

Control de velocidad de un robot esfera con locomoción inercial Speed control of a sphere robot with inertial locomotion

M. Herrera-Cordero ^{a,*}, M. Arias-Montiel ^a

^aInstituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 69000, Heroica ciudad de Huajuapán de León, Oaxaca, México.

Resumen

Este trabajo presenta el control de velocidad de un robot esfera con arquitectura BCO, basado en su función de transferencia. El controlador es desarrollado mediante el análisis del lugar geométrico de las raíces (LGR) de la función de transferencia en lazo cerrado (LC). Dicho controlador es evaluado tanto en el modelo lineal como en el no lineal. Se realizan simulaciones numéricas en el software Matlab-Simulink para evaluar el desempeño del controlador demostrando su viabilidad para ser implementado en ambos modelos. Por último, se muestra el par torsional de control necesario para la selección de los actuadores del robot.

Palabras Clave: Robot esfera, péndulo, Euler-Lagrange.

Abstract

This work presents the speed control of a sphere robot with BCO architecture, based on its transfer function. The controller is developed by analyzing the root locus (LGR) of the closed-loop (LC) transfer function. The proposed controller is evaluated in both linear and nonlinear models. Numerical simulations are executed with the Matlab-Simulink software to evaluate the performance of the controller, demonstrating the viability to be implemented in both models. Finally, the control torque necessary for the selection of the robot actuators is shown.

Keywords: Sphere Robot, pendulum, Euler-Lagrange.

1. Introducción

Los robots esfera (SR, por sus siglas en inglés) son un tipo especial de robots móviles cuya arquitectura y tipo de movimiento los hace óptimos para operar en entornos robustos. Lo anterior, se debe a las ventajas que presentan con respecto a otros robots móviles con ruedas, orugas o con piernas, puesto que su arquitectura le permite proteger sus componentes internos de humedad, polvo e incluso cambios bruscos de temperatura. Además, el movimiento que tienen estos robots es omnidireccional, lo que los hace energéticamente eficientes. Sin embargo, su diseño, control e implementación son complejos. A pesar de lo anterior, estos robots son una gran opción para aplicarse en ambientes de exploración o vigilancia como es mostrado en (Bujnák et al. (2022)).

Existen diferentes arquitecturas de robots esfera, propiamente clasificadas por (Chase and Pandya (2012)), como son transformación de carcasa (ST, por sus siglas en inglés), variación de su centro de masa (BCO, por sus siglas en inglés) y conservación de la cantidad de movimiento angular (COAM,

por sus siglas en inglés), siendo esta última la más reportada en la literatura. La descripción del comportamiento del movimiento de los SR se basa principalmente en las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del robot, ya que posteriormente a estas, se puede diseñar el algoritmo de control para obtener un comportamiento deseado del robot. En (Risma et al. (2019)) se presenta el análisis cinemático de un robot esfera con arquitectura BCO, deduciendo las relaciones entre las velocidades y las aceleraciones angulares, después de ello se realiza un estudio de la dinámica mediante la metodología de Euler-Lagrange, donde la cinemática posibilita la simplificación y obtención de expresiones, aptas para ser usadas en el desarrollo de algoritmos de control. Los esquemas de control que se han empleado en este tipo de arquitecturas son el control proporcional, integral y derivativo (PID) como es propuesto por (Firlej (2015)), donde se aplica dicho controlador a un robot esfera con un carro de dos ruedas interno, así como también, (Chen et al. (2016)), aplicaron un controlador PID a un robot esfera con arquitectura BCO. Por otro lado, en (Huang and Huang (2000)), se hace uso de la teoría Grey, la cual se emplea para mejorar el rendimiento

*Autor para correspondencia: marcor@mixteco.utm.mx

Correo electrónico: marcor@mixteco.utm.mx (Mario Enrique Herrera-Cordero), mam@mixteco.utm.mx (Manuel Arias-Montiel).

Historial del manuscrito: recibido el 18/12/2023, última versión-revisada recibida el 18/12/2023, aceptado el 08/03/2024, publicado el 22/04/2024. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial2.12284>



to del control de un sistema sin suficiente información o con propiedades altamente no lineales como es el péndulo invertido. Mientras que (Kayacan et al. (2012)), proponen el control de velocidad de un robot esfera mediante un controlador difuso de tipo PID Grey con tamaño de paso adaptativo (PIDFC, por sus siglas en inglés). El propósito del diseño de la estructura del controlador difuso está enfocado en ajustar el paso del predictor Grey. Además, el modelo del sistema es tratado como no lineal, y es usado para evaluar el desempeño del controlador. En (Azizi and Keighobadi (2016)) se propone un controlador robusto mediante el seguimiento de trayectoria, en donde se diseña un controlador por modos deslizantes (SMC, por sus siglas en inglés) basado en modelo dinámico para el control de la posición de un SR no holonómico bajo parámetros inciertos y dinámicas no modeladas. Las ganancias del controlador se hallan mediante la aplicación directa del método de Lyapunov, por lo que, se garantiza la robustez y la convergencia a cero del error. Un controlador similar pero aplicado a un robot esfera con arquitectura BCO con 2 DOF se presenta en (LI and ZHAN (2018)). (Moazami et al. (2019)), proponen las ecuaciones cinemáticas de cada categoría de los SR's y el control mediante el seguimiento de trayectoria sobre superficies tridimensionales.

