

Control predictivo y tolerancia a fallas de un cuadrirrotor Predictive control and fault tolerant of a quadrotor

J. C. Velázquez-Carrasco ^{a,*}, J. Castañeda-Camacho ^a, C. Martínez-Torres ^b

^aFacultad de Ciencias de la Electrónica, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 72570, Puebla, Puebla, Mexico.

^bEscuela de ingenierías, Universidad de las Américas Puebla, 72810, San Andrés Cholula, Puebla, Mexico.

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo, acoplar una estrategia de control de detección y reconfiguración de fallas basada en planitud, en conjunto con un controlador Predictivo de Modelo lineal para el control de trayectorias automático de un cuadrirrotor, en donde los controladores tengan la posibilidad de adaptarse y reconfigurarse ante la aparición de un posible evento de falla y garantizar la supervivencia del cuadrirrotor.

Palabras Clave: Cuadrirrotor, control, fallas, predictivo, trayectoria.

Abstract

The objective of this work is to couple a fault detection and reconfiguration control strategy based on flatness, in addition with a Lineal Model Predictive control for the automatic trajectory control of a quadrotor, where both controllers have the possibility of adapting and reconfigure in a possible failure event and guarantee the survival of the quadrotor.

Keywords: Quadrotor, control, fault, predictive, trajectory.

1. Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados han aumentado su popularidad en los últimos años, por consecuencia es cada vez más común observar este tipo de vehículos en el día a día. Al igual que el número de usuarios, las aplicaciones han aumentado de manera exponencial, destacando, entre ellas, la entrega de paquetería, la inspección autónoma, actividades de vigilancia, sensado remoto (Hugenholtz *et al.*, 2012), etc. Sin embargo, estas aplicaciones requieren de interacción con los humanos o de llevar cargas costosas, tomando en cuenta el vehículo en sí mismo, por lo que un accidente o incidente puede generar grandes pérdidas económicas o incluso peor, daños a seres humanos. En la mayor parte de las aplicaciones antes mencionadas, es necesario que el vehículo sea capaz de conocer su posición en zonas donde no se tenga acceso a señal de GPS, tener un seguimiento de trayectoria preciso a pesar de las perturbaciones y, finalmente, en caso de falla (Zhang y Jiang, 2008), poder realizar una reconfiguración rápida y eficiente para evitar daño al vehículo o a su entorno.

En los años recientes, se ha visto un crecimiento considerable

referente al estudio de controladores que permitan a un cuadrirrotor, realizar una trayectoria específica, uno de ellos es el control predictivo de modelo que su principal ventaja es su capacidad de anticiparse a eventos futuros y reconfigurarse. Sin embargo en su mayoría, esto no es suficiente para garantizar la supervivencia de un cuadrirrotor, y una propuesta en donde ante eventos de fallas, el sistema pueda realizar una acción alterna en dado caso de que el sistema principal no pueda resolver, se vuelve necesaria y la principal razón de la propuesta presentada en este artículo.

El esquema de detección/reconfiguración de falla basado en planitud que es la propuesta seleccionada para tratar esta problemática, se presentó en (Martínez-Torres *et al.*, 2014), el controlador lineal propuesto en (Salazar-Hidalgo *et al.*, 2020) el cual se dividió en tres controladores: altitud, orientación y traslación. Los estados de traslación y orientación se encuentran acoplados de manera natural, por lo que, si uno de estos estados presenta una falla, dos de tres controladores se verán afectados de manera directa o indirecta, sin embargo utilizando las propiedades de la planitud diferencial, es posible proponer una trayectoria que garantice la supervivencia del cuadrirrotor ante

*Autor para correspondencia: jesusc.velazquezc@gmail.com

Correo electrónico: jesusc.velazquezc@gmail.com (Jesús Cristian Velázquez-Carrasco), josefina.castaneda@correo.buap.mx (Josefina Castañeda-Camacho), cesar.martinez@udlap.mx (César Martínez-Torres).

una falla.

2. Modelo dinámico de un cuadrirrotor

Un cuadrirrotor es un vehículo aéreo conformado por cuatro rotores, los cuales tienen la función de que al variar su velocidad angular, estos realizan un movimiento en específico en cualquiera de los grados de libertad presentados en la Figura 1.

