) que se utilizan para representar la información de la situación problemática (Lesh y Doerr, 2003).

La PMM también puede servir como un marco de investigación en el campo de la educación matemática (Lesh y Zawojewski, 2007). En este sentido cuenta con tres características principales. Como primera característica se espera que los modelos conceptuales que emplean los investigadores, estén continuamente en un proceso de diseño y desarrollo de modelos que pasen necesariamente por los ciclos de iteración, prueba y revisión para solucionar los problemas, es decir tanto el investigador como el estudiante pasan por procesos similares en la creación de modelos que permitan dar solución a un problema.

Una segunda característica es que la actividad de investigación se centra en la producción de herramientas y productos que se pondrán a prueba en las aulas, una tercera característica es que usar la perspectiva de modelos y modelación como marco de investigación permite el desarrollo de la teoría al proponer su propia metodología, modelos teóricos y herramientas que se diseñan para dar solución al problema de investigación, aunque se debe reconocer la importancia de las teorías de aprendizaje para guiar el diseño de las actividades (Lesh y Zawojewski, 2007).

1.2. ¿Qué es un modelo matemático?

De acuerdo con Lesh y Doerr (2003) un modelo matemático es un sistema conceptual integrado por objetos matemáticos, así como por interacciones y reglas que gobiernan tales interacciones. Un modelo matemático se expresa o comunica mediante diferentes sistemas de notación externa. Su finalidad es describir, comprender, explicar, predecir o manipular el comportamiento de otros sistemas conceptuales.

Así, un modelo matemático da cuenta de las características estructurales y dinámicas de sistemas matemáticamente relevantes (crecimiento de una población, propagación de una epidemia, evaluación de un programa de gobierno, etcétera). Lesh y Lehrer (2003) se refieren a los modelos matemáticos como descripciones intencionales de situaciones del mundo real, mediante objetos y relaciones matemáticas, integradas dentro de sistemas práctica enmarcados por una una epistemología de ajuste y revisión del conocimiento.

Cuando el resolutor busca dar sentido o comprender algún fenómeno, ya sea natural o social, construye sistemas conceptuales (modelos) que permitan entender, explicar, predecir o modificar otro sistema conceptual (Lesh y Zawojewski, 2007). Lesh y Doerr (2003) argumentan que el modelo se encuentra tanto en la mente de las personas, como en los diversos medios de representación externa (como ecuaciones, programas o aplicaciones de software, diagramas, etc). Un modelo es un sistema conceptual estrechamente relacionado con las estructuras mentales de la persona que lo propone, por ejemplo, las representaciones externas mediante las cuales se expresa el modelo matemático.

Durante el proceso de construcción de modelos los estudiantes reflejan sus formas de pensar y de razonar mediante representaciones externas (números, tablas, gráficas, dibujos, etcétera), generalmente conlleva una serie de ciclos iterativos de prueba y revisión, de esta manera permite que se revise, refine o en su defecto sea rechazado (Lesh y Lehrer, 2003).

Lesh y Zawojewski (2007) mencionan que en el proceso de modelado consta de cuatro etapas las cuales no necesariamente se llevan a cabo secuencialmente.

i) Descripción. Se refiere al proceso de creación del modelo, implica representar los objetos y relaciones relevantes que constituyen un fenómeno físico o social mediante objetos matemáticos y sus relaciones.

ii) Operación. Se realizan operaciones sobre los objetos matemáticos con la finalidad de generar información que se pueda interpretar en términos del fenómeno del mundo real.

Este manuscrito ha sido aceptado después de una revisión a doble-ciego por pares y será publicado en una futura edición de esta revista. Su contenido es definitivo y únicamente cambiará en la versión final la información relativa al volumen, número, fecha de publicación y paginado.

iii) Predicción. Toma los resultados relevantes obtenidos en la etapa de manipulación y los aplica a la problemática que se presenta en el mundo real.

iv) Verificación. Se comprueba el modelo generado en el mundo real. Es usual que si se detecta alguna falla en esta fase se realicen ajustes y pruebas adicionales para seguir en un ciclo iterativo de refinamiento.

1.3. Principios para el diseño de una MEA

De acuerdo con Lesh y Doer (2003b), una MEA es una tarea contextualizada en un escenario de la vida real y está integrada por una situación problemática que debe abordarse mediante el uso de herramientas matemáticas. Estas tareas tienen como característica que los productos desarrollados no se limitan a respuesta breves, su objetivo principal es el diseño de herramientas conceptuales que no sólo sean útiles para una situación en particular, sino que tales herramientas se puedan compartir, refinar, extender y reutilizar (Lesh y Lehrer, 2003).