Por todo lo anterior, controlar la posición o la velocidad es crucial para definir el estado del robot esfera, es por ello que, se debe plantear la dinámica del sistema, ya sea obtenida por el formalismo de Euler - Lagrange o la segunda Ley de Newton. La dinámica de los robots esfera con arquitectura BCO es altamente no lineal, por lo que es necesario linealizar alrededor de un punto de operación, si la intención es aplicar un controlador lineal como es mostrado por (Manriquez-Silva et al. (2023)). Este trabajo es una extensión del trabajo reportado en (Herrera-Cordero and Arias-Montiel (2023)), lo novedoso es el diseño del controlador de velocidad del robot esfera con accionamiento por locomoción inercial de un péndulo simple (arquitectura BCO), dicho controlador es diseñado por el método del lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia de la planta, en donde es de importancia estudiar la ubicación de los polos y ceros tanto en lazo abierto (LA) como en lazo cerrado (LC), así como también, estudiar el comportamiento de los polos y ceros al cerrar el lazo o retroalimentar la función de transferencia de la planta.

2. Descripción del robot esfera

El robot esfera considerado se basa en la arquitectura BCO, en donde un péndulo interno de 2 GDL provoca el cambio de centro de masa del sistema al ser accionado, generando así su desplazamiento. De forma simplificada, el robot consta de una carcasa esférica hueca, en cuyo interior se coloca un disco de menor diámetro, que tiene la finalidad de posicionar el péndulo en el centro de la esfera, así como también tiene la función de sostener dos actuadores rotatorios ubicados perpendicularmente uno del otro, de tal forma que, cada uno de ellos defina el accionamiento de avance en un eje u otro. Los componentes mencionados se muestran en la Figura 1.

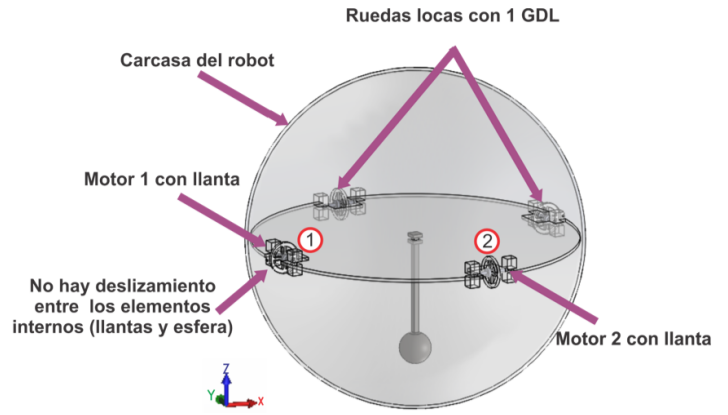


Figura 1: Configuración del Robot Esfera.

2.1. Modelo matemático

El modelo matemático que describe el comportamiento dinámico del robot es obtenido a partir de las siguientes consideraciones:

1. No hay deslizamiento entre el suelo y la esfera.
2. El péndulo se considera como la unión entre una barra y una esfera.
3. No hay deslizamiento entre las llantas de tracción y en el interior de la carcasa (ver Figura 1).
4. Las llantas y el disco de soporte son considerados discos delgados.

Una vez expresadas las consideraciones es necesario definir un diagrama de cuerpo libre que establezca el actuar del robot y sus variables correspondientes, tal y como se muestra en la Figura 2.

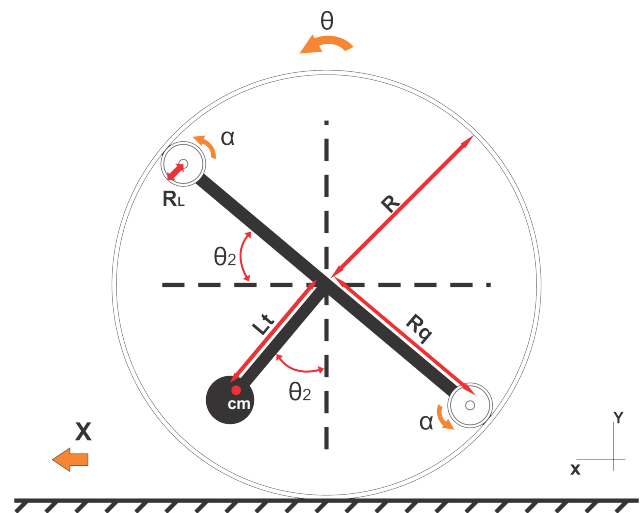


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre del robot.

Teniendo definidas las variables es posible calcular las energías potenciales y cinéticas tanto traslacionales como rotacionales de cada elemento del robot, las cuales serán utilizadas para obtener el modelo matemático que describe la dinámica del robot, usando el formalismo de Euler-Lagrange. Definiendo

cada una de las propiedades de los elementos como son la inercia, la masa y las distancias de los elementos al eje de rotación, se obtiene el modelo matemático descrito por las ecuaciones (1) y (2). Los detalles de la obtención del modelo matemático se presentan en Herrera-Cordero and Arias-Montiel (2023).

$$\ddot{\theta} = [m_p g L_t \sin(b\alpha - \theta) - (m_p R L_t \cos(b\alpha - \theta) - C) b \ddot{\alpha} - m_p R L_t \sin(b\alpha - \theta) (b \dot{\alpha} - \dot{\theta})^2 - \underbrace{c_1 * \dot{\theta}}_{\text{Fricción}_{\text{suelo}}}] \quad (1)$$

$$* \left[\frac{1}{A + C - 2m_p L_t R \cos(b\alpha - \theta)} \right],$$

$$\ddot{\alpha} = [\tau - (m_p L_t R b \cos(b\alpha - \theta) - bC) \ddot{\theta} - m_p g L_t b \sin(b\alpha - \theta) - \underbrace{c_2 * \dot{\alpha}}_{\text{Fricción}_{\text{interna}}}] \frac{1}{b^2 C}, \quad (2)$$

donde:

