

# Un controlador robusto entrada-estado estable basado en un enfoque por moldeo de energía para robots manipuladores accionados por par A robust input-to-state energy-shaping based controller of torque-driven robot manipulators

L. E. Cervantes-Pérez <sup>a,\*</sup>, V. A. Santibáñez-Dávila <sup>a</sup>, J. A. Sandoval-Galarza <sup>1</sup>

<sup>a</sup>Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Laguna, 27000, Torreón, Coahuila, México.

<sup>b</sup>Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico de La Paz, 23080, La Paz, Baja California Sur, México.

## Resumen

Este artículo presenta un controlador robusto frente a perturbaciones de par variantes en el tiempo para el control de seguimiento de trayectorias de robots manipuladores accionados por par. La principal contribución del presente trabajo es el diseño, análisis y experimentación de una ley de control robusta basado en un enfoque por moldeo de energía. El desempeño del controlador propuesto es demostrado a través de experimentos en un robot manipulador de dos grados de libertad.

*Palabras Clave:* Sistemas Hamiltonianos, robots manipuladores, estabilidad, seguimiento, robustez.

## Abstract

This paper presents a robust joint position trajectory tracking controller of torque-driven robot manipulators affected by time-varying disturbances. The main contribution of the present work is the design, analysis and experimentation of a robust control law based on an energy shaping approach. The performance of the proposed controller is demonstrated through experiments on a two degree-of-freedom robot manipulator.

*Keywords:* Hamiltonian systems, robot manipulators, stability, tracking, robust.

## 1. Introducción

Los controladores basados en conceptos de energía han sido ampliamente estudiados y se han aplicado a una amplia variedad de sistemas mecánicos, resolviendo diversos problemas de control como estabilización (regulación). Ejemplo de ello son los controladores basados en pasividad (Ortega et al., 1998), la metodología IDA-PBC (Ortega et al., 2002) y, más recientemente, una metodología por moldeo de energía inspirada en el método IDA-PBC para robots totalmente actuados (Kelly et al., 2020). En esta, se aborda el modelado de fricción dinámica mediante el modelo de Dahl y se propone un observador para estimar los estados no medibles. Una versión simplificada sin fricción dinámica fue presentada en (Sandoval et al., 2022), donde se agrega como objetivo de control la regulación de energía. La principal diferencia de los métodos de diseño antes mencionados frente al método IDA-PBC, es el enfoque natural del objeti-

vo de control de seguimiento de trayectorias. Los controladores diseñados con métodos por moldeo de energía han demostrado tener cierta robustez frente a dinámicas pasivas no modeladas (como la fricción). Sin embargo, la robustez frente a perturbaciones externas requiere agregar al controlador extensiones dinámicas, por lo general, una de ellas es producto de una acción integral.

En el caso de la metodología IDA-PBC, se han reportado en la literatura diversas extensiones para garantizar el rechazo a perturbaciones de par (perturbaciones emparejadas) y perturbaciones que entran en el lazo de velocidad (perturbaciones no emparejadas). El significado físico de estas últimas aún no está claro (Ortega et al., 2021). En (Donaire and Junco, 2009) se aborda el tema de rechazo a perturbaciones constantes a través de un cambio de coordenadas. En (Ferguson et al., 2017), se presenta una alternativa al cambio de coordenadas de (Donaire and Junco, 2009), mediante el uso de funciones convexas y sus

\*Autor para correspondencia: d.lecervantesp@lalaguna.tecnm.mx

**Correo electrónico:** d.lecervantesp@lalaguna.tecnm.mx (Luis Enrique Cervantes-Pérez), vasantibanezd@lalaguna.tecnm.mx (Víctor Adrian Santibáñez-Dávila), jesus.sg@lapaz.tecnm.mx (Jesús Alberto Sandoval-Galarza).

**Historial del manuscrito:** recibido el 15/12/2023, última versión-revisada recibida el 15/12/2023, aceptado el 10/03/2024, publicado el 22/04/2024. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial2.12266>



propiedades. En el caso de perturbaciones variantes en el tiempo, en (Romero et al., 2013), se presentan diversas extensiones a sistemas en lazo cerrado previamente estabilizados. En donde, a partir de un cambio de coordenadas, similar a (Donaire and Junco, 2009), se obtiene un nuevo sistema en lazo cerrado, el cual garantiza estabilidad entrada-estado. Sin embargo, como se concluye en (Romero et al., 2013), en el caso de sistemas mecánicos con una matriz de inercia no constante, estos controladores demandan un costo computacional de implementación alto. Esto debido a la complejidad en los términos obtenidos de las leyes de control, lo que restringe su campo de aplicación.

En el caso del método por moldeo de energía presentado en (Kelly et al., 2020), también se han reportado algunas extensiones para garantizar el rechazo a perturbaciones de par constantes. En (Cervantes et al., 2022a), se aborda una extensión con acción integral, a partir de un cambio de coordenadas como en (Donaire and Junco, 2009). Mientras que en (Cervantes et al., 2022b), a partir de la selección de ciertas funciones convexas y sus propiedades, se evita el cambio de coordenadas de (Cervantes et al., 2022a), lo que facilita la interpretación de resultados. En ambas extensiones, se aborda el método para estabilizar previamente el sistema en lazo abierto, mediante la metodología por moldeo de energía e inyección de amortiguamiento, cuyo objetivo de control es el seguimiento de trayectorias.

En comparación con la literatura actual, las principales contribuciones del presente artículo son las siguientes:

- La ley de control (extensión integral) se propone y diseña utilizando un enfoque de control por moldeo de energía, recientemente presentado en (Kelly et al., 2020) y (Sandoval et al., 2022), lo que permite un procedimiento constructivo para su diseño y análisis.
- La extensión propuesta, no requiere un sistema en lazo cerrado previamente estabilizado. Más aún, no se asumen ninguna restricción en la matriz de inercia, lo que amplía la clase de sistemas para su aplicación.
- Se presenta un análisis de estabilidad detallado y completo basado en la teoría de Lyapunov y estabilidad de sistemas perturbados (Sontag et al., 1989). En particular, se establecen claramente las condiciones en las ganancias del controlador, tal que se demuestra que el sistema en lazo cerrado perturbado es entrada-estado estable frente a perturbaciones de par variantes en el tiempo. Es decir, el sistema en lazo cerrado posee todas las propiedades reportadas de los sistemas entrada-estado estables (Sontag and Wang, 1995).
- Se presentan pruebas experimentales en tiempo real en un brazo manipulador de dos grados de libertad para ilustrar el desempeño del controlador.

