

Estimación de fallas en actuadores de un robot móvil con ruedas mecanum Fault estimation in actuators of a mobile robot with mecanum wheels

N. M. Luna-Aguilar ^a, P. Gasga-García ^a, S. Gómez-Peñate ^{a,*}, F. R. López-Estrada ^a, I. Santos-Ruiz ^a

^a TURIX Diagnosis and Control Group, Tecnológico Nacional de México, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Resumen

En este artículo presenta un observador proporcional integral convexo (PIC) para la estimación de fallas en actuadores en un robot móvil con ruedas mecanum. Mediante la técnica del sector no lineal, se desarrolla un modelo convexo con estructura producto tensor el cual proporciona mayor flexibilidad en la solución de las ganancias del observador. Para las condiciones de estabilidad del error de estimación, se utiliza el método directo de Lyapunov, dando condiciones suficientes a través de un conjunto de desigualdades lineales matriciales (LMIs) que garantizan la convergencia asintótica del estado y fallas estimados al vector de estado y fallas del sistema. Finalmente, se evalúan los resultados a nivel simulación con base al modelo no lineal de un robot móvil con ruedas mecanum.

Palabras Clave: Estimación de fallas, fallas en actuadores, robot móvil con ruedas mecanum, modelo convexo.

Abstract

In this article, a convex proportional-integral observer (PIC) is presented for the estimation of actuator faults in a mobile robot with mecanum wheels. Using the nonlinear sector technique, a convex model with a tensor product structure is developed, providing greater flexibility in solving the observer gains. For stability conditions of the estimation error, the direct Lyapunov method is employed, specifying sufficient conditions through a set of linear matrix inequalities (LMIs) that ensure the asymptotic convergence of the estimated state and faults to the vector of the system's state and faults. Finally, the results are evaluated through simulation based on the nonlinear model of a mecanum-wheeled mobile robot.

Keywords: Fault estimation, actuator faults, mobile robot with mecanum wheels, convex model.

1. Introducción

Los robots omnidireccionales con ruedas mecanum (RORMs) se utilizan en diferentes áreas como la industria de almacén, navegación militar, rescate, entre otros (Teknologi et al., 2015). Algunas de las ventajas que otorgan la integración de las ruedas mecanum son: la maniobrabilidad, habilidad de reorientación y la capacidad de moverse en espacios reducidos (Alakshendra y Chiddarwar, 2017). No obstante, debido a que pueden presentarse fallas en el sistema de posicionamiento; fallas por nivel de batería; fallas en sensores o en los motores (Mellah et al., 2019), la comunidad científica ha tenido interés en diagnosticar fallas en los RORMs.

Recientemente se han presentado investigaciones enfocadas en el diagnóstico de fallas (DFs) en los RORMs,

por ejemplo, en (Chang et al., 2021), realizan experimentos en tiempo real para detectar fallas mediante el monitoreo directo del coeficiente de fricción viscoso comparándolo con el valor residual generado a través del modelo de par de cada rueda. Además, algunos trabajos se han enfocado en la detección y aislamiento de fallas basado en observadores mediante el análisis de las firmas residuales; en (Mellah et al., 2021) se diseña un banco de observadores generalizados para determinar los límites de degradación que garantizan que el RORM todavía está en condiciones de operación. En (Mellah et al., 2019) analizan firmas residuales que son proporcionadas por un banco de observadores extendidos de Kalman utilizando el modelo lineal del RORM para obtener detección y aislamiento de fallas en actuadores y sensores. Una de las desventajas de los trabajos mencionados es el uso del modelo lineal del RORM, ya que los modelos lineales

*Autor para la correspondencia: samuel.gp@tuxtla.tecnm.mx

Correo electrónico: noe.luna.920409@gmail.com (Noé Moisés Luna-Aguilar), d15270017@tuxtla.tecnm.mx (Pedro Gasga-García), samuel.gp@tuxtla.tecnm.mx (Samuel Gómez-Peñate), frlopez@tuxtla.tecnm.mx (Francisco-Ronay López-Estrada), ildeberto.dr@tuxtla.tecnm.mx (Ildeberto de los Santos-Ruiz).

sólo aproximan a los modelos no lineales en un rango de operación muy limitado. Actualmente existe una metodología para representar de manera exacta un modelo no lineal; el procedimiento incluye una reescritura del modelo no lineal a un modelo convexo, lo que permite extender métodos de diseño de observadores lineales a sistemas no lineales de una manera sistemática.

En la literatura, los modelos convexos pueden ser encontrados como; modelos quasi-lineales de parámetros variantes (q-LPV) y modelos Takagi Sugeno (TS). Los modelos convexos son un conjunto de modelos lineales interpolados mediante funciones de ponderación (López-Estrada et al., 2019); las funciones de ponderación dependen de variables que contienen las no linealidades del modelo no lineal.