- c_1 es el coeficiente de fricción entre la esfera y el suelo.
- c_2 es el coeficiente de fricción entre las ruedas de transmisión y el interior de la carcasa.
- $A = m_C R^2 + m_S R^2 + m_{D_{x4}} R^2 + m_{b_{x4}} R^2 + m_P R^2 + I_C$,
 $C = m_D R_q^2 + I_{D_{x2}} + I_{D_{y_{x2}}} + m_b R_q^2 + I_{b_{x2}} + I_{b_{y_{x2}}} + I_S + m_p L_t^2 + I_p$.
 Siendo: m_C la masa de la carcasa, m_S la masa del disco de soporte, m_D es la masa de las llantas, m_b la masa de las bases de los soportes y m_p es la masa del péndulo, mientras que las I 's representan los respectivos momentos de inercia.

Los valores numéricos de cada masa e inercia son mostrados en la Tabla 1 Herrera-Cordero and Arias-Montiel (2023). El modelo matemático descrito por las ecuaciones (1) y (2) muestra que el sistema es no lineal y además, las ecuaciones presentan dos variables del más alto orden diferencial acopladas, es por ello que se realiza un arreglo matricial para lograr despejarlas y tener por cada ecuación solo una variable de mayor orden. Al tener lo anterior, es posible definir cada una de las variables de estado, dadas por $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \dot{\alpha}$. Una vez definidas las variables de estado es posible linealizar las ecuaciones dinámicas del sistema alrededor de un punto de equilibrio, esto es cuando el péndulo se encuentra en la posición vertical hacia abajo es decir $\theta_2 = b\alpha - \theta = 0$. Al linealizar con respecto al punto de operación se obtiene el modelo dinámico linealizado del sistema expresado por las ecuaciones (3) y (4).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1\delta} \\ \dot{x}_{2\delta} \\ \dot{x}_{3\delta} \\ \dot{x}_{4\delta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1.24964 & -0.1520 & 0.1149 & -0.0177 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4.1152e+02 & -0.6194 & -37.8603 & -9.9319 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz}_A} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \\ x_{4\delta} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 70.9358 \\ 0 \\ 3.9727e+04 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz}_B} [T_{in}],$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz}_C} \begin{bmatrix} x_{1\delta} \\ x_{2\delta} \\ x_{3\delta} \\ x_{4\delta} \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{\text{Matriz}_D} [T_{in}]. \quad (4)$$

3. Diseño del controlador del sistema

En la sección anterior se mostró el proceso de linealización del modelo dinámico del robot para poder desarrollar un controlador lineal que sea diseñado a través del método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), puesto que se trata de un sistema sobreamortiguado en respuesta a velocidad como se muestra en Herrera-Cordero and Arias-Montiel (2023). Para desarrollar el controlador por LGR es necesario encontrar la función de transferencia de velocidad del robot.

3.1. Función de transferencia de velocidad

La función de transferencia del robot se puede obtener a partir de las ecuaciones matriciales lineales (3) y (4). Dichas ecuaciones son sometidas a la ecuación (5), la cual es obtenida previamente al relacionar la entrada y la salida de un sistema expresado en sus variables de estado.

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D. \quad (5)$$

Al aplicar la ecuación (5), se obtiene la función de transferencia (6).

$$G(s)_{\text{planta}} = \frac{70.94s^2 + 1.137e - 13s + 7253}{s^3 + 10.08s^2 + 40.61s + 25.54}. \quad (6)$$

Con la finalidad de corroborar que la función de transferencia es correcta, se compara su respuesta a una entrada escalón unitaria con la respuesta del sistema no lineal a la misma entrada, como se muestra en la Figura 3.

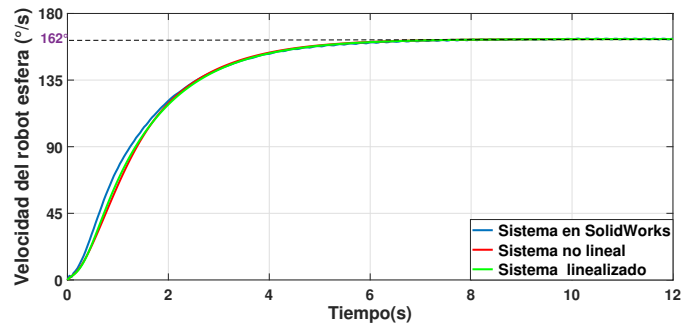


Figura 3: Comparación de respuestas de velocidad del robot ante una entrada escalón.

La Figura 3 demuestra que el sistema ciertamente es sobreamortiguado, debido al comportamiento que presenta su respuesta.

3.2. Controlador por Lugar Geométrico de las Raíces

Para el diseño del controlador es necesario evaluar la función de transferencia de velocidad en lazo abierto (LA) ante una entrada escalón unitario y una entrada rampa. Esto es posible si eventualmente se ajusta la ganancia para que la salida sea unitaria. La respuesta ante la entrada escalón unitario es mostrada en la Figura 4, mientras que la respuesta ante una entrada rampa es presentada en la Figura 5.