## 2. Control por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento

### 2.1. Formulación del problema de control

El moldeo de energía presentado en (Kelly et al., 2020) y (Sandoval et al., 2022) inicia con el hamiltoniano de un robot manipulador de  $n$  grados de libertad dado por  $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  que se

define como la suma de la energía cinética y potencial del robot y puede ser escrita como

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T M(\mathbf{q})^{-1} \mathbf{p} + \mathcal{U}(\mathbf{q}), \quad (1)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de posición generalizada,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de momentum,  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q})^T > 0$  es la llamada matriz de inercia y  $\mathcal{U}(\mathbf{q})$  es la función de energía potencial, que se supone es al menos una vez diferenciable con respecto a la variable  $\mathbf{q}$  (Kelly et al., 2005). La representación canónica de la formulación hamiltoniana agrega además que

$$\mathbf{p} = M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}}$  es el vector de velocidad.

### 2.2. Modelo dinámico del robot en presencia de perturbaciones

Tomando en cuenta (1) y (2), el modelo dinámico de un robot manipulador con fricción viscosa de  $n$  articulaciones en presencia de perturbaciones externas de par puede ser expresado como

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -\mathcal{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} \\ \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n \\ \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}_{\tau}(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

con  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{diag}\{f_{v_1}, f_{v_2}, \dots, f_{v_n}\}$  cuyos componentes representan los coeficientes de fricción viscosa de cada articulación  $f_{v_i} \geq 0$ ,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de entradas de control y  $\mathbf{d}_{\tau}(t) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de perturbaciones de par, el cual es desconocido y puede ser constante o variante en el tiempo. La clase de robots manipuladores accionados por par considerados en este trabajo está dada por (3).

### 2.3. Sistema en lazo cerrado deseado

Inspirado en (1) y (2), se define a continuación una función escalar de la forma:

$$\mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) = \frac{1}{2} \mathbf{p}_a^T M_a(\mathbf{q}_a)^{-1} \mathbf{p}_a + \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a), \quad (4)$$

denominada función de energía deseada, donde  $M_a(\mathbf{q}_a) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz arbitraria, simétrica, definida positiva y diferenciable con respecto a  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a)$  es una función arbitraria, continua, diferenciable, radialmente desacotada y definida positiva globalmente con un único punto mínimo en  $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_n$ . Se define a continuación un cambio de coordenadas de la forma

$$\mathbf{q}_a = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\phi}(t), \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_a = M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\mathbf{q}}_a, \quad (6)$$

con  $\mathbf{q}_a \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{p}_a \in \mathbb{R}^n$  los vectores de nuevas coordenadas generalizadas de posición y momentum respectivamente. Adicionalmente los vectores  $\boldsymbol{\alpha}$  y  $\boldsymbol{\phi}$  tienen la siguiente estructura

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \alpha_1(\mathbf{q}) & \alpha_2(\mathbf{q}) & \dots & \alpha_n(\mathbf{q}) \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) & \dots & \phi_n(t) \end{bmatrix}^T, \quad (8)$$

con  $\alpha_i(\mathbf{q})$  funciones continuamente diferenciables con respecto a  $\mathbf{q}$ , seleccionadas para asegurar que  $W(\mathbf{q}) = \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$  sea invertible, y con  $\phi_i(t)$  funciones doblemente diferenciables con respecto al tiempo. De (5) se sigue que

$$\dot{\mathbf{q}}_a = W(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}(t). \quad (9)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{q}}_a$  de (9) en (6), y  $\dot{\mathbf{q}} = M(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{p}}$  de (2), se obtiene

$$\dot{\mathbf{p}}_a = T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})\dot{\mathbf{p}} - M_a(\mathbf{q}_a)\dot{\boldsymbol{\phi}}(t), \quad (10)$$

donde

$$T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q}) := M_a(\mathbf{q}_a)W(\mathbf{q})M(\mathbf{q})^{-1}, \quad (11)$$

con  $\text{rango}\{T_a\} = n$ .

#### 2.4. Objetivo de control: Sistema en lazo cerrado

El objetivo de control es el de diseñar una entrada de control  $\boldsymbol{\tau}$  de (3) tal que se obtenga el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ T_a \mathbf{d}_\tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ \boldsymbol{\tau}_{ia} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde  $\mathcal{H}_a$  es una función arbitraria y diferenciable cuya estructura se definió en (4). Observe que (12) es un sistema no autónomo, debido a que la variable  $\mathbf{q}$  aparece en el lado derecho a través de la matriz  $T_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{q})$ , y de la definición de (5), resulta que  $\mathbf{q}(t)$  es una función variante en el tiempo para cualquier función arbitraria variante en el tiempo  $\boldsymbol{\phi}(t)$ . Para una perturbación variante en el tiempo  $\mathbf{d}_\tau(t) \neq \mathbf{0}_n$ , se puede verificar que el origen del espacio de estados  $\begin{bmatrix} \mathbf{q}_a^T & \mathbf{p}_a^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2n}$  no es un punto de equilibrio de (12).

Por otro lado, en ausencia de perturbaciones y con  $\boldsymbol{\tau}_{ia} = \mathbf{0}_{2n}$  entonces el sistema en lazo cerrado (12) se reduce a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & -D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a \end{bmatrix}, \quad (13)$$

por lo que se puede verificar que el origen del espacio de estados  $\begin{bmatrix} \mathbf{q}_a^T & \mathbf{p}_a^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{0}_{2n}$  es el único punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (13).

**Comentario 1.** Tomando  $\mathcal{H}_a$  de (4) como función candidata de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (13), la cual es definida positiva y radialmente desacotada, se sigue que su derivada en el tiempo a través de las trayectorias de (13) está dada por

$$\dot{\mathcal{H}}_a = -\mathbf{p}_a^T M_a^{-1} D_a M_a^{-1} \mathbf{p}_a \leq 0, \quad (14)$$

con lo que se puede concluir que el origen de (13) es un equilibrio estable. Dado que el sistema en lazo cerrado (13) es autónomo, resta aplicar el teorema de LaSalle (ver (Khalil, 2001)) para probar que este equilibrio es asintóticamente estable en forma global.

#### 2.5. Ley de control

La ley de control que resuelve el problema de control formulado en la Sección 2.4 se presenta a continuación:

**Proposición 1.** Considere el modelo de robot (3). Entonces, el sistema de lazo cerrado deseado (12) se logra con una ley de control dada por

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - T_a^{-1} [\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a + D_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a \dot{\mathbf{p}} - \dot{M}_a \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) - M_a \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) - \boldsymbol{\tau}_{ia}], \quad (15)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_{ia}$  es una entrada de control adicional que será definida más adelante (ver Ecuación (26)).

