



Análisis cinemático de un robot paralelo 6-UPUR mediante teoría de tornillos Kinematic analysis of a 6-UPUR parallel robot by screw theory

H. J. Cortés-Ruiz ^a, M. Arias-Montiel ^{a,*}

^aInstituto de Electrónica y Mecatrónica, Universidad Tecnológica de la Mixteca, 69000, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

Resumen

Este trabajo presenta el análisis cinemático de posición y de velocidad para un robot paralelo UPUR de seis grados de libertad. La cinemática de posición directa e inversa se obtiene a partir de las ecuaciones vectoriales de cerradura las cuales se resuelven usando métodos numéricos. Las ecuaciones que relacionan las velocidades de los actuadores con las velocidades de la plataforma móvil son obtenidas usando la teoría de tornillos, lo que permite omitir del análisis las velocidades de las juntas pasivas. La validez de las ecuaciones obtenidas se verifica mediante la comparación de los resultados numéricos con simulaciones del mecanismo realizadas en SolidWorks.

Palabras Clave: Robot paralelo, teoría de tornillos, análisis cinemático.

Abstract

This work presents the kinematic analysis of position and velocity for a six degrees of freedom UPUR parallel robot. Forward and inverse kinematics are obtained from closure vectorial equations which are solved by numerical methods. Equations relating actuators velocities with mobile platform velocities are obtained by using screw theory, which allows skip the passive joints velocity from kinematic analysis. Validity of obtained equations is verified by comparing the numerical results with mechanism simulation carried out in SolidWorks.

Keywords: Parallel robot, screw theory, kinematic analysis.

1. Introducción

Los robots paralelos también conocidos como *manipuladores paralelos* son robots que controlan el movimiento de su efector final mediante al menos dos cadenas cinemáticas que conectan dicho efector final con la base fija del manipulador. Debido a su arquitectura cinemática cerrada presentan varias ventajas con respecto a los robots seriales, por ejemplo: alta rigidez estructural, mayor precisión en el posicionamiento del efector final y mejor relación peso-capacidad de carga. Sin embargo, una de las principales desventajas de los robots paralelos con respecto a sus contrapartes seriales es la dificultad para realizar el análisis cinemático debido a la gran diversidad de configuraciones que se pueden obtener en cada extremidad del robot y a la falta de una metodología bien establecida para obtener las ecuaciones de velocidad y de aceleración (Taghirad (2013)).

En los últimos años, la teoría de tornillos (*screw theory*) ha demostrado ser una útil herramienta en el análisis de velocidad y aceleración (incluso del pulso, derivada de la aceleración)

de manipuladores con estructura paralela (Gallardo-Alvarado (2016); C. D. Crane III y Duffy (2022)). Básicamente se refiere a que la configuración o pose (posición y orientación) de un cuerpo rígido se puede establecer a partir de una rotación alrededor del que se denomina eje de tornillo y un desplazamiento sobre el mismo. Un tornillo puede entenderse como un par de vectores concatenados con una parte primaria y una parte dual. La parte primaria consiste de un vector unitario a lo largo del eje de giro del tornillo, asociado a la velocidad angular del cuerpo; la parte dual consiste de un segundo vector que representa el momento producido por la parte primaria alrededor de un punto de referencia fijo (polo de referencia), se puede asociar al componente de velocidad lineal de un cuerpo (Gallardo-Alvarado (2016)).

Gallardo-Alvarado y Garcia-Murillo (2017) presentan el análisis cinemático de un robot paralelo generador del movimiento de Schonflies de topología 4-PRUR. Las ecuaciones de entrada-salida de velocidad y de aceleración del robot se obtienen mediante el uso de la teoría de tornillos recíprocos. Los mo-

*Autor para correspondencia: mam@mixteco.utm.mx

Correo electrónico: hugo.cortes.ps2@gmail.com (Hugo Javier Cortés-Ruiz), mam@mixteco.utm.mx (Manuel Arias-Montiel).

Historial del manuscrito: recibido el 18/12/2023, última versión-revisada recibida el 04/03/2024, aceptado el 08/03/2024, publicado el 22/04/2024. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial2.12287>



delos cinemáticos obtenidos son validados mediante un ejemplo numérico. Abedinnasab *et al.* (2017) usan la teoría de tornillos para obtener la matriz Jacobiana de un mecanismo paralelo UPS de seis grados de libertad (GDL) y realizar un análisis de singularidades. En (Gallardo-Alvarado *et al.* (2022)), los autores realizan el análisis Jacobiano de un manipulador paralelo de 6 GDL con cuatro extremidades mediante la teoría de tornillos. La matriz Jacobiana obtenida es usada para llevar a cabo un análisis de singularidades mediante simulaciones numéricas. Flores-Salazar *et al.* (2019) proponen la teoría de tornillos para realizar el análisis cinemático de un rehabilitador de tobillo basado en un mecanismo paralelo configurable 2-PUS+RR debido a la simplicidad con la que se pueden cancelar las velocidades y aceleraciones de las juntas pasivas de forma sistemática. Gallardo-Alvarado (2020) introduce un nuevo manipulador paralelo con plataforma móvil configurable inspirado en la plataforma de Gough-Stewart. El análisis cinemático del manipulador es realizado mediante la teoría de tornillos. Se presenta un análisis numérico mediante una simulación en ADAMS para validar las ecuaciones de velocidad y de aceleración obtenidas. El uso de la teoría de tornillos se ha extendido incluso al análisis de manipuladores paralelos operados por cables. Zhao *et al.* (2017) presentan una plataforma paralela operada por cables para emular el funcionamiento del cuello humano. Se usa la teoría de tornillos para realizar un análisis de rigidez del mecanismo y optimizar sus características dinámicas. Cui *et al.* (2019) usan la teoría de tornillos para realizar el análisis del desempeño cinemático de un manipulador paralelo redundante accionado por cables. El análisis realizado incluye el espacio de trabajo, la destreza cinemática y el índice de rigidez tanto para la cinemática directa como inversa. Los resultados son verificados mediante simulaciones numéricas.