Tabla 1: Masas e Inercias de los elementos.

Elemento	Masa(kg)	$I_{cm} / I_Y(kg \cdot m^2)$	R	$L_r(m)$
Carcasa	1.13654	0.0190377	0.32	-
Disco soporte	0.27745	3.39663632e-3	0.142	-
Disco transmisión	0.00145	1.9872e-7 / 1.0045e-7	0.015	-
Péndulo	0.12399	1.1161717e-4	-	0.0944

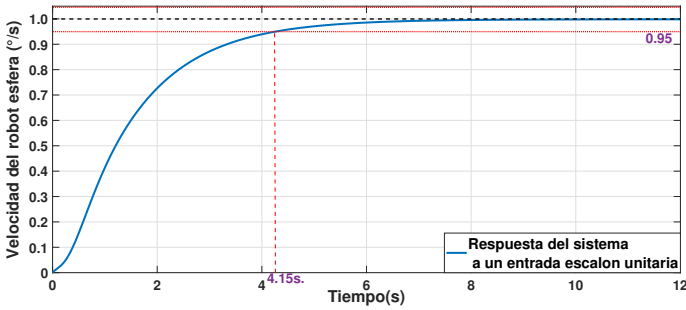


Figura 4: Tiempo de asentamiento en la respuesta de velocidad usando el criterio del 5%.

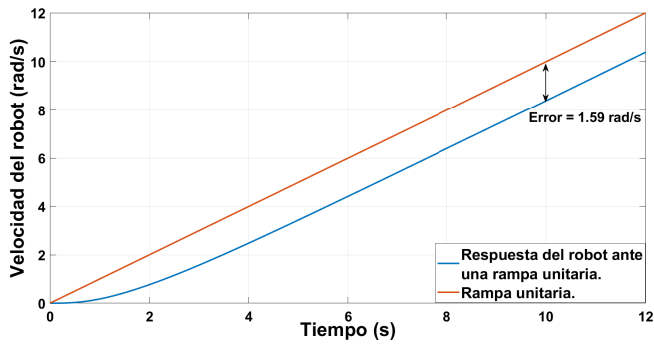


Figura 5: Comparación de respuestas de velocidad del robot ante una entrada rampa unitaria.

Es de importancia mencionar que el tiempo de asentamiento de la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario, usando el criterio del 5% es de 4.15s. Mientras que la respuesta ante una entrada rampa unitaria presenta un error de 1.59rad/s, debido a esto último, se propone el uso de un integrador en el controlador. Para conocer a mayor detalle el sistema se observa la ubicación de todos los polos y ceros del sistema en LA. La Figura 6 muestra que en el lugar geométrico de las raíces se encuentran 2 polos conjugados localizados en $S_{1,2} = -4.66 \pm 3.43i$, un polo en $S_3 = -0.762$ y un par de ceros conjugados en $S_{4,5} = -8.01e - 16 \pm 10.1i$. Mediante los polos conjugados es posible determinar la frecuencia y el factor de amortiguamiento, cuyos valores respectivamente son 5.78rad/s y 0.805. Dichos valores calculados hacen cierta la hipótesis de que el sistema tiene más amortiguamiento de lo requerido. Además, es importante mencionar que existe una región en el LGR en la que el sistema es inestable a determinada ganancia, a pesar de que no se ha cerrado el lazo del sistema. Los argumentos anteriores sugieren que el controlador a diseñar disminuya el amortiguamiento proponiendo $\zeta = 0.3$ y la frecuencia sea aumentada a $\omega_n = 6rad/s$, en caso de que el sistema sea todavía lento, será necesario aumentar la frecuencia.

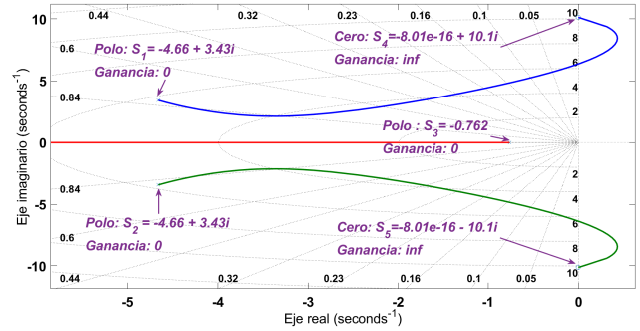


Figura 6: LGR en LA del sistema.

El diseño del controlador exige cerrar el lazo para así comprender el comportamiento del sistema en retroalimentación, dicho comportamiento es mostrado en la Figura 7, en donde se observa que el sistema se vuelve totalmente inestable sin importar la variación de ganancia puesto que hay un par de polos conjugados en $S_{1,2} = 0.298 \pm 9.44i$, es decir, se encuentran en el semiplano derecho del plano complejo. Pero además de ese par de polos conjugados, existen tanto un polo restante y el par de ceros conjugados que se encuentran en el semiplano izquierdo con las siguientes ubicaciones $S_3 = -81.6$ y $S_{4,5} = -8.01e - 16 \pm 10.1i$, respectivamente.