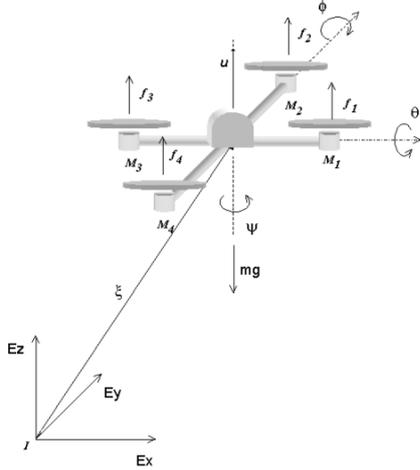


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de un cuadrirrotor y sus grados de libertad (Castillo et al., 2007).

De acuerdo a la Figura anterior, se puede apreciar que dicho sistema tiene la capacidad de desplazarse en 6 grados de libertad, tres empleadas para posición y tres de orientación. También es preciso mencionar que para el estudio de las trayectorias, es necesario definir la configuración con la cual se va a trabajar, debido a que el frente de un cuadrirrotor se puede situar entre dos rotores o en caso contrario, ubicado en un rotor. Para este trabajo en concreto, se estará utilizando la primera configuración.

2.1. Ecuaciones del sistema dinámico

Para las ecuaciones de movimiento que describen la dinámica del cuadrirrotor, se usará el formalismo de Euler-Lagrange que nos describe el balance de energía de un cuerpo en movimiento.

De ella se parte con que la posición relativa del sistema de referencia de nuestro vehículo β con respecto al sistema de referencia inercial I , extraídas de (Castillo et al., 2007), se encuentra definida por el vector $\xi \in \mathbb{R}^3$, descrito por $\xi = [x \ y \ z]^T$. En el caso de la orientación del vehículo esta quedará representada por el vector $\eta \in \mathbb{R}^3$ el cual estará compuesto por los ángulos de Euler $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ y en el caso de las ecuaciones generalizadas del vehículo aéreo descritos por el vector $q \in \mathbb{R}^6$ vienen dadas por $q = [\xi \ \eta]^T$.

Con estas ecuaciones se construye la ecuación de movimiento basado en Euler-Lagrange que viene dada por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix}. \quad (1)$$

De la ecuación anterior \mathcal{L} representa el lagrangiano del sistema, el cual es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema descrito por $\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U}$.

2.2. Ecuaciones del movimiento traslacional

La energía cinética del sistema está dado por la siguiente ecuación:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi}. \quad (2)$$

En donde m representa la masa del vehículo. Así mismo se sabe que la energía potencial se expresa como $\mathcal{U} = mgz$, en donde g representa la fuerza de gravedad.

Con estas ecuaciones se construye el lagrangiano del sistema como se describe a continuación:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} - mgz. \quad (3)$$

Una vez obtenido el lagrangiano, traducimos la ecuación 1 con el vector ξ como se muestra a continuación:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} = F_\xi. \quad (4)$$

Evaluando las operaciones de la ecuación anterior, finalmente obtendríamos la siguiente relación:

$$m \ddot{\xi} + mg = F_\xi. \quad (5)$$

Donde F_ξ representa la fuerza aplicada al cuadrirrotor generada por el empuje total de los rotores misma que viene expresada de la siguiente forma:

$$F_\xi = R \hat{F}. \quad (6)$$

Tomando en consideración que, $\hat{F} = [0 \ 0 \ F]^T$ siendo F la representación de la sumatoria de empujes ejercidos por cada rotor.

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i, \quad (7)$$

del cual el empuje de cada motor está dado por $f_i = k_T \omega_i^2$.

A su vez en la ecuación 6, $R \in \mathbb{R}^3$ determina la orientación del vehículo al sistema de coordenadas inercial, el cual es extraído de (Castillo et al., 2007). Se muestra a continuación la matriz R en donde por simplicidad usaremos c_θ y s_θ para $\cos \theta$ y $\sin \theta$ respectivamente:

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\psi c_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Finalmente obtenemos que

$$F_\xi = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} F. \quad (9)$$

Finalmente, sustituyendo estas ecuaciones, obtendríamos la dinámica traslacional de un cuadrirrotor tal como se muestra a continuación:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} F - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}. \quad (10)$$

2.3. Ecuaciones del movimiento rotacional

Para este caso, la energía cinética estará dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\Omega}. \quad (11)$$

Donde $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ representa el vector de velocidades angulares de β con respecto a I .

$$\boldsymbol{\Omega} = [p \quad q \quad r]^T. \quad (12)$$

De igual forma, suponemos que la distribución de la masa del cuadrirrotor es simétrica, se considera el tensor de inercia $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ el cual es una matriz diagonal como se presenta a continuación:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Las componentes de la velocidad angular del cuadrirrotor β , denotado por $\boldsymbol{\Omega} = W_\eta \dot{\boldsymbol{\eta}}$ se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (14)$$

. Donde $W_\eta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ es el Jacobiano del sistema de rotación.