Como puede apreciarse, la teoría de tornillos se ha convertido en una importante herramienta para el análisis cinemático y dinámico de diferentes tipos de manipuladores paralelos. En este trabajo se presenta el análisis cinemático de posición y de velocidad de un robot paralelo de 6 GDL con configuración 6-UPUR cuyo diseño fue propuesto por Cortés-Ruiz (2019). Las ecuaciones que relacionan las velocidades de los actuadores con las velocidades lineales y angulares de la plataforma móvil se obtienen mediante la teoría de tornillos. Haciendo uso del concepto de tornillo recíproco, es posible eliminar del análisis las velocidades de las juntas pasivas del robot. Los resultados analíticos obtenidos son validados mediante su comparación con simulaciones realizadas en SolidWorks.

2. Descripción del robot paralelo

El robot considerado en este trabajo tiene una arquitectura 6-UPUR, lo que significa que posee 6 extremidades idénticas, cada una formada por una junta universal seguida de una prismática, otra junta universal y al final, una de revoluta. La letra subrayada indica que la junta actuada es la prismática. Las extremidades unen la base fija del robot con la plataforma móvil (elemento de salida) la cual posee 6 GDL, como se aprecia en la Figura 1. Esta configuración corresponde a una variante la plataforma de Gough, con la diferencia de que la junta esférica del diseño original que une cada extremidad con la plataforma

móvil, se reemplaza por una combinación de juntas universales y de revoluta.

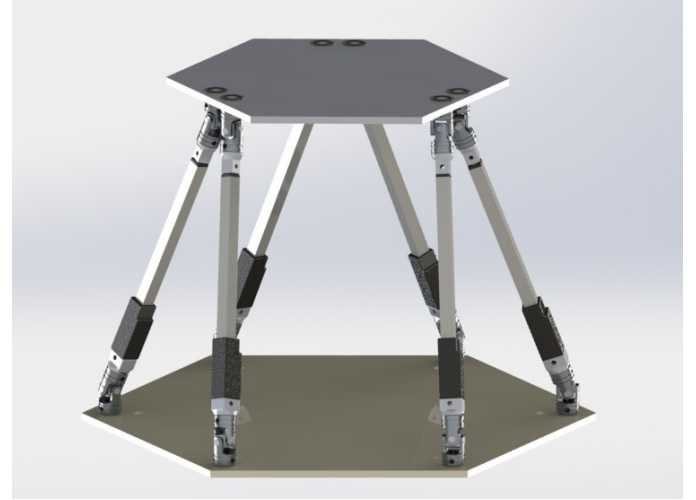


Figura 1: Configuración cinemática de las extremidades del robot paralelo 6-UPUR.

Para obtener los GDL del robot, se usa la ecuación de Chebyshev-Kutzbach-Grübler (Taghirad (2013)), considerando los elementos del grafo de la Figura 2 donde los números arábigos indican los eslabones y los números romanos, las juntas del mecanismo. La ecuación de Chebyshev-Kutzbach-Grübler está dada por

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i - f_p, \quad (1)$$

donde:

- F = grados de libertad del mecanismo.
- n = número de eslabones en el mecanismo.
- j = juntas en el mecanismo.
- λ = grados de libertad del espacio de trabajo.
- f_i = número de grados de libertad permitidos por la junta i -ésima.
- f_p = número de grados de libertad pasivos.

Dado que se tienen 20 eslabones y 24 juntas de las cuales 12 son universales (con 2 GDL), 6 prismáticas (con 1 GDL) y 6 de revoluta (con 1 GDL), la ecuación (1) se evalúa de la siguiente manera

$$F = 6(20 - 24 - 1) + 12(2) + 12(1) = 6, \quad (2)$$

con lo que se obtiene que el robot cuenta con 6 GDL.