**Prueba 1.** La derivada temporal de (10) es

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \dot{\mathbf{p}} + T_a \ddot{\mathbf{p}} - \dot{M}_a \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) - M_a \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t). \quad (16)$$

Sustituyendo  $\dot{\mathbf{p}}$  de (3) obtenemos

$$\dot{\mathbf{p}}_a = \dot{T}_a \dot{\mathbf{p}} + T_a [-\nabla_{\mathbf{q}} \mathcal{H} - \mathcal{R} \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{H} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}_\tau] - \dot{M}_a \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) - M_a \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t), \quad (17)$$

usando (15) en (17) se obtiene

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_a - D_a \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a + T_a \mathbf{d}_\tau + \boldsymbol{\tau}_{ia}. \quad (18)$$

Además de (4) tenemos que

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = M_a^{-1} \mathbf{p}_a, \quad (19)$$

y dado que  $\mathbf{p}_a = M_a \dot{\mathbf{q}}_a$ , sustituyendo en (19) resulta en

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = \dot{\mathbf{q}}_a. \quad (20)$$

Por lo que finalmente se concluye que (20) y (18) corresponden al primer y segundo renglón de (12) respectivamente. Lo anterior prueba la ley de control (15). Esto completa la prueba de la Proposición 1.

### 3. Control de seguimiento de trayectorias en presencia de perturbaciones

#### 3.1. Solución para perturbaciones variantes en el tiempo: Análisis ISS

Inspirados en (Romero et al., 2013), en esta sección se propone una solución al problema de perturbaciones variantes en el tiempo mediante un cambio de coordenadas adicional al sistema previamente estabilizado. Para este fin, se utilizará el enfoque por moldeo de energía más inyección de amortiguamiento, tal que el nuevo sistema en lazo cerrado garantice estabilidad entrada-estado en presencia de perturbaciones de par acotadas variantes en el tiempo. Para probar esto último se hará uso de las definiciones y teoremas del Apéndice A.

Se introduce a continuación un cambio de coordenadas de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{q}_a, \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{p}_a + k_1 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) + K_3 \mathbf{z}_3, \end{aligned} \quad (21)$$

donde  $k_1 > 0 \in \mathbb{R}$  y  $K_3 = K_3^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

El objetivo de control es el de diseñar una entrada de control  $\boldsymbol{\tau}_{ia}$  de (15) tal que se obtenga el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \\ \dot{\mathbf{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 M_a^{-1} & I_{n \times n} & -M_a^{-1} \\ -I_{n \times n} & -D_a & -M_a R_3 \\ M_a^{-1} & R_3 M_a & -R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \\ \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \\ \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n \\ T_a \mathbf{d}_\tau(t) \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix}, \quad (22)$$

con

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{z}_3 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

y una nueva función de energía

$$\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) = \mathcal{H}_b(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) + \frac{1}{2} \mathbf{z}_3^T K_3 \mathbf{z}_3, \quad (24)$$

donde

$$\mathcal{H}_b(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T M_a^{-1} \mathbf{z}_2 + \mathcal{U}_a(\mathbf{z}_1). \quad (25)$$

**Suposición 1.** Suponga que  $M_a$  y  $D_a$  son matrices constantes y diagonales, la función de energía  $\mathcal{U}_a$  es seleccionada de la forma  $\mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) = \frac{1}{2}\mathbf{q}_a^T K_p \mathbf{q}_a$  con la matriz de ganancias  $K_p = \text{diag}\{k_{p_1}, k_{p_2}, \dots, k_{p_n}\}$ , además  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$  y  $\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{q}_d(t)$ .

**Proposición 2.** Considere el sistema en lazo cerrado con perturbaciones dado en (12) bajo la Suposición 1. Entonces el nuevo sistema en lazo cerrado (22) se logra con una acción integral  $\boldsymbol{\tau}_{ia}$  y una dinámica de  $\mathbf{z}_3$  dadas por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{ia} &= -[k_1 \nabla_{\mathbf{q}_a}^2 \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) M_a^{-1} + K_3 R_3] \mathbf{p}_a \\ &\quad - K_4 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) - K_5 \mathbf{z}_3, \\ \dot{\mathbf{z}}_3 &= K_6 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) + R_3 \mathbf{p}_a, \end{aligned} \quad (26)$$

donde

$$K_4 := k_1 D_a M_a^{-1} + k_1 K_3 R_3 + K_3 M_a^{-1}, \quad (27)$$

$$K_5 := [D_a M_a^{-1} + M_a R_3] K_3, \quad (28)$$

$$K_6 := M_a^{-1} + k_1 R_3, \quad (29)$$

con  $R_3 = R_3^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Prueba 2.** La forma intuitiva de agregar una acción integral, y así tratar de resolver el problema de control, sería a través de las salidas no pasivas del sistema proponiendo el siguiente sistema en lazo cerrado:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{p}_a \\ \mathbf{x}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} & -K_I \\ -I_{n \times n} & -D_a & 0_{n \times n} \\ K_I^T & 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{H}_{cl} \\ \nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_{cl} \\ \nabla_{\mathbf{x}_e} \mathcal{H}_{cl} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

donde  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  es el estado extendido debido a la acción integral, con una función de energía  $\mathcal{H}_{cl} := \mathcal{H}_a(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_a) + \mathbf{x}_e^T K^{-1} \mathbf{x}_e$  evitando así el cambio de coordenadas. Sin embargo, como se demostró en (Donaire and Junco, 2009), no es posible encontrar una ley de control  $\boldsymbol{\tau}_{ia}$  que aplicada a (12) resulte en el sistema de lazo cerrado (30), esto se debe a que las variables  $\mathbf{q}_a$  no se pueden manipular directamente (la entrada de control no tiene efecto directo sobre ellas ya que tienen un grado relativo mayor que uno). Por lo tanto, se propone un cambio de coordenadas en la forma  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{q}_a$ , y a su vez de (21) se sigue que  $\dot{\mathbf{z}}_1 = \dot{\mathbf{q}}_a$ . Al igualar la primera fila de (12) y (22) determinará si es posible encontrar una solución para el cambio de coordenadas  $\mathbf{z}_2 = \Psi(\mathbf{p}_a, \mathbf{q}_a, \mathbf{z}_3)$ . Para ello, de (12) y (22) se obtiene

$$\nabla_{\mathbf{p}_a} \mathcal{H}_a = -k_1 M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl} + \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl} - M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}, \quad (31)$$

tomando en cuenta (4), (24) y (31), se sigue que

$$M_a^{-1} \mathbf{p}_a = -k_1 M_a^{-1} K_p \mathbf{z}_1 + M_a^{-1} \mathbf{z}_2 - M_a^{-1} K_3 \mathbf{z}_3, \quad (32)$$

resolviendo para  $\mathbf{z}_2$  se obtiene

$$\mathbf{z}_2 = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{p}_a, \mathbf{q}_a, \mathbf{z}_3) = \mathbf{p}_a + k_1 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a + K_3 \mathbf{z}_3, \quad (33)$$

donde se ha reemplazado  $K_p \mathbf{z}_1 = \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a$  lo cual es válido debido al cambio de coordenadas (21) y de acuerdo a la Suposición 1. Ahora, para lograr obtener el segundo renglón de (22), se obtiene la derivada temporal de  $\mathbf{z}_2$ , la cual está dada por