Una MEA se integra con tres elementos básicos: (i) una nota periodística, cuyo contenido ayuda a los estudiantes a situarse en un contexto el cual está inmersa una situación problemática, (ii) preguntas “de calentamiento” que propician una reflexión acerca del contexto, y (iii) una tarea principal que solicita la escritura de una carta, correo u otro medio para comunicar soluciones a la problemática que demanda un cliente ficticio (Vargas y Montero, 2023).

La PMM reconoce la importancia de los docentes como orquestadores de los procesos de modelación mediante el uso de MEA (Lesh y Doerr, 2003). Para el diseño de una MEA, el profesor se puede guíar por seis principios establecidos originalmente por Lesh y colaboradores (2003), los cuales han sido retomados y adaptados por diversos autores (Brady, 2018; Diefes-Dux y Wan Salim, 2012; Hjalmarson y Lesh, 2008).

1. Principio de la realidad. La tarea es cercana al contexto, experiencias y conocimientos de los estudiantes, para que ellos se apropien de la situación problemática y de este modo, al hacerla suya se comprometen a abordarla, a darle sentido o significado.

2. Principio de la construcción de modelos. El objetivo de las tareas consiste en la construcción, modificación, ampliación, refinamiento o perfeccionamiento de un modelo, es decir, de un sistema conceptual integrado por objetos matemáticos y sus relaciones. El modelo se crea a partir de la petición de un “cliente” quien tiene la necesidad de entender, explicar, modificar o predecir el comportamiento de otro sistema conceptual significativo (fenómeno físico o social).

3. Principio de la autoevaluación. Los estudiantes evalúan por sí mismos el modelo que crearon, al determinar qué tan útil es para el “cliente” que se los solicitó. Las necesidades de dicho cliente representan un mecanismo de selección que favorecerá la permanencia de los modelos más adecuados.

4. Principio de documentación del modelo. A través del uso de representaciones externas que expresan los objetos y relaciones constituyentes del modelo, los estudiantes revelan sus formas de pensamiento. Así, es importante contar con registros que sean evidencia de los procesos de comunicación y reproducción de los modelos.

5. Principio del prototipo simple. El modelo creado se almacena en la memoria representando un tipo de estructura, la cual se puede recuperar en caso necesario.

6. Principio de generalización del modelo. Los modelos desarrollados tienen la característica de que pueden modificarse y reutilizarse. El modelo debe poder adaptarse a posibles cambios en las condiciones de aplicación y se deben indicar las posibles limitaciones en su aplicación. El estudiante debe comunicar al “cliente” las condiciones bajo las cuales se puede utilizar el modelo sin cambios, y cómo se puede adaptar el modelo si las condiciones de aplicación varían en un cierto rango.

Algunos ejemplos de MEA documentados en la literatura son Pie Grande, Aviones de Papel, El Hotel Histórico, Deforestación en Michoacán o El Gigante Bondadoso, entre otras (Aliprantis y Carmona, 2003; Lesh y Doerr, 2003; Lesh y Lehrer, 2003; Lesh y Zawojewski, 1992; Vargas y Montero, 2023; Vargas et al., 2018).

2. Fundamentos del marco de modelos y modelación

Como teoría didáctica, la PMM tiene sus propios fundamentos, los cuales influyen en los principios que propone para diseñar e implementar actividades instruccionales. Para fines de este artículo, los fundamentos de la PMM se organizaron en tres dimensiones: ontológica, epistemológica y didáctica. Esto se consideró oportuno, por un lado, para explicitar la postura que considera la PMM respecto a la pregunta ¿qué son las matemáticas?, ya que la respuesta guía las tareas planteadas y el quehacer docente. Por otro lado, conocer la dirección que marca este modelo sobre la forma en cómo se construye el conocimiento matemático, y finalmente puntualizar el camino que toma esta perspectiva sobre la forma de enseñar y aprender matemáticas. En esta misma línea de ideas a continuación se detalla cada una de ellas.