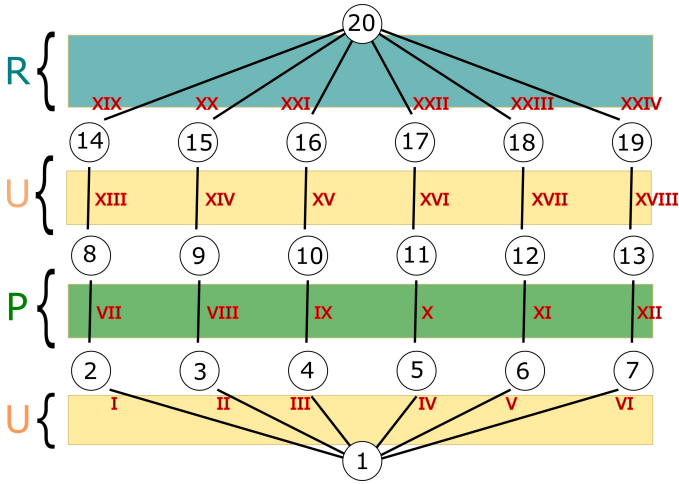


Figura 2: Grafo asociado a la configuración cinemática del robot 6-UPUR.

3. Análisis de posición

3.1. Análisis cinemático directo

Este análisis consiste en encontrar la posición y la orientación de la plataforma móvil (pose del robot) conociendo las variables de entrada que corresponden a las longitudes de las extremidades. Para encontrar las ecuaciones de restricción, se analizará una extremidad con la notación mostrada en la Figura 3, dado que las seis extremidades del robot presentan la misma configuración cinemática, la ecuación obtenida se puede generalizar para cada una de las extremidades.

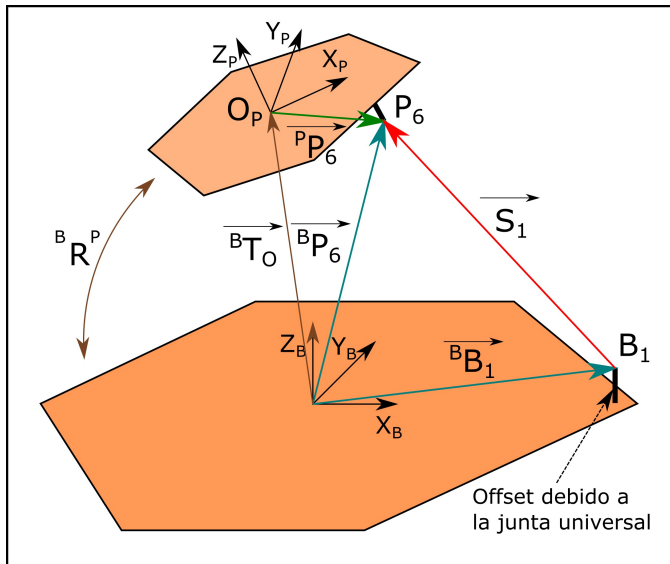


Figura 3: Vectores usados para la obtención de las ecuaciones de restricción.

De la Figura 3 se obtiene la siguiente ecuación de restricción (de cerradura de lazo vectorial)

$${}^B\vec{P}_6 - {}^B\vec{B}_1 - \vec{S}_1 = 0. \quad (3)$$

El vector ${}^B\vec{P}_6$ se puede obtener con la suma de los vectores ${}^B\vec{T}_o$ y ${}^P\vec{P}_6$ usando la matriz de rotación correspondiente para que éste último vector quede referenciado al marco de la base fija.

$${}^B\vec{P}_6 = {}^B\vec{T}_o + {}^B R^{PP} \vec{P}_6. \quad (4)$$

Sustituyendo la ecuación (4) en (3) se obtiene la ecuación de restricción (5) expresada en términos de las variables que se asumen conocidas: la longitud de la extremidad S_1 y los puntos ${}^P P_6$ y ${}^B B_1$ y de las variables a determinar: el vector ${}^B T_o$ y la matriz de rotación ${}^B R^P$ que definen la posición y la orientación de la plataforma móvil con respecto a la base fija, respectivamente.

$${}^B\vec{T}_o + {}^B R^{PP} \vec{P}_6 - {}^B\vec{B}_1 - \vec{S}_1 = 0. \quad (5)$$

La ecuación (5) se puede generalizar para obtener la ecuación general de cerradura para todas las extremidades del robot, la cual está dada por

$${}^B\vec{T}_o + {}^B R^{PP} \vec{P}_i - {}^B\vec{B}_i - \vec{S}_i = 0, \quad (6)$$

donde:

- \vec{P}_i : Es el punto de conexión i-ésimo en la plataforma móvil atado a la extremidad i-ésima.
- \vec{B}_i : Es el punto de conexión i-ésimo en la base fija atado a la extremidad i-ésima.
- \vec{S}_i : Es el vector a lo largo de la extremidad i-ésima.

Las variables a encontrar son las tres componentes de ${}^BT_O = [{}^BT_{Ox}, {}^BT_{Oy}, {}^BT_{Oz}]^T$ y los ángulos de Euler $w - u - w$: α, β y γ (Taghirad (2013)) de la matriz de rotación ${}^BR^P$.