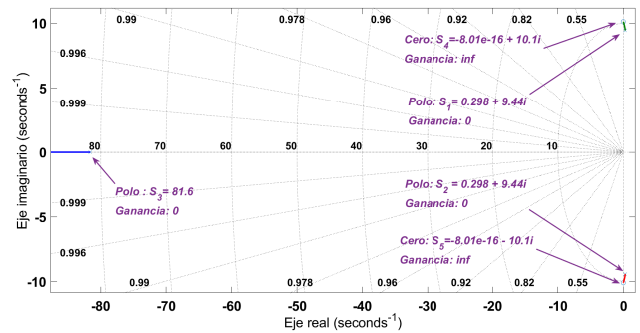


Figura 7: LGR en LC del sistema.

Un hallazgo importante entre la similitud de los LGRs de LA y LC es que los polos conjugados de LA se mueven hacia la derecha del plano complejo al cerrar el lazo. De modo que, estos son los causantes de la inestabilidad. Siendo esto así, es necesario moverlos al semi-plano complejo izquierdo al cerrar el lazo. El controlador a diseñar es un **compensador de adelanto**, para esto se obtiene el polinomio característico, el cual está dado por $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 3.6s + 36$, obteniendo entonces, los polos dominantes deseados en $S_{d1,2} = \zeta\omega_n \pm \sqrt{1 - \zeta^2}i = -1.8 \pm 5.7236i$. Una vez determinados los polos dominantes de-

seados, entonces se continua con el cálculo de la deficiencia de ángulo por parte de la planta hacia el par de polos dominantes, ya que los demás polos y ceros deben generar en sumatoria un ángulo de 180° , en caso de no generar dicho ángulo, se estima el ángulo faltante y ese debe ser el ángulo que el compensador deberá generar respecto a los polos conjugados deseado: el cual se puede calcular mediante la expresión.

$$\begin{aligned} Ang_{Comp} &= 180^\circ + Ang_{Ceros \text{ en } S_d} - Ang_{Polos \text{ en } S_d} \\ &= 180^\circ - 15.81^\circ - (-148.39^\circ) = 180^\circ - 132.58^\circ \\ &= 47.42^\circ. \end{aligned} \tag{7}$$

El ángulo a compensar es de 47.42° , como se puede observar el ángulo no excede 50° por lo que se puede usar un solo compensador de adelanto. Es de importancia mencionar que debido a que el ángulo a compensar es positivo, es necesario que el cero esté más cercano al eje imaginario que el polo de dicho compensador. Para encontrar el polo y el cero del compensador es necesario utilizar el método geométrico de la bisectriz, tal y como se muestra en la Figura 8.

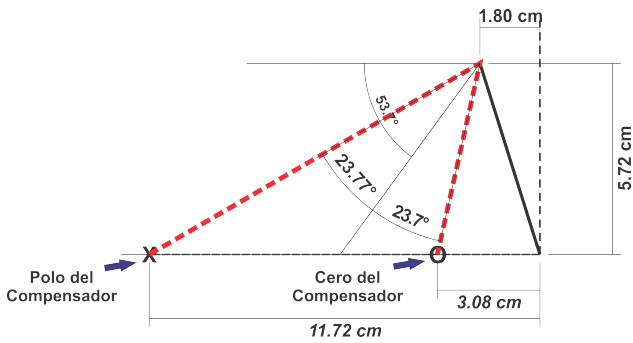


Figura 8: Diagrama de bisectriz.

El diagrama de la Figura 8 muestra que el valor del cero es 3.08 y el del polo es 11.72, entonces la función de transferencia del compensador queda descrita por la ecuación (8).

$$G(s)_{comp} = \frac{s + 3.79}{s + 11.721}. \tag{8}$$

El compensador estimado por sí solo, no puede ser agregado en cascada con la función de transferencia de la planta, puesto que la ganancia total del sistema debe ser unitaria para producir los polos dominantes deseados en la planta, es decir, se debe cumplir la condición de magnitud de 1. De esta forma, el compensador con la planta quedan expresados por la ecuación (9). Para estimar la ganancia K necesaria del compensador, la ecuación (9) debe ser igualada a un valor de -1 en valor absoluto, ya que la finalidad de alcanzar previamente el ángulo de 180° es absorber el valor negativo.

$$\begin{aligned} G(s)_T &= K * G(s)_{planta} * G(s)_{comp} \\ &= \frac{70.94s^2 + 1.137e - 13s + 7253}{s^3 + 10.08s^2 + 40.61s + 25.54} * K \frac{(s + 3.08)}{s + 11.721}. \end{aligned} \tag{9}$$

Por lo que la ganancia necesaria del compensador es $K = |0.07435|$. Al sustituir este valor de ganancia en la ecuación (9) y calcular nuevamente el LGR en LC se obtiene como resultado

la Figura 9, la cual muestra que el sistema ya es estable, puesto que independientemente de la ganancia los polos dominantes del sistema permanecen en el semi-plano izquierdo.

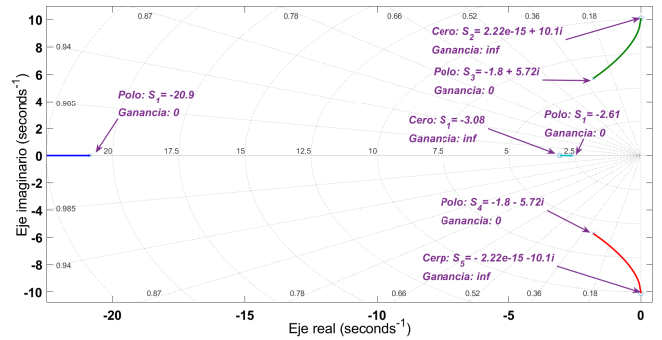


Figura 9: LGR en LC del sistema compensado.