La matriz \mathbb{J} actúa como matriz de inercia para la energía cinética total rotacional del cuadrirrotor, expresada directamente en términos de las coordenadas generalizadas η .

$$\mathbb{J} = W_\eta^T \mathbf{I} W_\eta. \quad (15)$$

Sustituyendo 15 en 11 obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (16)$$

De esta forma, el Lagrangiano de la dinámica rotacional queda expresado como sigue, teniendo en consideración que aquí no toma parte la energía potencial al no haber variaciones en la altura.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J} \dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (17)$$

La ecuación del movimiento de Euler Lagrange para la dinámica de rotación queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{\eta}}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (18)$$

Para finalmente obtener:

$$\mathbb{J} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\mathbf{V}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (19)$$

En donde $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ representa los momentos de *yaw*, *pitch* y *roll* y $\bar{\mathbf{V}}$ está expresado de la siguiente manera:

$$\bar{\mathbf{V}} = \left(\mathbb{J} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} \left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbb{J} \right) \right) \dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\eta}}. \quad (20)$$

Donde \mathbf{C} representa los términos de Coriolis, el cual contiene los efectos giroscópicos y centrífugos asociados con $\boldsymbol{\eta}$ estudiados de mejor manera en (Castillo *et al.*, 2007).

De igual manera:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbb{J}. \quad (21)$$

Donde $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta})$ es la matriz de inercia. Finalmente de la ecuación 19 obtenemos:

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}) \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\tau}. \quad (22)$$

3. Control Predictivo de Modelo

El control predictivo de modelo (MPC por sus siglas en ingles *Model Predictive Control*) es un tipo de controlador que hace uso explícito de un tipo de planta, con la cual le permite ser capaz de anticiparse a los eventos futuros que puede pasar el sistema. Esta capacidad de anticiparse a los eventos, respeta las limitantes que pudiera tener el sistema y sobre todo, permite que las salidas y entradas de una planta sean independientes. Dichas limitantes, así como el horizonte de predicción, ya que al ser un sistema predictivo, es necesario considerar un tiempo finito con el cual el sistema va a funcionar, se encuentran contenidas en un optimizador que dará pauta al funcionamiento del sistema dependiendo de los eventos requeridos.

Para el modelo de planta, consideramos que cuenta con m entradas, q salidas y s estados.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m(k+1) &= A_m \mathbf{x}_m(k) + B_m \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= C_m \mathbf{x}_m(k). \end{aligned} \quad (23)$$

Donde $A_m \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $B_m \in \mathbb{R}^{s \times m}$, $C_m \in \mathbb{R}^{q \times s}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ el vector de entradas y $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ el vector de salidas.

A través de estos parámetros se define el modelo de predicción:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+j|k) = CA^j \mathbf{x}(k) + \sum_{i=0}^{j-1} CA^{j-i-1} B \Delta \mathbf{u}(k+i). \quad (24)$$

Para $j = 1, \dots, N_p$ donde N_p representa el horizonte de predicción. De la expresión anterior se obtiene el modelo de predicción.

$$\hat{\mathbf{y}}(k+j|k) = \hat{\mathbf{Y}} = F \mathbf{x}(k) + \Phi \Delta \mathbf{U}. \quad (25)$$

De igual manera se considera el siguiente vector el cual contiene los valores de referencia deseados.

$$\mathbf{R}_s^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] r(k).$$

Se define la función de costo:

$$J = (\mathbf{R}_s - \hat{\mathbf{Y}})^T \bar{\mathbf{Q}} (\mathbf{R}_s - \hat{\mathbf{Y}}) + \Delta \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{R}} \Delta \mathbf{U}. \quad (26)$$

Donde el primer termino esta relacionado con los errores entre el valor de referencia y la salida predicha, mientras que el segundo termino refleja el peso dado al tamaño de $\Delta \mathbf{U}$ cuando la función de costo J es minimizada.