La ecuación (6) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \vec{S}_i = & \underbrace{\begin{bmatrix} {}^B T_{O_X} \\ {}^B T_{O_Y} \\ {}^B T_{O_Z} \end{bmatrix}}_{{}^B T_O} - \underbrace{\begin{bmatrix} {}^B B_{i_X} \\ {}^B B_{i_Y} \\ {}^B B_{i_Z} \end{bmatrix}}_{{}^B B_i} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} c\alpha\gamma - s\alpha\beta s\gamma & -c\alpha\gamma - s\alpha\beta c\gamma & s\alpha s\beta \\ s\alpha\beta + c\alpha\beta s\gamma & -s\alpha\gamma + c\alpha\beta c\gamma & -c\alpha s\beta \\ s\beta s\gamma & s\beta c\gamma & c\beta \end{bmatrix}}_{{}^B R^P} \\ & * \underbrace{\begin{bmatrix} {}^P P_{i_X} \\ {}^P P_{i_Y} \\ {}^P P_{i_Z} \end{bmatrix}}_{{}^P P_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde c representa el coseno y s el seno del ángulo correspondiente.

Desarrollando la ecuación (7) se obtiene que

$$S_{ix} = {}^B T_{Ox} + (cac\gamma - sac\beta s\gamma)^P P_{ix} - (cas\gamma + sac\beta c\gamma)^P P_{iy} + (sas\beta)^P P_{iz} - {}^B B_{ix}, \quad (8)$$

$$S_{iy} = {}^B T_{Oy} + (s\alpha c\beta + c\alpha c\beta s\gamma)^P P_{ix} - (s\alpha s\gamma - c\alpha c\beta c\gamma)^P P_{iy} - (c\alpha s\beta)^P P_{iz} - {}^B B_{iy}, \quad (9)$$

$$S_{iz} = {}^B T_{Oz} + (s\beta s\gamma)^P P_{ix} + (s\beta c\gamma)^P P_{iy} + c\beta^P P_{iz} - {}^B B_{iz}. \quad (10)$$

Se asume que se conoce solamente la magnitud del vector \vec{S}_i , la cual está dada por

$$|\vec{S}_i| = \sqrt{S_{ix} \cdot S_{ix} + S_{iy} \cdot S_{iy} + S_{iz} \cdot S_{iz}}. \quad (11)$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\sqrt{(S_{ix} \cdot S_{ix}) + (S_{iy} \cdot S_{iy}) + (S_{iz} \cdot S_{iz})} - |\vec{S}_i| = 0, \quad (12)$$

donde los términos S_{ix} , S_{iy} y S_{iz} son los mostrados en las ecuaciones (8), (9) y (10) respectivamente.

La ecuación (12) representa un sistema de seis ecuaciones no lineales con seis incógnitas, el cuál es resuelto numéricamente con la función *fsolve* de MATLAB.

3.2. Análisis cinemático inverso

Para el análisis cinemático inverso, el problema radica en encontrar las longitudes de las extremidades siendo conocidas la posición (${}^B T_O$) y la orientación de la plataforma móvil (${}^B R^P$).

Se parte de la ecuación de cerradura (6) de la cual se puede despejar directamente el vector \vec{S}_i :

$$\vec{S}_i = {}^B \vec{T}_O + {}^B R^P \vec{P}_i - {}^B \vec{B}_i. \quad (13)$$

Sin embargo, el valor útil para el presente caso es la magnitud del vector \vec{S}_i que está definida por la ecuación (11) por lo que se obtiene:

$$|\vec{S}_i| = \sqrt{(S_{ix} \cdot S_{ix}) + (S_{iy} \cdot S_{iy}) + (S_{iz} \cdot S_{iz})}, \quad (14)$$

donde los términos S_{ix} , S_{iy} y S_{iz} son los mostrados en las ecuaciones (8), (9) y (10) respectivamente.

4. Análisis de Velocidad

Para realizar el análisis cinemático de velocidad, las ecuaciones de cerradura (6) tienen que ser diferenciadas con respecto al tiempo. En la literatura consultada se ha reportado que este procedimiento conlleva a una serie de dificultades para obtener una representación de entrada-salida, principalmente debido a las variables relacionadas con las juntas pasivas y a la complicada manipulación algebraica de las ecuaciones resultantes (Taghi-rad (2013)). La teoría de tornillos representa una metodología alternativa para superar las dificultades mencionadas (Gallardo-Alvarado (2016)).

Para llevar a cabo el análisis cinemático de velocidad del robot es necesario definir tornillos para cada una de las juntas que componen el mecanismo, por tanto, de la configuración establecida para el robot 6-UPUR, se definen seis tornillos para cada una de las extremidades, dos para cada junta universal, los cuales serán coplanares y normales entre sí, un tornillo más para la junta prismática, en dirección del actuador lineal (dicho tornillo será el de más importancia pues está relacionado directamente con la entrada de movimiento) y finalmente uno más para la junta revoluta en la plataforma móvil justo después de la universal (ver Figura 4).