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \nabla_{\mathbf{p}_a} \Psi \dot{\mathbf{p}}_a + \nabla_{\mathbf{q}_a} \Psi \dot{\mathbf{q}}_a + \nabla_{\mathbf{z}_3} \Psi \dot{\mathbf{z}}_3. \quad (34)$$

Al igualar  $\dot{\mathbf{z}}_2$  de (22) con (34), y sustituyendo  $\dot{\mathbf{q}}_a$  y  $\dot{\mathbf{p}}_a$  de (12), se obtiene la entrada de control  $\boldsymbol{\tau}_{ia}$  requerida

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{ia} &= -[k_1 \nabla_{\mathbf{q}_a}^2 \mathcal{U}_a M_a^{-1}] \mathbf{p}_a - k_1 D_a M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a \\ &\quad - [D_a M_a^{-1} - M_a R_3] K_3 \mathbf{z}_3 - K_3 \dot{\mathbf{z}}_3, \end{aligned} \quad (35)$$

sustituyendo  $\dot{\mathbf{z}}_3$  del segundo renglón de (26) en (35), se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{ia} &= -[k_1 \nabla_{\mathbf{q}_a}^2 \mathcal{U}_a M_a^{-1} + K_3 R_3] \mathbf{p}_a \\ &\quad - \underbrace{[k_1 D_a M_a^{-1} + k_1 K_3 R_3 + K_3 M_a^{-1}]}_{K_4} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a \\ &\quad - \underbrace{[D_a M_a^{-1} + M_a R_3] K_3}_{K_5} \mathbf{z}_3, \end{aligned} \quad (36)$$

lo que completa la prueba de la Proposición 2.

**Suposición 2.** El vector de perturbaciones  $\mathbf{d}_\tau(t)$  es desconocido pero se asume está esencialmente acotado, es decir satisface:

$$\|\mathbf{d}_\tau(t)\| \leq \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{d}_\tau(t)\| < \infty. \quad (37)$$

**Proposición 3.** El sistema en lazo cerrado (22), bajo las Suposiciones (1)-(2) satisface los siguientes atributos:

1. Tiene un único punto de equilibrio  $\mathbf{z}^* = \mathbf{0}_{3n}$  que es globalmente asintóticamente estable si  $\mathbf{d}_\tau(t) = \mathbf{0}_n$ .
2. Es entrada-estado estable (ISS) con respecto a perturbaciones de par variantes en el tiempo  $\mathbf{d}_\tau(t)$  con una función de ISS de Lyapunov  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$ .

**Prueba 3.** En ausencia de perturbaciones ( $\mathbf{d}_\tau(t) = 0$ ), los puntos de equilibrio del sistema nominal (22) pueden ser determinados por las ecuaciones

$$-k_1 M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl} + \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl} - M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl} = \mathbf{0}_n, \quad (38)$$

$$-\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl} - D_a \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl} - M_a R_3 \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl} = \mathbf{0}_n, \quad (39)$$

$$M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl} + R_3 M_a \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl} - R_3 \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl} = \mathbf{0}_n, \quad (40)$$

desarrollando (38) y despejando  $\mathbf{p}_a$  de (21), se obtiene

$$\begin{aligned} -k_1 M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a + M_a^{-1} \mathbf{z}_2 - M_a^{-1} K_3 \mathbf{z}_3 &= \mathbf{0}_n, \\ M_a^{-1} [-k_1 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a + \mathbf{z}_2 - K_3 \mathbf{z}_3] &= \mathbf{0}_n, \\ M_a^{-1} \mathbf{p}_a &= \mathbf{0}_n, \end{aligned} \quad (41)$$

por lo tanto  $\mathbf{p}_a = \mathbf{0}_n$  es parte del equilibrio. Con este resultado, al desarrollar (40), se obtiene

$$\begin{aligned} M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) + R_3 M_a M_a^{-1} \mathbf{z}_2 - R_3 K_3 \mathbf{z}_3 &= \mathbf{0}_n, \\ K_6 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) + R_3 \mathbf{p}_a &= \mathbf{0}_n, \\ K_6 \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) &= \mathbf{0}_n, \\ \nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) &= \mathbf{0}_n, \end{aligned} \quad (42)$$

por lo tanto  $\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) = \mathbf{0}_n$  en el equilibrio, y de acuerdo a la Suposición 1 resulta  $\mathbf{q}_a = \mathbf{0}_n$ , es decir el punto mínimo de la función  $\mathcal{U}_a$  es parte del equilibrio. Enseguida, desarrollando (39), se obtiene

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbf{q}_a} \mathcal{U}_a(\mathbf{q}_a) - D_a M_a^{-1} \mathbf{z}_2 - M_a R_3 K_3 \mathbf{z}_3 &= \mathbf{0}_n, \\ -D_a M_a^{-1} K_3 \mathbf{z}_3 - M_a R_3 K_3 \mathbf{z}_3 &= \mathbf{0}_n, \\ (D_a M_a^{-1} + M_a R_3) K_3 \mathbf{z}_3 &= \mathbf{0}_n, \end{aligned} \quad (43)$$

por lo tanto  $\mathbf{z}_3 = \mathbf{0}_n$  en el equilibrio. De tal manera que del cambio de coordenadas (21) se concluye que el único punto de equilibrio del sistema en lazo cerrado (22) es el origen, es decir  $[\mathbf{z}_1^T \ \mathbf{z}_2^T \ \mathbf{z}_3^T]^T = \mathbf{0}_{3n}$ . Para probar estabilidad de este punto de equilibrio en el sistema nominal (22), tomaremos como función candidata de Lyapunov la función de energía  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$  de (24). Para probar la positividad de (24), puede verificarse que esta función satisface la siguiente desigualdad