El resultado anterior muestra que es posible observar la respuesta del sistema en LC, para ello se propone que la velocidad de llegada o referencia sea de $45^\circ/s$ y que a su vez será comparada con la respuesta del sistema en lazo abierto. Una forma esquemática de mostrar lo que se realizará se ejemplifica en el diagrama mostrado en la Figura 10.

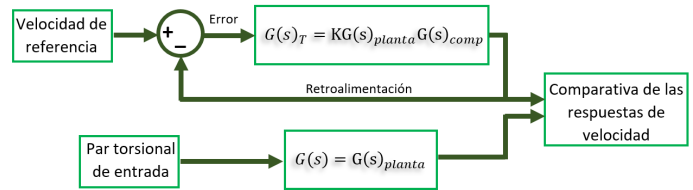


Figura 10: Diagrama a bloques de las comparativas de respuestas en LA y LC controlado.

Al simular el diagrama de bloques en Matlab-Simulink de la Figura 10, se obtienen las respuestas ilustradas por la Figura 11, en donde es posible observar que el sistema se estabiliza de manera rápida pero no llega a la referencia. Es de importancia mencionar que la Figura 5, es la respuesta a este inconveniente ya que el sistema al ser tipo cero presenta error ante una entrada rampa, por lo que es necesario agregar otro compensador en cascada que agregue un integrador para que el sistema sea tipo 1 y logre eliminar este error. Ahora bien, puesto que se requiere de un integrador, el compensador calculado queda descartado y se propone agregar un compensador en camino directo a la función de transferencia de la planta $G(s)_{planta}$, dicha función en cascada es denotada por la ecuación (10), en donde el compensador debe contar con un integrador para reducir a cero el error en estado estacionario, y además, sea capaz de cancelar al polo $S_3 = -0.762$ ubicado en el mapa de polos y ceros de lazo abierto (ver Figura 6).

$$\begin{aligned} G(s)_2 &= G(s)_{planta} * G(s)_{Compensador_1} \\ &= 0.07435 \left[\frac{70.94s^2 + 1.137e - 13s + 7253}{s^3 + 10.08s^2 + 40.61s + 25.54} \right] \underbrace{\frac{(s + 0.762)}{s}}_{Comp \ 1}. \end{aligned} \tag{10}$$

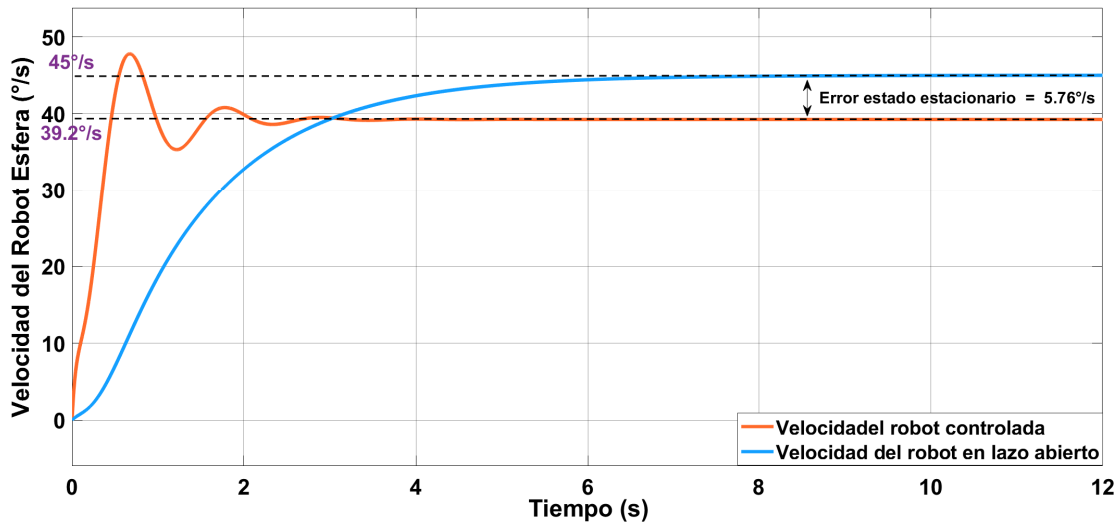


Figura 11: Comparativas de respuestas del sistema en LA y LC compensado.

Dado que se tienen requerimientos adicionales, se plantea un nuevo controlador que además de subsanar las modificaciones, agrega los requerimientos de comportamiento de la planta real. El nuevo compensador de adelanto (compensador 2) se calcula de manera similar al anterior, en donde el ángulo a compensar por dicho controlador está dado por la ecuación (11).

$$\begin{aligned}
 \text{Ang}_{Comp_2} &= 180 + [\text{Ang}_{Ceros} - \text{Ang}_{Polos}]_{Planta} \\
 &+ [\text{Ang}_{Cero} - \text{Ang}_{Polo}]_{Compensador\ 1} \\
 &= \pm 180^\circ + 344.1355^\circ - 211.4469^\circ \\
 &+ 100.28^\circ - 107.573007^\circ = 54.60414^\circ.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Puesto que ya se conoce el ángulo de deficiencia, es posible aplicar nuevamente el método geométrico de la bisectriz para encontrar el polo y el cero del compensador, tal y como se muestra en la Figura 12.