2.1. Fundamentos ontológicos de la PMM

En esta perspectiva las matemáticas se conceptualizan en términos de la aplicación de herramientas matemáticas para dar sentido a situaciones reales. Esta teoría didáctica considera a las matemáticas como ciencia de los patrones. La modelación se ocupa de los modelos como estructuras básicas de la cognición y del conocimiento científico, la cognición en matemáticas consiste básicamente en crear y utilizar modelos mentales (Hestenes, 2013).

2.2. Fundamentos epistemológicos de la PMM

Este modelo es de corte constructivista, esta teoría involucra a los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento. Lo que implica ir más allá del aprendizaje tradicional, basado

Este manuscrito ha sido aceptado después de una revisión a doble-ciego por pares y será publicado en una futura edición de esta revista. Su contenido es definitivo y únicamente cambiará en la versión final la información relativa al volumen, número, fecha de publicación y paginado.

en la memorización y en el desarrollo de fluidez procedimental (Cuevas et al., 2015). Además, la construcción de modelos implica dimensiones de desarrollo como de la intuición a la formalización, de lo concreto a lo abstracto, de lo situado a lo descontextualizado, de lo específico a lo general, de lo implícito a lo explícito (Lesh et al., 2013).

2.3. Fundamentos didácticos de la PMM

Esta perspectiva didáctica promueve un aprendizaje basado en el descubrimiento (Ausubel, 2000), considera que se aprende matemáticas haciendo matemáticas; particularmente al construir, revisar y refinar modelos. Además, la teoría parte del supuesto de que los fundamentos de cualquier disciplina pueden enseñarse a cualquier persona, de cualquier edad, de alguna manera (Lesh et al., 2003) ; en otras palabras, la PMM supone que todas las personas tienen, en principio, las mismas capacidades cognitivas para aprender matemáticas.

Otro fundamento relevante es que la PMM considera que el aprendizaje requiere de una secuenciación de actividades estrechamente relacionadas, más que actividades o tareas independientes o aisladas unas de otras. Vargas y Montero (2023) enuncian cinco recomendaciones para implementar tareas (MEA) en el aula.

i) Análisis curricular previo a la selección de la MEA. Se sugiere que el profesor revise los objetivos y contenidos del plan de estudios para que pueda extraer aquellas ideas integradoras que puede revisar con sus estudiantes, de tal manera que se vaya más allá de objetivos que involucran memorización o fluidez procedimental al ejecutar algoritmos o procedimientos rutinarios.

ii) Diseño o selección de MEA. Es una actividad que requiere de tiempo y dedicación. Si el profesor no tiene experiencia en el diseño, se sugiere que elija alguna tarea de las documentadas en la literatura de investigación y que esté alineada al contenido que desea que sus estudiantes aprendan o profundicen. También se pueden consultar repositorios especializados, creados por investigadores reconocidos; por ejemplo, el repositorio de MEA de la Universidad de Purdue (https://bit.ly/40IbcFs).

iii) Adaptación de la MEA al contexto de los estudiantes. Se busca que la tarea sea significativa y que, de acuerdo con el principio de la realidad, los alumnos puedan entender y relacionar el contexto de la tarea con sus experiencias personales. Para que la MEA sea cercana al contexto de los estudiantes se sugiere revisar y tomar en cuenta noticias locales, solicitar reportes de investigación y llevar a cabo visitas a lugares de interés en las comunidades cercanas a donde viven los estudiantes.

iv) Recursos para la implementación en el aula. Es importante que el docente aborde la MEA antes de implementarla, con la finalidad de identificar el potencial matemático de ésta, así como las posibles dificultades u obstáculos que pudieran enfrentar los estudiantes durante el proceso de modelación. Lo anterior permite tener una idea de qué preguntas o sugerencias pueden realizar para ayudar a los estudiantes a enfrentar o superar tales dificultades, sin mostrarles o sugerirles una solución. Durante este proceso se deben evaluar los modelos propuestos por los estudiantes de forma individual, en equipo y realizar discusiones grupales para verificar la validez matemáticamente de los modelos propuestos.

v) Evaluación de los modelos. La modelación es un proceso que va más allá de la obtención de un resultado. El foco de la evaluación es el proceso de construcción, refinamiento y mejoramiento del modelo.

Por otra parte, el fundamento epistemológico socio constructivista de la PMM se traduce en aspectos didácticos que promueven el trabajo colaborativo, así como la reflexión y comunicación de ideas, mediante el uso e interrelación de diferentes producciones culturales, entre las que se encuentran los sistemas de representación externa y las herramientas o tecnologías digitales. Es decir, en la PMM se promueve la integración de comunidades de aprendizaje, dentro de las cuales se genera un lenguaje común, así como otras convenciones sociales (Lesh et al., 2003).