Aquí $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{q N_p \times q N_p}$ y $\bar{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{m N_c \times m N_c}$. $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ son matrices diagonales, las cuales son usadas como parámetros de sintonización. Sustituyendo el modelo de predicción dentro de la función de costo, derivando e igualando a cero se obtiene la secuencia de control óptima.

$$\Delta \mathbf{U} = [\Phi^T \bar{\mathbf{Q}} \Phi + \bar{\mathbf{R}}]^{-1} \Phi^T \bar{\mathbf{Q}} [\mathbf{R}_s - F \mathbf{x}(k)]. \quad (27)$$

Esta metodología empleada para el uso del controlador predictivo de modelo se puede estudiar a detalle en (E. F. Camacho, 2007).

4. Control Tolerante a fallas basado en planitud diferencial

El control tolerante a fallas (FTC por sus siglas en inglés *Fault Tolerant Control*) es un tipo de control que posee la habilidad de que cuando un componente de un sistema falla, esta se reconfigura automáticamente, permitiendo que termine la tarea que estaba desempeñando y así evitar posibles daños mayores.

Generalmente hablando, el FTC puede llegar a ser clasificado en dos tipos: los controladores pasivos PFTCS (por sus siglas en inglés *Passives Fault Tolerant Control System*) y en activos AFTCS (por sus siglas en inglés *Active Fault Tolerant Control System*). Los PFTCS son considerados como los controladores robustos. Su idea básica es hacer que el lazo cerrado del sistema sea robusto ante las incertidumbres y tiene limitación a ciertas fallas restrictivas. Dado que en este trabajo los AFTCS nos proporcionan ciertas características necesarias para acoplarla al otro controlador, como es el caso de permitirnos terminar la tarea que se está ejecutando entrando en un modo alterno, nos centraremos en este tipo de controladores.

4.1. Control tolerante a fallas activo (AFTCS)

Los AFTCS (por sus siglas en inglés *Active Fault Tolerant Control System*) son controladores que consisten en ajustar o reconfigurar usando la información proveniente de un bloque de detección, teniendo la meta de mantener al menos el sistema estable. Para esto, ajustan los controladores a la falla detectada, teniendo la posibilidad de preservar el sistema en falla a el valor nominal.

La estructura básica de los AFTCS esta compuesta de cuatro sub sistemas que se presentan a continuación:

- Un controlador retroalimentado reconfigurable, que pueda reaccionar ante las fallas cambiando algunos parámetros del controlador en el sistema entero.
- Un bloque de detección e identificación de falla. Este bloque tiene que actuar de manera rápida y precisa de acuerdo a la presencia de la falla.
- Un mecanismo de reconfiguración, que se encarga del mecanismo de identificación de falla con el controlador reconfigurado.
- Un planificador de trayectoria designado para evitar que el actuador se sature y ajustar las referencias después de la falla.

4.2. Planitud diferencial

La teoría diferencial de planitud busca determinar si un sistema de ecuaciones diferenciales puede ser parametrizado por funciones arbitrarias. Un sistema lineal o no lineal es plano si existe un grupo de variables, diferencialmente independientes (Fliess et al., 1995), llamadas salidas planas, las cuales son iguales a la cantidad de salidas de control. Un ejemplo sería que el vector estado y las entradas de control pueden ser expresadas como funciones de las salidas planas y un número finito de sus derivadas de tiempo.

Como consecuencia, las trayectorias de control y de estado pueden ser obtenidas estudiando solo las trayectorias de salida planas.

Consideremos el sistema no lineal $\dot{x} = f(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$ el vector estado, $u \in \mathbb{R}^m$ el vector control y f una C^∞ función de x y u . El sistema es diferencialmente plano si, y solo si, existe una salida vector plano $z \in \mathbb{R}^m$ tal que

- El vector salida plano esta expresado como la función del estado x y la entrada de control u y un número finito de sus derivadas en el tiempo.

$$z = \phi_z(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(y)}). \quad (28)$$

- El estado x y la entrada de control u están expresadas como la función del vector z y un número finito de sus derivadas en el tiempo.

$$x = \phi_x(z, \dot{z}, \dots, z^{(a)}), \quad (29)$$

$$u = \phi_u(z, \dot{z}, \dots, z^{(a+1)}). \quad (30)$$

En donde $z^{(a)}$ sería la a^{th} derivada con respecto al tiempo de z .