$$\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \geq \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T E_{\min} \boldsymbol{\vartheta}, \quad (44)$$

donde  $\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{z}) = [\|\mathbf{z}_1\| \ \|\mathbf{z}_2\| \ \|\mathbf{z}_3\|]^T$  con la matriz  $E_{\min}$  definida como

$$E_{\min} = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\min}\{M_a^{-1}\} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\min}\{K_3\} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

dado que  $K_p > 0$ ,  $M_a > 0$  y  $K_3 > 0$ , entonces  $\lambda_{\min}\{K_p\}$ ,  $\lambda_{\min}\{M_a^{-1}\}$  y  $\lambda_{\min}\{K_3\}$  son constantes estrictamente positivas. Por tanto, se comprueba que (24) es definida positiva y radialmente desacotada de forma global. Además  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$  también satisface la siguiente desigualdad

$$\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \leq \frac{1}{2} \boldsymbol{\vartheta}^T E_{\max} \boldsymbol{\vartheta}, \quad (46)$$

donde

$$E_{\max} = \begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\max}\{M_a^{-1}\} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\max}\{K_3\} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

siendo  $\lambda_{\min}\{K_p\}$ ,  $\lambda_{\min}\{M_a^{-1}\}$  y  $\lambda_{\min}\{K_3\}$  constantes estrictamente positivas. Por lo anterior, se concluye que  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$  es una función menguante (Kelly and Santibáñez, 2003). Derivando  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$  a través de las trayectorias del sistema en lazo cerrado (22), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_{cl} &= [\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_1 + [\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_2 + [\nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_3, \\ &= -[\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}]^T k_1 M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl} - [\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}]^T D_a \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl} \\ &\quad - [\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}]^T M_a^{-1} \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl} - [\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}]^T M_a R_3 \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl} \\ &\quad + [\nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_3, \end{aligned} \quad (48)$$

y sustituyendo  $\dot{\mathbf{z}}_3$  de (26), la derivada temporal de la función de energía es definida negativa globalmente como sigue

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_{cl}(\mathbf{z}) &= - \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \\ \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \\ \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_1 M_a^{-1} & \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & D_a & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} & R_3 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \\ \nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \\ \nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z}) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (49)$$

$< 0$ ,

dado que  $k_1 > 0$ ,  $M_a^{-1} > 0$ ,  $D_a > 0$ ,  $R_3 > 0$ , por lo que se concluye que el origen del espacio de estados  $[\mathbf{z}_1^T \ \mathbf{z}_2^T \ \mathbf{z}_3^T]^T = \mathbf{0}_{3n}$  de (22) es un equilibrio globalmente asintóticamente estable. Ahora, en presencia de perturbaciones variantes en el tiempo  $\mathbf{d}_\tau(t) \neq 0$ , calculando la derivada temporal de la función de

energía (24) a través de las trayectorias del sistema (22) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_{cl} &= [\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_1 + [\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_2 + [\nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}]^T \dot{\mathbf{z}}_3, \\ &= -k_1 \|\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}\|_{M_a^{-1}}^2 - \|\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}\|_{D_a}^2 - \|\nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}\|_{R_3}^2 \\ &\quad + [\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}]^T [T_a \mathbf{d}_\tau(t)], \\ &\leq -k_1 \lambda_{\min}\{M_a^{-1}\} \|\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}\|^2 - \lambda_{\min}\{D_a\} \|\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}\|^2 \\ &\quad - \lambda_{\min}\{R_3\} \|\nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}\|^2 + [\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}]^T [T_a \mathbf{d}_\tau(t)]. \end{aligned} \quad (50)$$

Aplicando la desigualdad de Young (Ver (Astolfi et al., 2008), Corolario A.3) al segundo y cuarto sumando de (50) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}_{cl}(\mathbf{z}) &\leq \frac{1}{2\lambda_{\min}\{D_a\}} \|T_a \mathbf{d}_\tau(t)\|^2 \\ &\quad - k_1 \lambda_{\min}\{M_a^{-1}\} \|\nabla_{\mathbf{z}_1} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})\|^2 \\ &\quad - \frac{\lambda_{\min}\{D_a\}}{2} \|\nabla_{\mathbf{z}_2} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})\|^2 \\ &\quad - \lambda_{\min}\{R_3\} \|\nabla_{\mathbf{z}_3} \mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})\|^2, \\ &= \frac{1}{2\lambda_{\min}\{D_a\}} \|\mathbf{d}_{pa}(t)\|^2 \\ &\quad - \frac{k_1 \lambda_{\min}\{M_a^{-1}\}}{2} \|K_p \mathbf{z}_1\|^2 \\ &\quad - \frac{\lambda_{\min}\{D_a\}}{2} \|M_a^{-1} \mathbf{z}_2\|^2 - \lambda_{\min}\{R_3\} \|K_3 \mathbf{z}_3\|^2, \\ &\leq -\alpha(\|\mathbf{z}\|) + \beta(\|\mathbf{d}_\tau(t)\|), \end{aligned} \quad (51)$$

siendo  $\alpha(\|\mathbf{z}\|)$ ,  $\beta(\|\mathbf{d}_\tau(t)\|) \in \mathcal{K}_\infty$ , porque  $\lambda_{\min}\{D_a\}$ ,  $\lambda_{\min}\{M_a^{-1}\}$  y  $\lambda_{\min}\{K_3\}$  son constantes estrictamente positivas. Del Teorema 1, y del hecho de que  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$  de (24) es definida positiva y radialmente desacotada prueba (A.2). Además, dado que el término de perturbación  $\mathbf{d}_\tau(t)$  está esencialmente acotado debido a la Suposición 2, y debido a que la derivada temporal de  $\dot{\mathcal{H}}_{cl}(\mathbf{z})$  está acotado como se muestra en (51), entonces la desigualdad (A.3) ha sido probada. Finalmente, se puede concluir que  $\mathcal{H}_{cl}(\mathbf{z})$  de (24) es una función ISS de Lyapunov para el sistema en lazo cerrado (22), lo que completa la prueba de la Proposición 3.