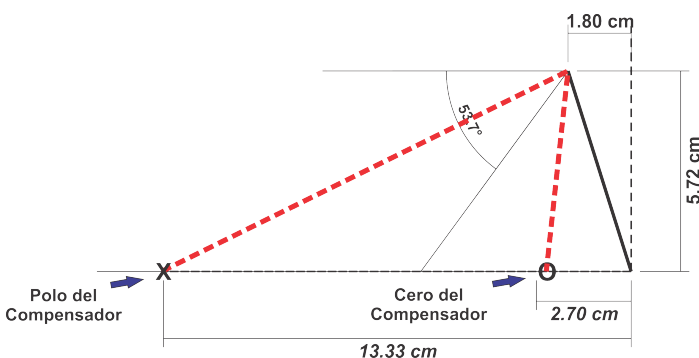


Figura 12: Diagrama de bisectriz.

Ahora bien, al cumplir la condición de ángulo, es necesario encontrar la ganancia necesaria que posibilite cumplir la condición de magnitud, dicho requerimiento es calculado por la

ecuación (12).

$$\left[KG(s)PlantaG(s)_{comp_1}G(s)_{comp_2} \right]_{s=-1.8 \pm 5.723i} = -1,$$

$$\left[\frac{70.94s^2 + 1.137e - 13s + 7253}{s^3 + 10.08s^2 + 40.61s + 25.54} \frac{s + 0.7621}{s} \right] \left[\frac{K(s + 2.7)}{s + 13.33} \right] = -1,$$

$$K = |0.0873|.
 \tag{12}$$

Una vez calculada la ganancia requerida, es posible reconstruir el diagrama a bloques añadiendo el compensador 2. Además, se agregan ambos compensadores al sistema de ecuaciones no lineales, dicho diagrama a bloques es mostrado en la Figura 13.

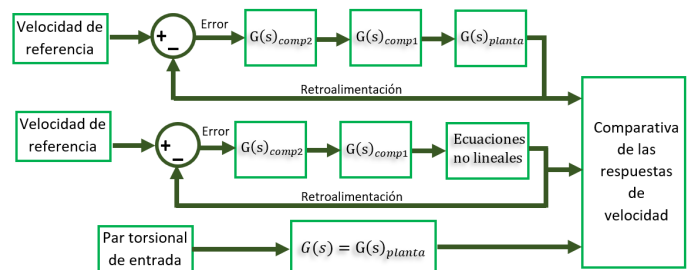


Figura 13: Diagrama a bloques de simulación de los sistemas.

Al simular los diagramas a bloques, se obtienen las respuestas de velocidad mostradas en la Figura 14, las cuales son del sistema no controlado, controlado tanto en función de transferencia y ecuaciones no lineales. La Figura 14 muestra los tiempos de asentamientos de la respuesta de velocidad considerando el criterio del 5% de error, por lo que, se considera que las respuestas son estables en 4.156s, 1.38s y 1.58s respectivamente. Mientras que el gráfico de la magnitud del par torsional requerida en el actuador para ejecutar el algoritmo de control es mostrado en la Figura 15.

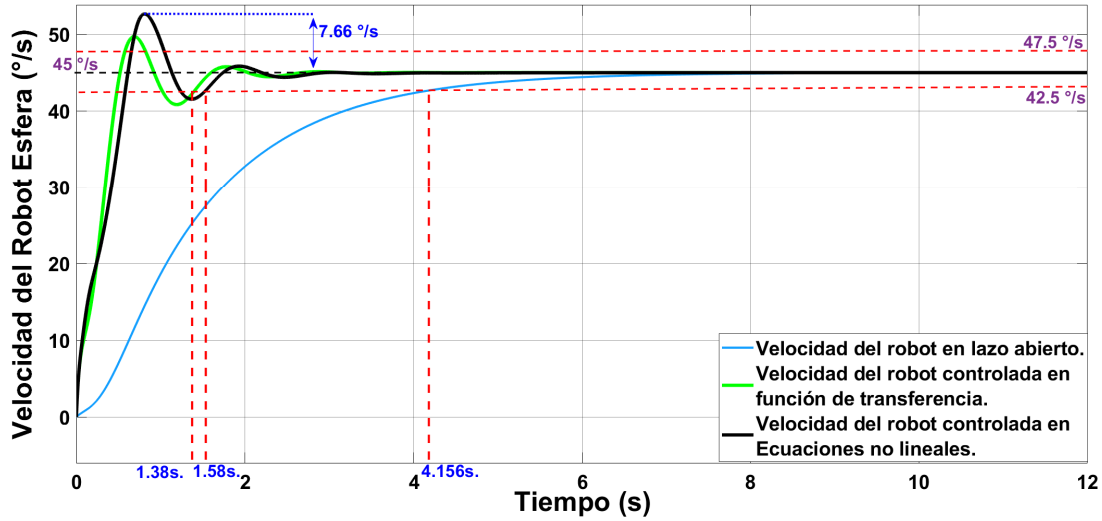


Figura 14: Respuestas de velocidad del sistema en LA y LC compensado con integrador.

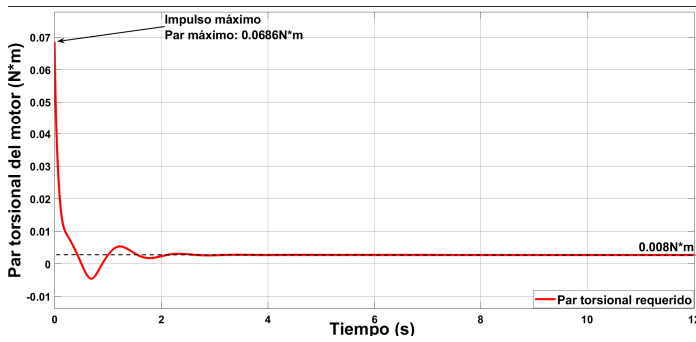


Figura 15: Par torsional requerido por el controlador.