El método de control tolerante a fallas basado en planitud diferencial tomado de (Martínez-Torres et al., 2014) busca cubrir cada una de las fases necesarias para la construcción de un controlador. Una de estas fases es la reconstrucción de una trayectoria basado en la teoría plana que se mostró con anterioridad. Sabemos que las salidas planas contienen información de varios elementos implícitos dentro de nuestra planta, el punto de usar esta teoría, es que cuando un sistema falla, encuentre las salidas planas, y como si se tratase de una ingeniería inversa, a partir de esas salidas tomar la señal que ha fallado de este sistema, y con ayuda de la matemática que implicaba el control de trayectoria con el cual la planta venía trabajando antes de su falla, reconstruir la señal que había fallado, para que el sistema pueda terminar su tarea.

5. Control FTC acoplado a control MPC

En este trabajo se busca acoplar ambos controladores, en el caso del controlador MPC, se toma el empleado en (Salazar-Hidalgo et al., 2020) que linealiza y separa el modelo dinámico en tres sistemas, rotación, traslación y de altitud.

El enfoque básico es que a través de un sistema de identificación de falla, el sistema pueda hacer un *switch* virtual y pasar de la información obtenida por el controlador MPC a la información dada por las salidas planas como se muestra en la Figura 2. Es decir, tomando un caso donde el sensor de posición falle, el sistema de identificación de fallas, identifica dicho suceso, y realiza el cambio de controlador, en donde a través de las salidas planas, sustituye la información que el controlador predictivo ya no es capaz de dar al sistema.

5.1. Cálculo de salidas planas

Para el cálculo de las salidas planas que definirán las trayectorias en el caso de que el sistema entre en un estado de falla, se utilizará la metodología de salidas planas, las cuales se presenta en (Martínez-Torres et al., 2014). Para ello tenemos que partir del sistema dinámico en su configuración no lineal, esto para hacer que la trayectoria sea lo más cercana posible a la deseada, ya que en el modelo simplificado, hay consideraciones que en el proceso pasan omitidos, el modelo dinámico para esta

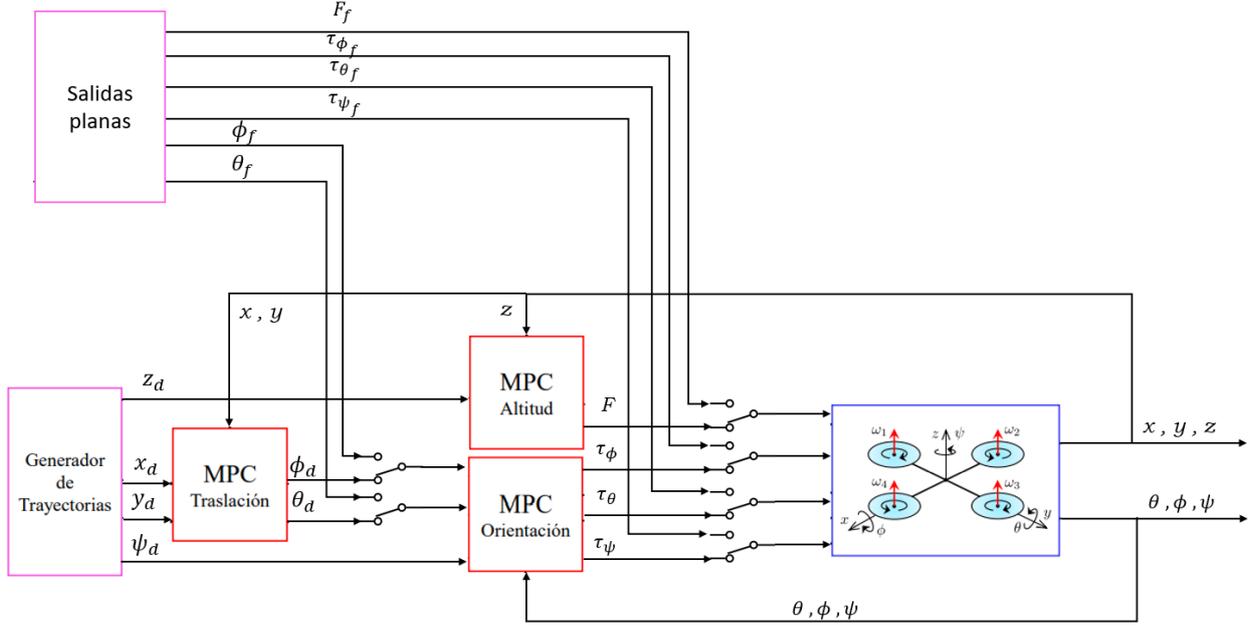


Figura 2: Control tolerante a fallas acoplado al control predictivo de modelo.

parte es tomado de (Salazar-Cruz *et al.*, 2005) ya que la solución del sistema dinámico que se propone aquí es mas cómodo para calcular las salidas planas.