Tabla 1: Parámetros del robot CICESE

Descripción	Notación	Valor	Unidades
Longitud eslabón 1	$l_1$	0,45	m
Longitud eslabón 2	$l_2$	0,45	m
Dist. al c.d.m ( $l_1$ )	$l_{c1}$	0.091	m
Dist. al c.d.m ( $l_2$ )	$l_{c2}$	0.048	m
Masa eslabón 1	$m_1$	23.902	kg
Masa eslabón 2	$m_2$	3.88	kg
Iner. respecto al c.d.m. ( $l_1$ )	$I_1$	1,266	kg · m <sup>2</sup>
Iner. respecto al c.d.m. ( $l_2$ )	$I_2$	0,093	kg · m <sup>2</sup>
Aceleración de la gravedad	$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>

### 3.2. Ley de control total

Finalmente, la nueva ley de control total (15) considerando (26), queda:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{es} + \boldsymbol{\tau}_{di} + \boldsymbol{\tau}_{ia}, \quad (52)$$

donde

$$\begin{aligned}\tau_{es} &= \nabla_q \mathcal{H} + \mathcal{R}\dot{q} - T_a^{-1}[\nabla_{q_a} \mathcal{H}_a + \dot{T}_a p \\ &\quad - \dot{M}_a \dot{\phi}(t) - M_a \ddot{\phi}(t)], \\ \tau_{di} &= -T_a^{-1} D_a \nabla_{p_a} \mathcal{H}_a, \\ \tau_{ia} &= -T_a^{-1} [-k_1 \nabla_{q_a}^2 \mathcal{U}_a(q_a) M_a^{-1} + K_3 R_3] p_a \\ &\quad - K_4 \nabla_{q_a} \mathcal{U}_a(q_a) - K_5 \int_0^t [K_6 \nabla_{q_a} \mathcal{U}_a(q_a(\sigma)) \\ &\quad + R_3 p_a(\sigma)] d\sigma.\end{aligned}\quad (53)$$



Figura 1: Robot manipulador CICESE de dos grados de libertad.

#### 4. Caso de Estudio: Robot CICESE

Se realizó una serie de experimentos con el robot de la Figura 1 que se construyó en el Centro de Investigación CICESE en México (Reyes and Kelly, 1997), (Reyes and Kelly, 2001). El brazo robótico se mueve en el plano vertical como se muestra en la Figura 2. Los parámetros dinámicos de las articulaciones son: la longitud del brazo  $l_i$ , la longitud del centro de masa  $l_{c_i}$ , el momento de inercia  $I_i$  y la masa  $m_i$ , con  $i = 1, 2$ . La aceleración de la gravedad es  $g$ , mientras que  $\tau$  es el vector de entrada requerido para cada actuador. Los experimentos se llevaron a cabo utilizando la plataforma en tiempo real para Windows llamada WinMechLab (Campa et al., 2004). El algoritmo de control dado por las ecuaciones (52) se discretizó a través del método de Euler, y se ejecutó con un período de muestreo de 2,5 [ms] usando una tarjeta de adquisición de datos MultiQ-PCI desarrollada por Quanser Consulting Inc. El modelo dinámico (3) del robot de la Figura 1 se puede describir con la matriz de inercia dada por

$$M(q_2) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) & c_2 + c_3 \cos(q_2) \\ c_2 + c_3 \cos(q_2) & c_2 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

La matriz de coeficientes de fricción viscosa está dada por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} f_{v_1} & 0 \\ 0 & f_{v_2} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

donde  $f_{v_1} = 2,288$  [Nm s/rad] y  $f_{v_2} = 0,175$  [Nm s/rad], y la función de energía potencial

$$\mathcal{U}(q_1, q_2) = -c_4 g \cos(q_1) - c_5 g \cos(q_1 + q_2), \quad (56)$$

donde las constantes  $c_i$ , with  $i = 1, 2, \dots, 5$  son definidas como  $c_1 = m_1 l_{c_1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1$ ,  $c_2 = m_2 l_{c_2}^2 + I_2$ ,  $c_3 = m_2 l_1 l_{c_2}$ ,  $c_4 = m_1 l_{c_1} + m_2 l_1$ ,  $c_5 = m_2 l_{c_2}$ . Los valores numéricos de los parámetros del robot se listan en la Tabla 1. En la Tabla 1 los términos “Dist.,” “c.d.m.” y “Iner.” refieren a distancia, centro de masa e inercia respectivamente.

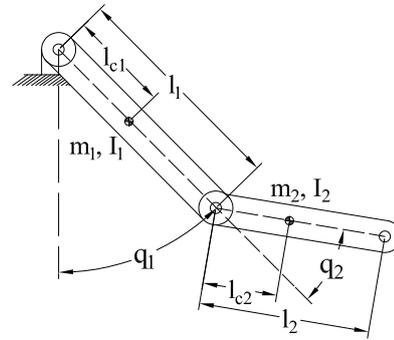


Figura 2: Diagrama de la cinemática del robot CICESE.

##### 4.1. Estabilización del sistema en lazo cerrado: Moldeo de energía más inyección de amortiguamiento

Para el manipulador de la Figura 1, el sistema en lazo cerrado (22) es obtenido usando la ley de control (52), donde se ha seleccionado la función de energía potencial deseada para cumplir con la Suposición 1 como

$$\mathcal{U}_a(q_{a_1}, q_{a_2}) = \frac{1}{2} [k_{p_1} q_{a_1}^2 + k_{p_2} q_{a_2}^2], \quad (57)$$

con las matrices constantes  $M_a = \text{diag}\{a_1, a_2\}$  con  $a_1 = 1$  y  $a_2 = 1$ ,  $D_a = \text{diag}\{k_{v_1}, k_{v_2}\}$ . Más aún, la función  $\mathcal{H}_a(q_a, p_a)$  de (4) está dada por

$$\mathcal{H}_a(q_a, p_a) = \frac{1}{2} [p_{a_1}^2 + p_{a_2}^2] + \frac{1}{2} [k_{p_1} q_{a_1}^2 + k_{p_2} q_{a_2}^2], \quad (58)$$

la cual es definida positiva globalmente, radialmente des-  
acotada con un punto mínimo en  $[q_{a_1} \ q_{a_2} \ p_{a_1} \ p_{a_2}]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . En todos los casos se consideran la configuración de condiciones iniciales del robot  $[q_1(0) \ q_2(0) \ p_1(0) \ p_2(0)]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Se fijaron los estados iniciales de la variable extendida  $z_3$  de (26) como  $[z_{3_1}(0) \ z_{3_2}(0)]^T = [0 \ 0]^T$ . En el modo regulación el vector de posiciones deseadas fue asignado como  $q_d = [\frac{\pi}{4} \ \frac{\pi}{2}]^T$ .