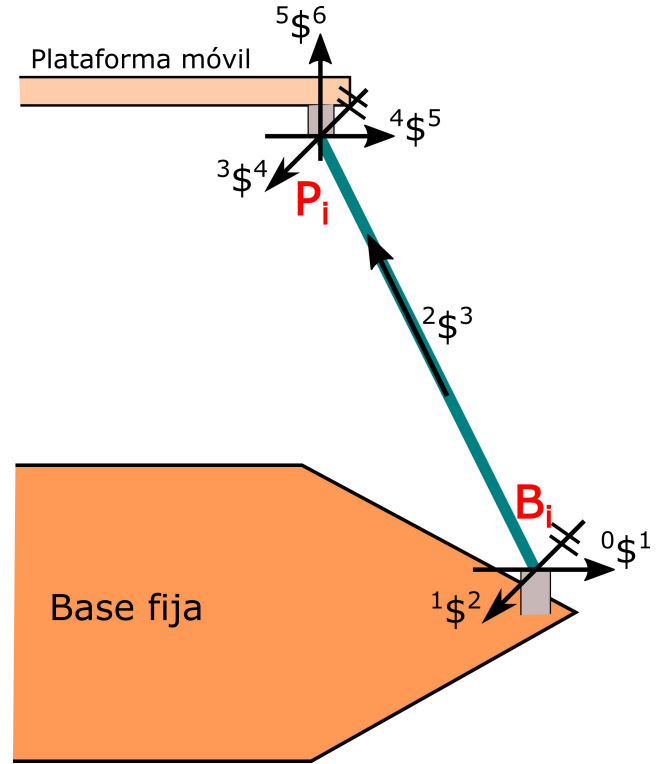


Figura 4: Tornillos definidos para cada extremidad.

Las partes primaria y dual de cada tornillo, se definen de acuerdo al tipo de junta siguiendo lo establecido por Gallardo-Alvarado (2016). De la Figura 5, se observa que el primer tornillo se define de manera radial variando su dirección de acuerdo al ángulo θ , por lo que el momento alrededor de cada uno de los ejes es igual a cero, y la expresión matemática que describe a los tornillos en la parte más baja de cada una de las extremidades es:

$${}^0 s_i^1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta \cdot (i-1)) \\ \sin(\theta \cdot (i-1)) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$${}^0 \mathcal{S}_i^1 = \begin{bmatrix} {}^0 s_i^1 \\ {}^0 s_i^1 \times -B_i \end{bmatrix}.$$

A continuación, se define el tornillo en la dirección del actuador denominado ${}^2 \mathcal{S}_i^3$ como

$${}^2 s_i^3 = \frac{P_i - B_i}{|P_i - B_i|}, \quad (16)$$

$${}^2 \mathcal{S}_i^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ {}^2 s_i^3 \end{bmatrix}.$$

Una vez obtenidos los tornillos ${}^2 \mathcal{S}_i^3$ y ${}^0 \mathcal{S}_i^1$ se obtiene la parte primaria del tornillo ${}^1 \mathcal{S}_i^2$ que corresponde a la junta revoluta en la parte superior de la extremidad, a partir del producto cruz entre ${}^2 \mathcal{S}_i^3$ y ${}^0 \mathcal{S}_i^1$ como

$${}^1 s_i^2 = {}^0 s_i^1 \times {}^2 s_i^3, \quad (17)$$

$${}^1 \mathcal{S}_i^2 = \begin{bmatrix} {}^1 s_i^2 \\ {}^1 s_i^2 \times -B_i \end{bmatrix}.$$

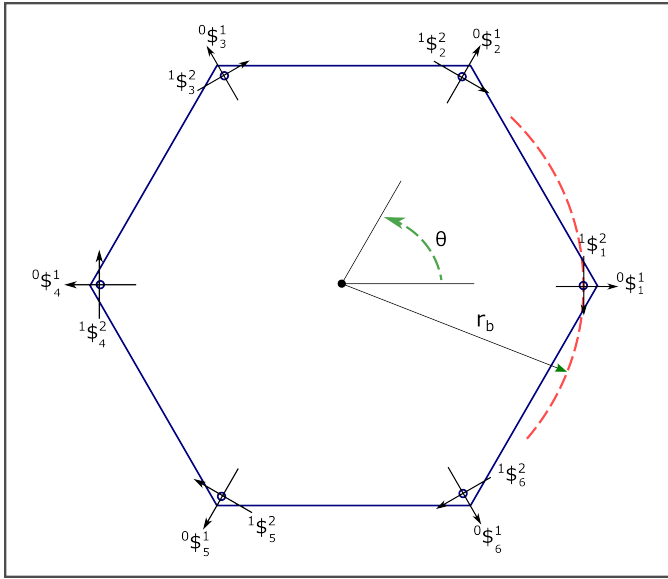


Figura 5: Definición de los tornillos para las juntas universales de la base fija.

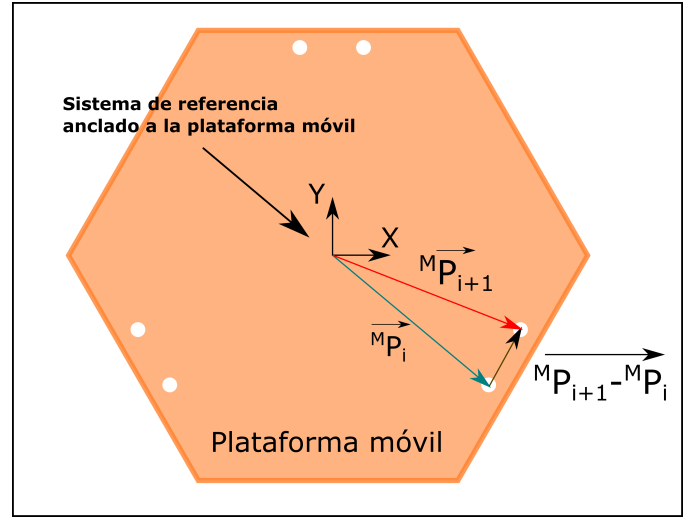
Retomando la Figura 4 se observa que los tornillos ${}^1\2_i y ${}^3\4_i son paralelos por lo que la parte primaria de ambos es la misma, variando únicamente el vector de posición para obtener el momento respecto del polo de referencia.