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Considerando que nuestras entradas de control son $u_1 = F$, $u_2 = \tau_\phi$, $u_3 = \tau_\theta$ y $u_4 = \tau_\psi$ obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -u_1 \sin \theta, & u_2 &= \ddot{\phi} I_{xx}, \\ m\ddot{y} &= u_1 \cos \theta \sin \phi, & u_3 &= \ddot{\theta} I_{yy}, \\ m\ddot{z} &= u_1 \cos \theta \cos \phi - mg, & u_4 &= \ddot{\psi} I_{zz}. \end{aligned} \quad (32)$$

Con esto presente tenemos que obtener todos los estados y todas las señales de control en función de salidas planas y un numero finito de sus derivadas, de la ecuación anterior y definiendo las salidas planas como: $z\alpha = [x \ y \ z \ \psi]^T$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x &= z_1, & \dot{x} &= \dot{z}_1, \\ y &= z_2, & \dot{y} &= \dot{z}_2, \\ z &= z_3, & \dot{z} &= \dot{z}_3, \\ \psi &= z_4, & \dot{\psi} &= \dot{z}_4, \\ \theta &= \arcsin\left(\frac{m\dot{z}_1}{-u_1}\right), & \dot{\theta} &= -m\left(\frac{\dot{z}_1 u_1 - u_1^2 \dot{z}_1}{u_1^2 \sqrt{A}}\right), \\ \phi &= \arctan\left(\frac{\dot{z}_2}{\dot{z}_3 + g}\right), & \dot{\phi} &= \frac{\ddot{z}_2(\dot{z}_3 + g) - \ddot{z}_3 \dot{z}_2}{(\dot{z}_3 + g)^2 + \dot{z}_2^2}. \end{aligned}$$

Donde:

$$A = 1 - \left(\frac{m\dot{z}_1}{u_1}\right)^2. \quad (33)$$

De aquí, para obtener u_1 partimos de sumar las igualdades en la ecuación 31 y al realizar las operaciones implícitas, obtenemos:

$$u_1 = m \sqrt{(\dot{z}_1)^2 + (\dot{z}_2)^2 + (\dot{z}_3)^2 + 2g\dot{z}_3 + (g)^2}. \quad (34)$$

6. Resultados

Para simular el proceso se tiene que tomar la versión aumentado del sistema dinámico, seguido de su modelo de predicción y finalmente la ley de control. Para esta simulación realizada en el entorno computacional MATLAB. Se toman las especificaciones del cuadricóptero obtenidas de (Silano *et al.*, 2019) y que se presentan en la tabla 1 y también los parámetros de sintonización son tomados de (Salazar-Hidalgo *et al.*, 2020) los cuales se muestran en la tabla 2.

Tabla 1: Parámetros del sistema

Parámetro	Valor	Unidades
m	0.5	kg
g	9.81	m/s^2
l	0.12905	m
I_{xx}	0.00389	$kg \times m^2$
I_{yy}	0.00389	$kg \times m^2$
I_{zz}	0.00780	$kg \times m^2$
k_T	$8,5485 \times 10^{-6}$	$kg \times m$
k_D	0.016	m

Tabla 2: Parámetros del controlador MPC

Parámetro	Altitud	Posición	Orientación
T_s	0.05	0.05	0.005
N_p	10	10	12
N_c	10	10	12
Q	20	20	15
R	0.01	0.01	0.1

La trayectoria realizada por nuestro sistema, viene descrita por las ecuaciones: $x_d = 2 \cos(0,2t)$, $y_d = 2 \sin(0,2t)$, $z_d = 0,5t$ y $\psi_d = \pi$.