4. Resultados y discusión

Las gráficas de respuesta de velocidad obtenidas en las simulaciones muestran que el controlador funciona de manera óptima, puesto que disminuye el tiempo de llegada y asentamiento de la repuesta. La reducción de dicho tiempo es cuantificada por el cálculo del porcentaje de la disminución del tiempo de asentamiento tanto en la función de transferencia como en las ecuaciones no lineales (ecuaciones (13) y (14)).

$$\% \Delta T_{\text{tiempo en T.F}} = \left(\frac{1.38 - 4.156}{4.156} \right) * 100 \% = -66.8 \%, \quad (13)$$

$$\% \Delta T_{\text{tiempo en EC.N.L}} = \left(\frac{1.58 - 4.156}{4.156} \right) * 100 \% = -61.98 \%. \quad (14)$$

Es importante notar que la reducción del tiempo es similar en ambos sistemas, puesto que tienen una discrepancia del 5 %, por lo que, el controlador mejoró el tiempo de asentamiento disminuyéndolo más del 50 %. El par torsional máximo que demanda el controlador para obtener la respuesta deseada del sistema tiene una magnitud en el transitorio de $0.0686 N \cdot m$, mientras que en estado estacionario la magnitud es de $0.008 N \cdot m$, estos requerimientos de par los debe cumplir el actuador a utilizar. Algunas opciones disponibles en el mercado son por ejemplo los Micro Metal Gearmotors Pololu, con una reducción de

250:1 cuyo par torsional es 5 veces mayor al par torsional máximo requerido en el sobreimpulso, evitando así un desgaste prematuro del dispositivo.

5. Conclusiones

El controlador diseñado es eficiente para el sistema lineal y no lineal, puesto que ambos sistemas logran alcanzar la velocidad deseada en un menor tiempo comparado con el sistema en lazo abierto. Esto es, cumpliendo una reducción del 61.9 % en tiempo de llegada a la velocidad de referencia comparado con el tiempo de llegada del sistema en lazo abierto. Por lo tanto, se puede concluir que el controlador es apto para aplicarse al sistema real teniendo en cuenta la posibilidad de requerimiento de ajuste en las masas e inercias, así como también en la ganancia del controlador. Además, el par torsional requerido para implementar el controlador desarrollado, se puede obtener con actuadores comerciales que son compatibles con las características físicas del robot diseñado.

Referencias

Azizi, M. R. and Keighobadi, J. (2016). Robust sliding mode trajectory tracking controller for a nonholonomic spherical mobile robot. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):4541–4546.

Bujnák, M., Pirmík, R., Rástočný, K., Janota, A., Nemeč, D., Kuchár, P., Tichý, T., and Lukasič, Z. (2022). Spherical robots for special purposes: A review on current possibilities. *Sensors*, 22(4):1413.

Chase, R. and Pandya, A. (2012). A review of active mechanical driving principles of spherical robots. *Robotics*, 1(1):3–23.

Chen, J., Ye, P., Sun, H., and Jia, Q. (2016). Design and motion control of a spherical robot with control moment gyroscope. In Fei, X., Wang, L., Ji, C., Sun, Q., Chen, N., Song, X., and Wang, X., editors, *3rd International Conference on Systems and Informatics, ICSAI 2016, Shanghai, China, November 19-21, 2016*, pages 114–120. IEEE.

Firlej, S. (2015). Design, construction and control of a spherical rolling robot with internal two-wheel cart. *Automatyka/Automatics*, 19(2):63.

Herrera-Cordero, M. and Arias-Montiel, M. (2023). Obtención y linealización del modelado dinámico de un robot esfera con movimiento omnidireccional en el plano. In Reyes-Mora, S., Vázquez-Hipólito, V., and Barragán-Mendoza, F., editors, *Modelación Matemática V: Ingeniería, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales, Capítulo 3*, pages 39–54. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Oaxaca, Mexico.

- Huang, S.-J. and Huang, C.-L. (2000). Control of an inverted pendulum using grey prediction model. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 36(2):452–458.
- Kayacan, E., Kayacan, E., Ramon, H., and Saeys, W. (2012). Velocity control of a spherical rolling robot using a grey-pid type fuzzy controller with an adaptive step size. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(22):863–868.
- LI, W. and ZHAN, Q. (2018). Kinematics-based four-state trajectory tracking control of a spherical mobile robot driven by a 2-dof pendulum. *Chinese Journal of Aeronautics*, 32(6):1530–1540.
- Manriquez-Silva, I. F., Escalera-Sierra, D., Maya-Gress, K. F., and Villafuerte-Segura, R. (2023). Plataforma subactuada para la enseñanza-aprendizaje de la teoría de control. *Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, 11:157–170.
- Moazami, S., Zargarzadeh, H., and Palanki, S. (2019). Kinematics of spherical robots rolling over 3d terrains. *Complexity*, 2019:14. Id/No 7543969.
- Risma, T. D. P., Oktarina, Y., Prasetyani, L., and Mulya, Z. (2019). The kinematics and dynamics motion analysis of a spherical robot. *Proceeding of the Electrical Engineering Computer Science and Informatics*, 6(0):101–105.