$$\begin{aligned} {}^3s^4_i &= {}^0s^1_i \times {}^2s^3_i, \\ {}^3\$^4_i &= \begin{bmatrix} {}^3s^4_i \\ {}^3s^4_i \times -P_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Para obtener el tornillo correspondiente a la junta revoluta colocada sobre la plataforma móvil, se observa de la Figura 4 que el tornillo siempre es normal a la superficie de la plataforma móvil, por lo que para obtener la dirección del mismo, se utilizan los vectores que se observan en la Figura 6, con las siguientes consideraciones:

- Para obtener la dirección del tornillo ${}^5\6_i es necesario ubicar el punto de conexión ${}^M P_i$ y el consecutivo siguiendo el sentido contrario a las manecillas del reloj (${}^M P_{i+1}$). Por tanto, realizando el producto cruz de los vectores ${}^M P_i$ y (${}^M P_{i+1} - {}^M P_i$) se obtiene la parte primaria del tornillo en cuestión y para normalizarlo se divide entre su magnitud.
- Se debe notar que dichos vectores se encuentran medidos con respecto del marco de referencia atado a la base móvil, por lo que, para obtener la dirección respecto del marco de referencia fijo a la base, se multiplica por la matriz de rotación ${}^B R^P$.
- De igual manera que con los demás tornillos, para las juntas revolutas la parte dual se obtiene al realizar el producto cruz con el vector de posición P_i .

$$\begin{aligned} M^5s^6_i &= \frac{{}^M P_i \times ({}^M P_{i+1} - {}^M P_i)}{|{}^M P_i \times ({}^M P_{i+1} - {}^M P_i)|}, \\ {}^5s^6_i &= {}^B R^P M^5s^6_i, \\ {}^5\$^6_i &= \begin{bmatrix} {}^5s^6_i \\ {}^5s^6_i \times -P_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Figura 6: Vectores para obtener el tornillo ${}^5\6_i .

Finalmente, se obtiene la parte primaria del último tornillo del producto cruz entre las partes primarias de los tornillos ${}^5s^6_i$ y ${}^3s^4_i$, mientras que la parte dual se calcula del producto cruz con el vector de posición P_i :

$$\begin{aligned} {}^4s^5_i &= {}^5s^6_i \times {}^3s^4_i, \\ {}^4\$^5_i &= \begin{bmatrix} {}^4s^5_i \\ {}^4s^5_i \times -P_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

4.1. Estado de velocidad del robot

El estado de velocidad del robot se define como sigue:

$$\begin{aligned} {}^B \mathbf{V}_o^P &= {}^0\omega_1 {}^0\$^1_i + {}^1\omega_2 {}^1\$^2_i + {}^2\omega_3 {}^2\$^3_i + {}^3\omega_4 {}^3\$^4_i \\ &\quad + {}^4\omega_5 {}^4\$^5_i + {}^5\omega_6 {}^5\$^6_i, \end{aligned} \quad (21)$$

donde ${}^B \mathbf{V}_o^P$, es el estado de velocidad del punto O (origen del marco de referencia atado a la plataforma móvil) en el cuerpo P (plataforma móvil) con respecto al cuerpo B (base fija) y las velocidades ${}^0\omega_1$, ${}^1\omega_2$, ${}^3\omega_4$, ${}^4\omega_5$ y ${}^5\omega_6$ corresponden a las velocidades angulares de las juntas universales y de revoluta, relacionadas a sus respectivos tornillos. Solamente la velocidad ${}^2\omega_3 = \dot{S}_i$ es la velocidad del i-ésimo actuador que resulta de interés para el análisis.

Para tener una relación de velocidades entrada-salida, es necesario eliminar las velocidades de las juntas pasivas de la ecuación (21). Esto se logra de manera metódica aplicando la forma de Klein a ambos lados de la ecuación del estado de velocidad con un tornillo que sea recíproco a cada tornillo asociado con las velocidades pasivas (para detalles de la metodología, consultar Gallardo-Alvarado (2016)). Se define una línea de Plücker que cumpla con las condiciones de reciprocidad como

$$\begin{aligned} {}^2\$^3_{r_i} &= \frac{P_i - B_i}{|P_i - B_i|}, \\ {}^2\$^3_{r_i} &= \begin{bmatrix} {}^2\$^3_{r_i} \\ {}^2\$^3_{r_i} \times -P_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Aplicando la forma de Klein de ambos lados de la ecuación (21) con el tornillo recíproco ${}^2\$^3_{r_i}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \{ {}^B \mathbf{V}_o^{P,2} \}_{r_i}^3 = & \cancel{0\omega_1^i \{ {}^0 \$_i^{1,2} \}_{r_i}^3} + \cancel{1\omega_2^i \{ {}^1 \$_i^{2,2} \}_{r_i}^3} \\ & + 2\omega_3^i \{ {}^2 \$_i^{3,2} \}_{r_i}^3 + \cancel{3\omega_4^i \{ {}^3 \$_i^{4,2} \}_{r_i}^3} \\ & + \cancel{4\omega_5^i \{ {}^4 \$_i^{5,2} \}_{r_i}^3} + \cancel{5\omega_6^i \{ {}^5 \$_i^{6,2} \}_{r_i}^3}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\{ {}^B \mathbf{V}_o^{P,2} \}_{r_i}^3 = 2\omega_3^i = \dot{S}_i. \quad (24)$$