La simulación de la trayectoria calculada, en comparación con la trayectoria real, queda de la siguiente manera:

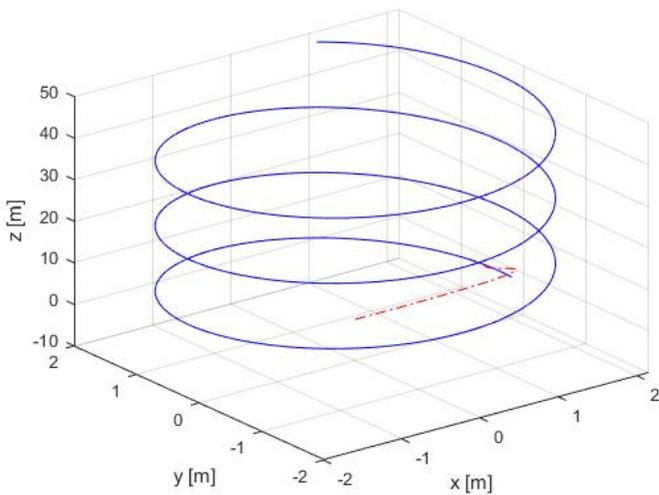


Figura 3: Trayectoria recorrida por el cuadrirrotor.

6.1. Falla en MPC de altitud

Este caso consiste en que el sensor de altitud z falle y por consecuencia, el control tolerante a fallas pueda proporcionar a través de las salidas planas, la información para que el cuadrirrotor pueda terminar la tarea empleada.

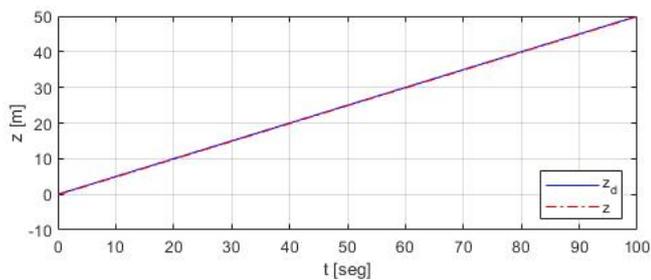


Figura 4: Altitud con falla mostrado en el instante 80.

Si el sensor de altitud z falla, el MPC ya no podrá proporcionar la variable F , y por lo tanto las salidas planas proporcionan la variable F_f . Se define que en un instante $k = 80$ se realice el *switch* virtual y con esto en consideración se obtiene la grafica mostrada en la Figura 4.

Cabe aclarar que dado a que este resultado fue, el único que mostró condiciones óptimas, es con el cual nuestro sistema podría realizar una trayectoria de emergencia para salvaguardar la supervivencia del cuadrirrotor, el cual es uno de los objetivos principales planteados en este escrito.

6.2. falla en MPC de posición

Este caso consiste en que el sensor de posición x, y falle y por consecuencia, el control tolerante a fallas pueda proporcionar a través de las salidas planas, al igual que el caso anterior, la información necesaria para terminar la trayectoria.

Si el sensor de posición x falla, el MPC ya no podrá proporcionar la variable θ , y por lo tanto las salidas planas proporcionan la variable θ_f . Si el sensor de posición y falla, el MPC ya no podrá proporcionar la variable ϕ , y por lo tanto las salidas planas proporcionan la variable ϕ_f . Se define que en un instante $k = 80$ se realice el *switch* virtual y se define que el sensor de posición falle en el ámbito x , obteniendo la siguiente Figura:

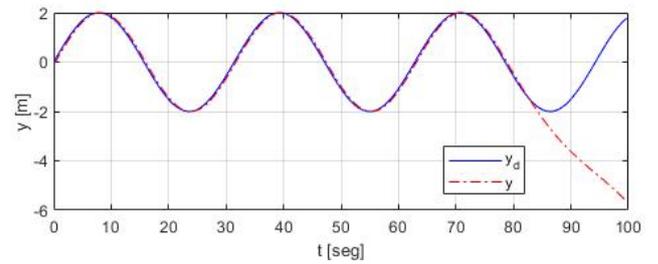


Figura 5: Posición x con falla en el instante 80.

En el caso de y donde simulamos los mismos parámetros, podemos observar lo siguiente:

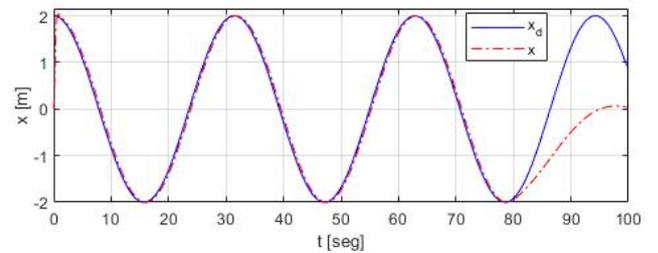


Figura 6: Posición y con falla en el instante 80.