3. Relación de la PMM con otras perspectivas teóricas y didácticas

La PMM es una aproximación teórica, de corte constructivista, que pertenece al grupo de perspectivas didácticas enfocadas en la modelación y las aplicaciones de las matemáticas; relacionándose estrechamente con con los marcos de resolución de problemas (Lester, 1994; NCTM, 2000; Polya, 1973; Schoenfeld, 1985; Silver, 1985) y de la educación STEAM (Bautista, 2021).

La PMM, de acuerdo con sus creadores, representa una propuesta mejorada de los marcos de aprendizaje a partir de la resolución de problemas, en el sentido de que sus principios y constructos básicos permiten superar las limitaciones inherentes a tales marcos. Por ejemplo, se argumenta que en la visión tradicional de aprendizaje basada en la resolución de problemas se considera que abordar situaciones de *la vida real* es más difícil que resolver sus contrapartes descontextualizadas que aparecen en los exámenes y libros de texto; mientras que el supuesto básico de la PMM es justamente lo contrario, que es más fácil abordar las situaciones problemáticas contextualizadas (Lesh y Doerr, 2003b).

Por otra parte, se argumenta que la resolución de problemas se centra en que los estudiantes obtengan la incógnita a partir de los datos del problema, cuando la ruta de solución no es obvia, mediante la aplicación de cierto conjunto de estrategias generales (heurísticas), que se implementan cuando uno no sabe cómo proceder ante una situación problemática. En contraste, en la PMM se llevan a cabo varios ciclos de modelación en los cuales tanto los datos, como las incógnitas

Este manuscrito ha sido aceptado después de una revisión a doble-ciego por pares y será publicado en una futura edición de esta revista. Su contenido es definitivo y únicamente cambiará en la versión final la información relativa al volumen, número, fecha de publicación y paginado.

y los procedimientos de solución se conceptualizan de diferentes formas.

Como ya se ha mencionado, la PMM se sitúa en un amplio grupo de perspectivas didácticas enfocadas en la modelación matemática y las aplicaciones, las cuales han incrementado su relevancia durante las últimas décadas (Stillman y Brown, 2019). Al respecto, en el *International Congress on Mathematical Education* (ICME), celebrado cada cuatro años, y en las conferencias anuales del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), se incluyen regularmente grupos de trabajo y conferencias sobre aplicaciones y modelación matemática. La PMM es una perspectiva enfocada en la modelación matemática, que difiere de las perspectivas centradas en las aplicaciones de las matemáticas. La diferencia radica en que, en el primer caso, los estudiantes tienen que construir el modelo para dar sentido a una situación contextualizada; mientras que, en el segundo caso, la actividad de los estudiantes se reduce a utilizar o implementar un modelo ya existente.

Las aproximaciones sobre modelación matemática, a su vez, se organizan en dos grandes grupos, con base en el eje de atención: (a) el ciclo de modelación, o (b) las competencias de modelación (Stillman, 2019). En el caso de las propuestas orientadas por el ciclo de modelación se destacan los aportes de Borromeo Ferri (2006), Doerr et al. (2017), o Lamb et al. (2017), por mencionar solo unos cuantos. Respecto de los enfoques centrados en las competencias de modelación, además de los trabajos asociados con la PMM, se pueden mencionar las propuestas de Blomhøj y Højgaard Jensen (2003), Kaiser (2007) o Niss (2003), entre otros.

4. Uso de la PMM en el aula

Son diversas las propuestas que han buscado implementar la PMM en el aula. Una de tales propuestas de la que tenemos conocimiento, se denomina Proyecto Campus Viviente de Educación en CITeM, el cual inició operaciones alrededor del año 2013 y que está auspiciado por el grupo de investigación en Educación en CITeM de la Universidad de Texas en San Antonio (UTSA). Los objetivos de este proyecto se orientan por tres ejes: (1) diseño de ambientes de aprendizaje innovadores a través de la modelación, simulación y programación con el uso de herramientas de bajo costo y fácil acceso, (2) profesionalización docente vinculada a dichos ambientes de aprendizaje, y (3) evaluación formativa y sumativa que permita generar evidencia y métricas de estas nuevas formas de aprendizaje. Este proyecto ha mantenido vínculos de colaboración con diversas universidades e instituciones mexicanas, como la Universidad Autónoma de Coahuila, la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Coahuila, la Universidad Juárez del Estado de Durango, la Universidad de Quintana Roo, la Universidad de Guadalajara, entre otras (Carmona et al., 2020).