Considerando las seis extremidades, se obtiene la expresión que relaciona velocidades de entrada y de salida de manera matricial:

$$\mathbf{J} \Delta {}^B \mathbf{V}_o^P = \dot{\mathbf{S}}, \quad (25)$$

donde \mathbf{J} es la matriz Jacobiana (o Jacobiano) cuyas columnas están constituidas por las líneas de Plücker con las que se realizaron las formas de Klein:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} {}^2 \$_{r_1}^3 & {}^2 \$_{r_2}^3 & {}^2 \$_{r_3}^3 & {}^2 \$_{r_4}^3 & {}^2 \$_{r_5}^3 & {}^2 \$_{r_6}^3 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

Δ es el operador de polaridad y $\dot{\mathbf{S}}$ es un vector columna cuyas componentes son las velocidades de los actuadores

$$\dot{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \dot{S}_1 & \dot{S}_2 & \dot{S}_3 & \dot{S}_4 & \dot{S}_5 & \dot{S}_6 \end{bmatrix}^T. \quad (27)$$

Finalmente, ${}^B \mathbf{V}_o^P$ es el estado de velocidad del robot cuyas componentes son las velocidades angulares y lineales de la plataforma móvil:

$${}^B \mathbf{V}_o^P = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z & v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T. \quad (28)$$

5. Resultados

Para la validación del análisis cinemático de posición, se propone el método cíclico propuesto por Taghirad (2013) y mostrado en la Figura 7 que consiste en proponer una posición y orientación deseada para la plataforma móvil del robot, resolver la cinemática inversa de acuerdo al procedimiento establecido en la Sección 3.2 para obtener las longitudes requeridas de los actuadores, y posteriormente usar estas longitudes como entrada para la cinemática directa, con lo que se obtiene la pose real del manipulador. La validez de los resultados se obtiene mediante la comparación de la posición deseada y la posición real alcanzada por el manipulador.

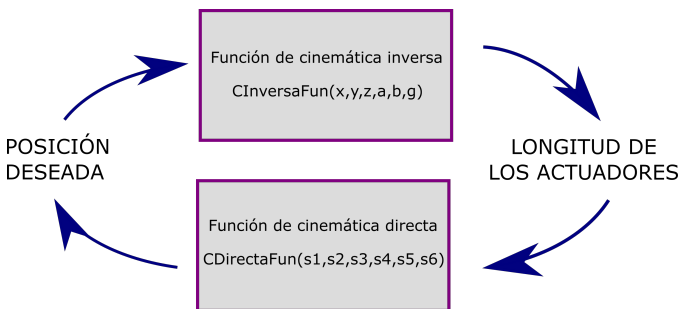


Figura 7: Diagrama del proceso para validar el análisis cinemático.

En la Figura 8 se presentan los resultados para una variación sinusoidal simultánea de los tres ángulos de orientación de la

plataforma móvil que da como resultado una trayectoria tridimensional circular.

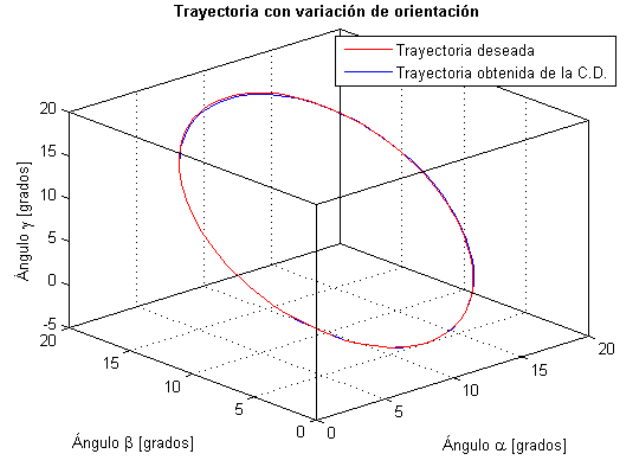


Figura 8: Trayectoria tridimensional para los ángulos de orientación.

Para validar los resultados del análisis de velocidad, se proponen trayectorias deseadas para la plataforma móvil, mediante la cinemática inversa se obtienen las longitudes de los actuadores, las cuales son derivadas en el tiempo para obtener las velocidades de entrada tanto para la simulación en SolidWorks como para la ecuación (25). En las Figuras 9 y 10 se presenta la comparación de ambos resultados para una trayectoria dada por:

$$\begin{aligned} Y &= 3t^2[\text{mm}], \\ \gamma &= 4t^2[\text{grados}], \end{aligned} \quad (29)$$

con los restantes grados de libertad estáticos.