En el modo seguimiento el vector de posiciones deseadas fue asignado como

$$\mathbf{q}_d(t) = \begin{bmatrix} q_{d_1}(t) \\ q_{d_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1[1 - e^{-2t^3}] + c_1[1 - e^{-2t^3}] \sin(\omega_1 t) \\ b_2[1 - e^{-2t^3}] + c_2[1 - e^{-2t^3}] \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix}, \quad (59)$$

donde  $b_1 = 0,78$  [rad],  $c_1 = 0,17$  [rad],  $\omega_1 = 15$  [rad/s],  $b_2 = 1,04$  [rad],  $c_2 = 2,18$  [rad] y  $\omega_2 = 3,5$  [rad/s]. Dada la cantidad de ganancias a sintonizar, se decidió agrupar las ganancias equivalentes a la ganancia proporcional (ganancias que multiplican al error de posición) de manera que para el experimento en modo regulación fueron asignadas como:

$$\overline{K}_p = K_p + K_4 K_p = \text{diag}\{55, 50\} [s^{-2}], \quad (60)$$

las ganancias equivalentes a la ganancia derivativa (ganancias que multiplican al error de velocidad) en el modo regulación se fijaron como:

$$\overline{K}_v = k_1 K_p + K_3 R_3 + K_v = 7 I_{2 \times 2} [s^{-1}], \quad (61)$$

y las equivalentes a la ganancia integral (ganancias que multiplican a la integral del error de posición) como:

$$\overline{K}_I = K_5 = I_{2 \times 2}, \quad (62)$$

así como se fijaron las ganancias  $K_3 = I_{2 \times 2}$  y  $R_3 = I_{2 \times 2}$ . Para mostrar el desempeño del controlador propuesto, en todos los experimentos se contrasta el resultado frente al mismo experimento con el mismo controlador pero sin la acción integral, es decir  $\tau_{ia} = \mathbf{0}_2$  de (15). Para este caso en particular (sin la acción integral), las ganancias del controlador fueron fijadas como  $K_p = \overline{K}_p$ , y  $K_v = \overline{K}_v$ , es decir las ganancias proporcionales y derivativas equivalentes. En modo seguimiento (con acción integral) las ganancias de controlador fueron asignadas como:  $\overline{K}_p = \text{diag}\{800, 1000\} [s^{-2}]$ ,  $\overline{K}_v = \text{diag}\{56, 56, 63, 24\} [s^{-1}]$ ,  $\overline{K}_I = I_{2 \times 2}$ ,  $K_3 = 5,5 I_{2 \times 2}$  y  $R_3 = I_{2 \times 2}$ . En modo seguimiento (sin la acción integral), nuevamente las ganancias del controlador fueron fijadas como  $K_p = \overline{K}_p$ , y  $K_v = \overline{K}_v$ , es decir las ganancias proporcionales y derivativas equivalentes. Es importante destacar que las ganancias del controlador propuesto (52) fueron seleccionadas cuidadosamente a través de un proceso de prueba y error con el objetivo de lograr el mejor rendimiento posible, al mismo tiempo que se evitó exceder el par de seguridad máximo permitido para cada actuador  $\tau_{\text{máx}_1} = \pm 150$  [Nm] y  $\tau_{\text{máx}_2} = \pm 15$  [Nm]. El análisis de estabilidad solo requiere que las ganancias del controlador (52),  $K_p$ ,  $D_a$ ,  $K_3$  y  $k_1$  sean estrictamente positivas, para garantizar que el sistema de lazo cerrado (22) sea entrada-estado estable.

Para el modo regulación se introdujo una perturbación de par constante en (3) de la forma siguiente:

$$\mathbf{d}_\tau = \begin{cases} [0 \ 0]^T \text{ [Nm]}, & 0 \leq t < 10[\text{s}], \\ [10 \ 5]^T \text{ [Nm]}, & 10 \leq t \leq 20[\text{s}]. \end{cases} \quad (63)$$

Los resultados experimentales en modo regulación se muestran en la Figura 3. Para el modo seguimiento se introdujo una perturbación de par variante en el tiempo en (3) de la forma siguiente:

$$\mathbf{d}_\tau(t) = \begin{cases} [0 \ 0]^T \text{ [Nm]}, & 0 \leq t < 10[\text{s}], \\ [10 \sin(t) \ 5 \cos(t)]^T \text{ [Nm]}, & 10 \leq t \leq 20[\text{s}], \\ [0 \ 0]^T \text{ [Nm]}, & t > 20[\text{s}]. \end{cases} \quad (64)$$

así como los resultados experimentales en modo seguimiento se muestran en la Figura 4, lo cuales demuestran para el controlador con acción integral que los estados se encuentran acotados muy cercanos a cero. Mientras que sin acción integral hay un desplazamiento del punto de equilibrio, además la magnitud de los errores de posición es mayor. Mientras que en ambos casos las señales de control son muy similares en magnitud.

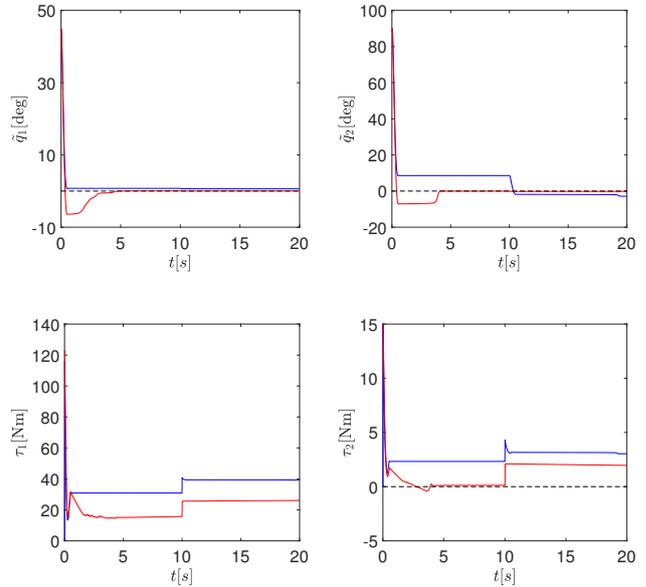


Figura 3: Resultados experimentales del controlador para perturbaciones variantes en el tiempo en modo regulación, en color (azul) el controlador (52) sin acción integral  $\tau_{ia} = \mathbf{0}_2$ , en color (rojo) el controlador (52) con acción integral.

## 5. Conclusiones

Un controlador robusto entrada-estado estable frente a perturbaciones de par variantes en el tiempo ha sido presentado. Este controlador es una extensión a la metodología por moldeo de energía originalmente presentada en (Kelly et al., 2020) y (Sandoval et al., 2022), por lo que se sigue un procedimiento constructivo para su diseño y análisis. Un riguroso análisis de estabilidad ha sido mostrado en detalle. Los resultados experimentales muestran un desempeño sobresaliente incluso sin perturbación presente, lo que demuestra que las dinámicas pasivas no modeladas (como la fricción) se comportan como perturbaciones externas. Como trabajo futuro, se pretende extender el marco teórico propuesto para garantizar el rechazo a perturbaciones desconocidas para una clase de sistemas mecánicos subactuados.

## Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente financiada por las subvenciones CONAHCYT CVU 1106239, por contrato CONAHCYT 166636, por la Red Internacional de Control y Cómputo Aplicado (RICCA) del TecNM y por proyectos TecNM.

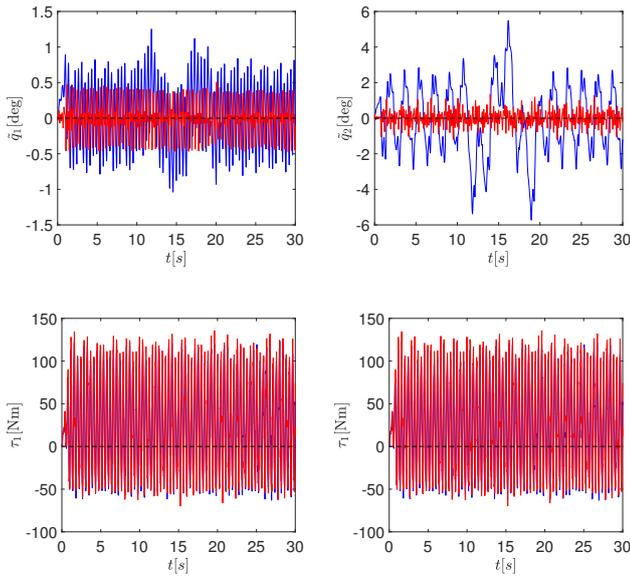


Figura 4: Resultados experimentales del controlador para perturbaciones variantes en el tiempo en modo seguimiento, en color (azul) el controlador (52) sin acción integral  $\tau_{ia} = \mathbf{0}_2$ , en color (rojo) el controlador (52) con acción integral.

## Referencias

- Astolfi, A., Karagiannis, D., and Ortega, R. (2008). *Nonlinear and adaptive control with applications*, volume 187. Springer.
- Campa, R., Kelly, R., and Santibáñez, V. (2004). Windows-based real-time control of direct-drive mechanisms: platform description and experiments. *Mechatronics*, 14(9):1021–1036.
- Cervantes, L., Santibáñez, V., and Sandoval, J. (2022a). New energy-shaping based control plus an integral action for torque-driven robot manipulators using coordinate changes. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.
- Cervantes, L., Santibáñez, V., and Sandoval, J. (2022b). Nuevo control basado en moldeo de energía más una acción integral para robots manipuladores accionados por par sin cambio de coordenadas. *Memorias del Congreso Mexicano de Robótica*.
- Donaire, A. and Junco, S. (2009). On the addition of integral action to port-controlled hamiltonian systems. *Automatica*, 45(8):1910–1916.
- Ferguson, J., Donaire, A., and Middleton, R. H. (2017). Integral control of port-hamiltonian systems: Nonpassive outputs without coordinate transformation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(11):5947–5953.
- Kelly, R., Davila, V. S., and Perez, J. A. L. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*. Springer Science & Business Media.
- Kelly, R., Sandoval, J., and Santibáñez, V. (2020). A guas joint position tracking controller of torque-driven robot manipulators influenced by dynamic dahl friction: Theory and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(5):1877–1890.
- Kelly, R. and Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson Educación.
- Khalil, H. K. (2001). Control of nonlinear systems.
- Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J., Sira-Ramirez, H., Ortega, R., Loria, A., Nicklasson, P. J., and Sira-Ramirez, H. (1998). *Euler-Lagrange systems*. Springer.

- Ortega, R., Romero, J. G., Borja, P., and Donaire, A. (2021). *PID Passivity-Based Control of Nonlinear Systems with Applications*. John Wiley & Sons.
- Ortega, R., Spong, M. W., Gómez-Estern, F., and Blankenstein, G. (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment. *IEEE transactions on automatic control*, 47(8):1218–1233.
- Reyes, F. and Kelly, R. (1997). Experimental evaluation of identification schemes on a direct drive robot. *Robotica*, 15(5):563–571.
- Reyes, F. and Kelly, R. (2001). Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm. *Mechatronics*, 11(3):267–282.
- Romero, J. G., Donaire, A., and Ortega, R. (2013). Robust energy shaping control of mechanical systems. *Systems & Control Letters*, 62(9):770–780.
- Sandoval, J., Kelly, R., Santibáñez, V., and Villalobos-Chin, J. (2022). Energy regulation of torque-driven robot manipulators in joint space. *Journal of the Franklin Institute*, 359(4):1427–1456.
- Sontag, E. D. et al. (1989). Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE transactions on automatic control*, 34(4):435–443.
- Sontag, E. D. and Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5):351–359.

## Apéndice A. Estabilidad Entrada-Estado

Las siguientes definiciones y teoremas fueron inicialmente presentados en (Sontag et al., 1989):

**Definición 1.** Considere el siguiente sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (\text{A.1})$$

con  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . Se dice que el sistema (A.1) es estable de entrada a estado (ISS) si existe una función de clase- $\mathcal{KL}$   $\beta(\cdot)$  y una función de clase- $\mathcal{K}$   $\gamma(\cdot)$  tal que, para cada condición inicial  $\mathbf{x}(0)$  y cada entrada medible, esencialmente acotada  $\mathbf{u}(t)$ , la solución  $\mathbf{x}(t)$  existe para todo  $t \geq 0$  y satisface

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(0)\|, t) + \gamma(\sup_{\tau \in [0, t]} \|\mathbf{u}(\tau)\|).$$

La propiedad ISS se puede caracterizar de manera equivalente en términos de funciones de Lyapunov, como muestra el siguiente teorema (Sontag and Wang, 1995).

**Teorema 1.** El sistema (A.1) es ISS si y solo si existe una función  $C^1$   $V(\mathbf{x})$  tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(\mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq -\alpha(\|\mathbf{x}\|) + \beta(\|\mathbf{u}\|), \quad (\text{A.3})$$

donde  $\alpha(\cdot)$ ,  $\alpha_1(\cdot)$ ,  $\alpha_2(\cdot)$ ,  $\beta(\cdot)$  son funciones de clase  $\mathcal{K}_\infty$ .

**Definición 2.** Una función  $V(\mathbf{x})$  que satisface las condiciones del Teorema 1 se denomina función ISS-Lyapunov para el sistema (A.1).

Una condición necesaria y suficiente para que un sistema sea ISS es la existencia de una función ISS-Lyapunov.