Entre los proyectos para implementar la modelación en el aula pertenecientes al proyecto Campus Viviente, en Vargas et al. (2016) se reporta una experiencia exitosa con el aprendizaje de las funciones por parte de estudiantes de primer semestre de una licenciatura de turismo

Otras propuestas para implementar la PMM en el aula, se reportan en Trigueros (2009), cuyo proyecto se enfoca en la modelación matemática en nivel superior en el Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), reportando que los estudiantes mostraron gran motivación apropiándose rápidamente de las situaciones planteadas, y un buen desempeño en el manejo de las ideas matemáticas.
En nuestro caso, como ya se mencionó, hemos incursionado en el diseño de MEA y hemos iniciado el proceso de implementación de tales actividades con estudiantes de una licenciatura en matemáticas aplicadas con resultados favorables.

4.1. Limitaciones para la implementación de la PMM

Algunas de las limitaciones de la PMM, al igual que de la mayoría de las perspectivas enfocadas en la modelación o en las aplicaciones de las matemáticas, es que la cantidad de temas matemáticos que se pueden abordar mediante ellas es limitada, destacando ideas sobre operaciones aritméticas, proporcionalidad, funciones, entre otras. Lo anterior debido a que gran parte de las ideas matemáticas, sobre todo los desarrollos más recientes aún no han encontrado áreas de aplicación, o el conocimiento requerido para aplicarlos excede los conocimientos matemáticos de estudiantes incluso de nivel superior. Otra de las limitaciones es que la implementación de las MEA, requiere de tiempos que muchas veces exceden aquellos que los docentes de matemáticas cuentan para impartir sus clases, que en secundaria y bachillerato son de aproximadamente 50 minutos, los cuales son insuficientes para desarrollar una MEA, y menos aún una Secuencia de Desarrollo de Modelos. Otra restricción se refiere al tiempo que debe dedicar el docente para el diseño de la MEA. Sin embargo, para atender esta última problemática, los autores del artículo junto con otros colaboradores hemos iniciado la integración de un banco de actividades basadas en la PMM, con la finalidad de que los docentes interesados en implementar tareas modelación con sus estudiantes, puedan descargar dichas actividades, bajo una licencia Creative Commons (https://bit.ly/3SHCYPZ) y adaptarlas a sus propias necesidades y contexto sociocultural.

Una restricción que se presenta, tanto para los estudiantes como para los profesores, cuando abordan actividades de modelación matemática, es el alto nivel de demanda cognitiva de una MEA (Blum y Borromeo-Ferri, 2009), ya que el estudiante debe conectar diversos contenidos y competencias matemáticas (razonamiento matemático, habilidades de cálculo, diseño y aplicación de estrategias, entre otras). Por lo antes mencionado, pueden surgir dificultades para la construcción del modelo; por ejemplo, cuando se ignora el contexto de la MEA y se centra la atención en los datos que se indican en los enunciados de las tareas, con la finalidad de realizar operaciones aritméticas o implementar procesos algorítmicos, sin verificar la pertinencia de tales herramientas.

Por otro lado, el profesor es visto como el único capaz de validar si la solución propuesta es correcta o no.
Otra limitante que identificamos se refiere a que el profesor puede disminuir el nivel de demanda cognitiva inherente a una MEA, al proporcionar ayuda excesiva a los estudiantes o que sugiera la ruta de solución, lo cual inhibe la exploración y el

El DOI puede ser empleado para citar este manuscrito, pero será habilitado hasta la publicación en Pädi.

descubrimiento de resultados que puede realizar el estudiante, por sí mismo, apoyado en el contexto de la MEA. Al respecto, es importante que los docentes que desean implementar actividades de modelación en el aula se hayan enfrentado previamente, como aprendices, a actividades análogas, para que de este modo pueda orientar de mejor manera la actividad de sus estudiantes (Blum y Borromeo-Ferri, 2009).

Conclusiones

La perspectiva didáctica de modelos y modelación es una herramienta que ofrece a los docentes de matemáticas un conjunto de principios teóricos y prácticos para diseñar e implementar tareas contextualizadas, mediante las cuales los estudiantes aprendan esta disciplina de una forma diferente a la tradicional.