A grandes rasgos, el control de fallas en el ámbito de posición no cumple con los requerimientos para realizar la trayectoria necesaria, cabe aclarar que los rangos de error son muy grandes, haciendo que momentáneamente ese método no sea viable.

6.3. Falla en MPC de orientación

Este caso consiste en que el sensor de orientación θ, ϕ y ψ falle y por consecuencia, el control tolerante a fallas pueda proporcionar a través de las salidas planas, la información para que el cuadrirrotor pueda terminar la tarea empleada.

Si el sensor de orientación θ falla, el MPC ya no podrá proporcionar la variable τ_θ , y por lo tanto las salidas planas proporcionan la variable τ_{θ_f} . Si el sensor de orientación ϕ falla, el MPC ya no podrá proporcionar la variable τ_ϕ , y por lo tanto las salidas planas proporcionan la variable τ_{ϕ_f} de igual manera si el

sensor de orientación ψ falla, el MPC ya no podrá proporcionar la variable τ_{ψ_f} , y por lo tanto las salidas planas proporcionan la variable τ_{ψ_f} , obteniendo las gráficas que se presentan en la Figura 7.

En el caso de los τ dados por el control tolerante a fallas no se visualiza una diferencia notoria, así como es el caso de la salida de control equivalente a F de igual manera este es el caso mas critico de los tres en donde prácticamente el sistema esta pasando a un lazo abierto.

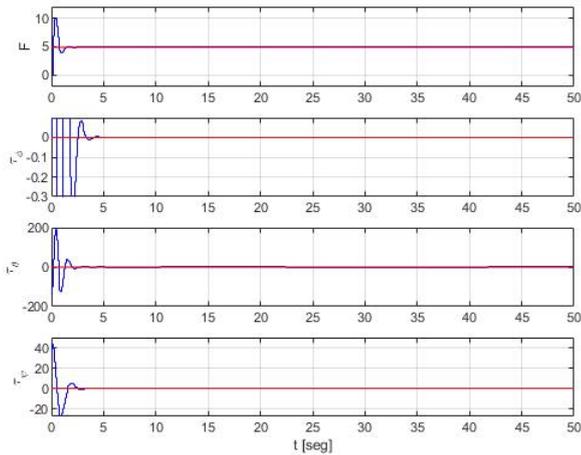


Figura 7: variables τ con fallas.

7. Conclusiones

Hasta el momento, las salidas planas planteadas en conjunto con el sistema dinámico usado, continúan sin ser fiables de-

bido a que no nos otorgan los parámetros necesarios para que nuestro cuadrirrotor termine de realizar la trayectoria que se le había designado en un principio. Con lo obtenido hasta ahora, ya tenemos el como visualizar la trayectoria, solo es buscar la manera en la cual, se pueda encontrar la similitud necesaria para que la salida plana se parezca en gran medida a la trayectoria correspondiente a cada falla, o ya en un caso muy extremo, usando el control tolerante a fallas de altitud, que fue el único que dio resultados satisfactorios, se podría plantear un descenso de emergencia cumpliendo con el controlador tolerante a fallas.

Referencias

- Castillo, P., García, P., Lozano, R., y Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, 4(1):41–57.
- E. F. Camacho, C. B. (2007). *Model Predictive Control*. Springer London.
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., y Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61:13–27.
- Hughenoltz, C. H., Moorman, B. J., Riddell, K., y Whitehead, K. (2012). Small unmanned aircraft systems for remote sensing and earth science research. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 93(25):236–236.
- Martínez-Torres, C., Lavigne, L., Cazaurang, F., Alcorta-García, E., y Díaz-Romero, D. A. (2014). Flatness-based fault tolerant control. *Dyna*, 81(18):130–137.
- Salazar-Cruz, S., Palomino, A., y Lozano, R. (2005). Trajectory tracking for a four rotor mini-aircraft. *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2505–2510.
- Salazar-Hidalgo, E., Castañeda-Camacho, J., Martínez Torres, C., y Martínez-Carranza, J. (2020). Model-based predictive control for trajectory tracking of a quadrotor. *Memorias del Congreso Nacional de Control Automático*.
- Silano, G., Oppido, P., e Iannelli, L. (2019). Software-in-the-loop simulation for improving flight control system design: a quadrotor case study. *2019 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (SMC)*, pp. 466–471.
- Zhang, Y. y Jiang, J. (2008). Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual Reviews in Control*, 32(2):229–252.