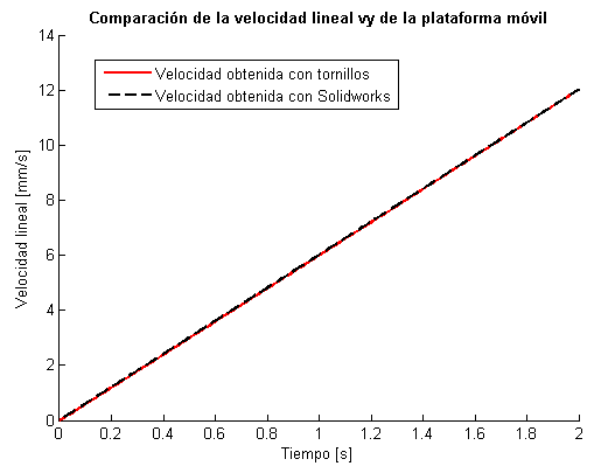


Figura 9: Comparación de la velocidad lineal a lo largo del eje Y.

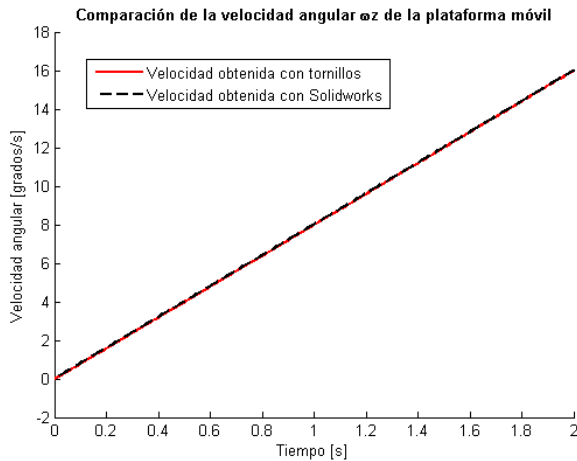


Figura 10: Comparación de la velocidad angular alrededor del eje Y.

6. Conclusiones

Con este caso de estudio se comprueba la viabilidad de usar la teoría de tornillos para realizar el análisis cinemático de robots paralelos, evitando la complicada labor de derivar con respecto al tiempo las ecuaciones de cerradura de posición. Más aún, proporciona una forma metódica de eliminar las velocidades de las juntas pasivas del análisis para obtener un modelo de velocidad entradas-salidas que de otra forma implicaría una difícil manipulación algebraica de las ecuaciones de velocidad. Las ecuaciones obtenidas fueron validadas mediante su comparación con resultados de simulaciones realizadas en SolidWorks. Como trabajos a futuro se plantea la extensión al análisis de aceleración y la validación experimental de los resultados.

Referencias

- Abedinnasab, M. H., Farahmand, F., Tarvirdizadeh, B., Zohoor, H., y Gallardo-Alvarado, J. (2017). Kinematic effects of number of legs in 6-dof ups parallel mechanisms. *Robotica*, 35:2257–2277.
- C. D. Crane III, M., G. y Duffy, J. (2022). *Screw Theory and Its Application to Spatial Robot Manipulators*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Cortés-Ruiz, H. J. (2019). Construcción y análisis cinemático de un prototipo de robot paralelo upur de seis grados de libertad. Tesis de licenciatura, Universidad Tecnológica de la Mixteca.
- Cui, G., Liu, J., Zhang, H., y Zhang, D. (2019). Kinematic performance analysis of a cable-driven redundant actuated parallel manipulator. *International Journal of Robotics and Automation*, 34:344–358.
- Flores-Salazar, E. D., García-Murillo, M. A., Lugo-González, E., Gallardo-Alvarado, J., y Arias-Montiel, M. (2019). Análisis cinemático de un robot paralelo 2-pus+rr aplicado a un rehabilitador de tobillo. En F. Barragán-Mendoza, S. P.-D. y Santiago-Santos, A., editores, *Modelación Matemática: Biomatemáticas e Ingeniería*, volumen III, capítulo 9, pp. 166–180. Universidad Tecnológica de la Mixteca, Huajuapán de León, Oaxaca, México.
- Gallardo-Alvarado, J. (2016). *Kinematic Analysis of Parallel Manipulators by Algebraic Screw Theory*. Springer, Switzerland.
- Gallardo-Alvarado, J. (2020). A gough-stewart parallel manipulator with configurable platform and multiple end-effectors. *Meccanica*, 55:597–613.
- Gallardo-Alvarado, J. y García-Murillo, M. (2017). Análisis cinemático del manipulador paralelo 4-prur mediante la teoría de tornillos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, 14:299–306.
- Gallardo-Alvarado, J., García-Murillo, M. A., Caracheo, L. A. A., Torres, F. J., y Sandoval-Castro, X. Y. (2022). Forward kinematics and singularity analyses of an uncoupled parallel manipulator by algebraic screw theory. *IEEE Access*, 10:4513–4522.
- Taghirad, H. D. (2013). *Parallel Robots: Mechanics and Control*. CRC Press, Boca Raton, FL, USA.
- Zhao, X., Zi, B., y Qian, L. (2017). Design, analysis, and control of a cable-driven parallel platform with a pneumatic muscle active support. *Robotica*, 35:744–765.