Una característica compartida que se reconoce en esta perspectiva didáctica junto con la de resolución de problemas es que se deja de lado aquellos procesos algoritmos a los cuales la mayor parte de los estudiantes como de resolutores se encuentran familiarizados a diseñar una herramienta que esté en ciclos iterativos de revisión para poder utilizarla en otros casos así como ser reutilizable.

El trabajo individual tiene un papel importante debido a que cada individuo piensa de forma distinta a los demás éste puede generar sus propios modelos y es por medio de la discusión con sus compañeros que se puede llegar al proceso de la autoevaluación y verificar la validez del modelo o en su caso una modificación o rechazo de éste, es por ello importante que dentro del aula exista la apertura de que los estudiantes puedan debatir y que el profesor se abra a escuchar las ideas de los miembros del aula.

Es debido a lo anterior a que el modelado se está tornando más a consideración en las aulas, a medida que se afrontan desafíos globales cada vez más diversos e imperiosos, los cuáles no pasan por desapercibidos por los estudiantes así como de los profesores e investigadores en el área de la enseñanza de las matemáticas, no se puede subestimar la importancia de los modelos y la modelación como teoría didáctica en las aulas ya que puede proporcionar una alternativa para coadyuvar a una mejor enseñanza (English et al. 2016).

Agradecimientos

Los autores agradecemos al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnología por el apoyo brindado para la realización de este trabajo, a través de las becas de posgrado 1235561 y 1238480.

Referencias

Aliprantis, C. D., Carmona, G., (2003). Introduction to an economic problem. In: Lesh, R., Doerr, H., (Eds.), Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 255–264.

Álvarez-Valdés, M. V. G., (1985). El problema de la relación entre teoría y práctica en educación según el pensamiento alemán contemporáneo: consecuencias para la orientación educativa. Revista Española de Pedagogía, 43(167), 17–35.

Arce-Sánchez, M., Conejo-Garrote, L., Muñoz-Escolano, J. M., (2019). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Síntesis, Madrid.

Ausubel, D. P. (2000). The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view. Springer.

Bautista, A. (2021). STEAM education: contributing evidence of validity and effectiveness. Journal for the Study of Education and Development, 44(4), 755-768. doi: https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1926678

Blomhøj, M., Højgaard Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. Teaching Mathematics and Its Applications, 22(3), 123–139. doi:https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. ZDM Mathematics Education, 38(2), 86–95. doi:https://doi.org/10.1007/BF02655883

Brady, C., (2018). Modeling and the representational imagination. ZDM Mathematics Education, 50(1–2), 45–59. doi:https://doi.org/10.1007/s11858-018-0926-4

Carmona, G., Reyes, J., Vargas, V., Cristóbal, C., Alvarado, A., Mata, A., López, A., (2020). Comunidad de comunidades Campus Viviente en educación, en ciencia, ingeniería, tecnología y matemáticas (CITeM): Una experiencia de colaboración internacional hacia la formación de una red temática. In: Ramos, M., Aguilera, V., (Eds.), Ciencias Multidisciplinarias. ECORFAN, Guanajuato, pp. 109-125.

Cuevas, R., Feliciano, A., Miranda, A., Catalán, A., (2015). Corrientes teóricas sobre aprendizaje combinado en la educación. Revista Iberoamericana de Ciencias, 2(1), 75–84.

Diefes-Dux, H. A., Wan Salim, W. W. A., (2012). Transforming the first-year engineering experience through authentic problem-solving: taking a models and modeling perspective. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 56, 314–332. doi: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.660

Doerr, H. M., Ärlebäck, J. B., Misfeldt, M., (2017). Representations of modelling in mathematics education. In: Stillman, G.A., Blum,W., Kaiser, G. (Eds.), Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education. Springer, Cham, pp. 71-81.

English, L. D., Ärlebäck, J. B., Mousoulides, N., (2016). Reflections on Progress in Mathematical Modelling Research. In: Gutiérrez, A., Leder, G. C. (Eds.), The second handbook of research on the psychology of mathematics education. Brill, Leiden, pp. 383–413. doi:https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_11

Hestenes, D., (2013). Modeling theory for math and science education. In: Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R., Hurford, A. (Eds.), Modeling students' mathematical modeling competencies. Springer, Dordrecht, pp. 13–42.

Hjalmarson, M. A., Lesh, R., (2008). Engineering and design research: Intersections for education research and design. In: Kelly, A. E., Lesh, R. A., Baec, J. Y., (Eds.), Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching. Routledge, New York, pp. 96–110.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. In: Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Eds.), Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics. Horwood, Chichester, pp. 110–119.

Lamb, J., Matsuzaki, A., Saeki, A., Kawakami, T., (2017). The dual modelling cycle framework: Report of an Australian study. In G. A. Stillman, G.A., Blum, W., Kaiser, G. (Eds.), Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education. Springer, Cham, pp. 411-419.

Lesh, R., Doerr, H., (2003a). Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. Lawrence Erlbaum, Mahwah.

Lesh, R., Doerr, H., (2003b). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In: Lesh, R., Doerr, H. (Eds.), Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 3-33.

Lesh, R., Doerr, H., Cramer, K., Post, T., Zawojewski, J. (2003). Model development sequences. In: Lesh, R., Doerr, H. (Eds.), Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 35–58.

Lesh, R., Lehrer., R., (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. Mathematical Thinking and Learning 5 (2–3), 109–129. doi: http://dx.doi.org/10.1207/S15327833MTL0502&3_01

Lesh, R., Zawojewski, J. S., (2007). Problem solving and modeling. In: Lester, F. K. Jr. (Ed.), The second handbook of research on mathematics teaching and learning. Information Age Publishing, Charlotte, pp. 763–804.

Lesh, R., Fennewald, T., (2013). Introduction to part I modeling: What Is It? Why Do It? In: Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R., Hurford, A. (Eds.), Modeling students' mathematical modeling competencies. Springer, Dordrecht, pp. 5–12. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0561-1_2

Lester, F. K., (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. Journal for Research in Mathematics Education, 25(6), 660-675. doi:https://doi.org/10.2307/749578

Lester, F. K., (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(6), 457-467. doi:https://doi.org/10.1007/BF02655854

Merçon, J. (2021). Comunidades de aprendizaje transdisciplinarias: cuidando lo común. DIDAC, 78, 72–79. doi:https://doi.org/10.48102/didac.2021.78_JUL-DIC.75

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM, Reston.

Niss, M. A. (2003).Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In: Gagatsis, A., Papastavridis, S. (Eds.), Proceedings of Third Mediterranean Conference on Mathematics Education. Hellenic, Athens, pp. 115–124.

Polya, G., (1973). How to solve it. A new aspect of mathematical method. Princeton University Press, Princeton.

Quiroz, S. J. O., (1995). Un debate en la didáctica. Perfiles Educativos, 67, 37-49.

Scheiner, T., Godino, J. D., Montes, M. A., Pino-Fan, L. R., Climent, N., (2022). On metaphors in thinking about preparing mathematics for teaching. Educational Studies in Mathematics, 111, 253-270. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-022-10154-4

Schichl, H., (2004). Models and the history of modeling. In J. Kallrath, Modeling languages in mathematical optimization (pp. 25-36). Boston: Springer. doi:https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0215-5_2

Schoenfeld, A. H., (1985). Mathematical problem solving. Academic Press, Orlando.

Silver, E. A., (1985). Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Stillman, G.A., (2019). State of the art on modelling in mathematics education–lines of inquiry. In: Stillman, G.A., Brown, J. P. (Eds.), Lines of inquiry in mathematical modelling research in education. Springer, Cham, pp. 1-20.

Stillman, G.A., Brown, J. P., (2019). Lines of inquiry in mathematical modelling research in education. Springer, Cham.

Trigueros, M., (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. Innovación Educativa, 9(46), 75-87.

Vargas, V., Reyes, A., Escalante, C., (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. Educación matemática, 28(2), 59-83.

Vargas, V., Montero, L., (2023). Recomendaciones para promover la modelación en el aula: cerrando la brecha entre investigación y práctica. In: Castañeda, A. (Ed.), Aportes y recursos para la innovación en educación matemática. SOMIDEM, México, pp. 69–95. doi:https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S1/2023/01-03

Vargas, V., Reyes, A., Cristobal, C., (2018). La deforestación como consecuencia del incremento de áreas de cultivo: actividad provocadora de modelos. Épsilon–Revista de Educación Matemática, 99, 7-28.

Wall, S., Shankar, I. (2008). Adventures in transdisciplinary learning. Studies in Higher Education, 33(5), 551-565. doi:https://doi.org/10.1080/03075070802373008