Existen muy pocos trabajos que han tratado con modelos convexos para el diseño de esquemas DFs en RORMs; en (Mellah et al., 2020) y (Na y Eun, 2021) desarrollan observadores de entradas desconocidas para detección y aislamiento de fallas (DAF) en actuadores basados en modelos q-LPV. Por otra parte, la estimación de fallas (EF) es una de las tareas del DF que proporciona la magnitud y la evolución de la falla con respecto al tiempo. Recientemente en (Mellah et al., 2019) presenta la estimación de fallas en los actuadores de un RORM mediante un filtrado de residuos utilizando un filtro de Kalman extendido. Sin embargo, los resultados de búsqueda al estado del arte para EF en los RORMs basados en modelos convexos no se han reportado.

En este trabajo se presenta una EF en actuadores del modelo no lineal de un RORM. Las contribuciones de este trabajo según el estado del arte se enumeran como: Primero, la estimación de las fallas simultáneas en los actuadores mediante un observador proporcional integral convexo. Segundo, el modelado convexo con estructura producto tensor que permite reescribir al modelo no lineal de forma exacta en la región de operación. Tercero, se garantiza estabilidad asintótica de la dinámica del error de estimación mediante el criterio de estabilidad de Lyapunov, que permite que las condiciones de diseño del observador queden establecidas en desigualdades lineales matriciales (LMIs). El documento está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2 se presenta el modelado no lineal del RORM. En la Sección 3 y 4, se deduce el modelado convexo y se desarrolla el observador PIC. Los resultados a nivel simulación se discuten en la Sección 5. Finalmente, en la Sección 6 se mencionan las conclusiones.

2. Modelo dinámico del robot móvil con ruedas mecanum

El caso de estudio es un robot omnidireccional con cuatro ruedas tipo mecanum como la que se muestra en la Figura 1, considerando que el centro geométrico P_i cada rueda está dispuesto simétricamente. Se muestra el sistema coordenado $\{S_i, E_i\}$; V_{ir} es la velocidad del rodillo pasivo en la rueda i , V_{iw} es el vector es el vector de velocidad generado por el contacto con la superficie, ω_i es la velocidad angular de la rueda i , R_i denota el radio de la rueda y α es el ángulo de inclinación del rodillo en cada rueda dispuesto a 45° .

La velocidad de la rueda i vista desde su centro geométrico

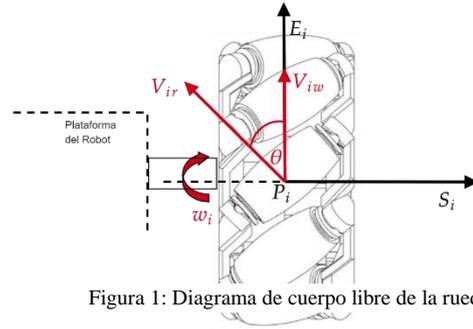


Figura 1: Diagrama de cuerpo libre de la rueda.

es:

$$\dot{q}_i = \begin{bmatrix} \dot{S}_i(t) \\ \dot{E}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\alpha) \\ R_r & -\cos(\alpha) \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} \omega_i(t) \\ V_{ir}(t) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

En la Figura 2 se muestra el diagrama de cuerpo libre del robot que incluye un marco global dado por el plano $\{X_o, O, Y_o\}$ y en el plano $\{X_m, Y_m\}$ que es trazado desde el centro de masa del cuerpo del robot. Usando la matriz de rotación en el marco O_m , el vector de velocidad del robot se puede escribir como:

$$\dot{q}_i^m = \begin{bmatrix} \dot{x}_i^m(t) \\ \dot{y}_i^m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_i(t) \\ \dot{S}_i(t) \end{bmatrix} = T_2^T \dot{q}_i, \quad (2)$$

donde θ es el ángulo de rotación de O_m con respecto a P_i . El vehículo se desplaza sobre terreno llano y, por tanto:

$$\dot{q}_i^m = \begin{bmatrix} \dot{x}_i^m(t) \\ \dot{y}_i^m(t) \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i \\ 0 & 1 & x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{y}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} = T_3^T \dot{q}_i^m, \quad (3)$$

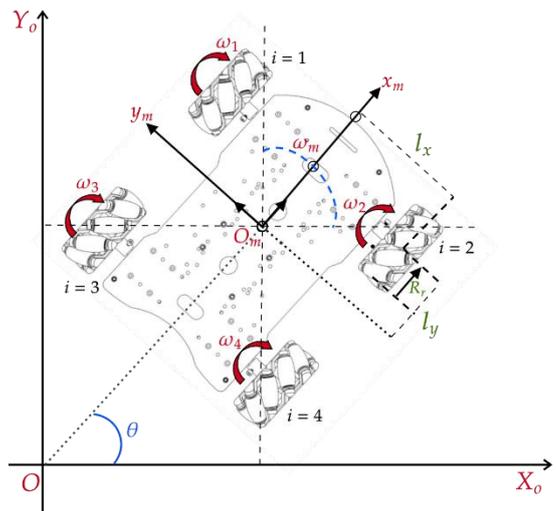


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre del robo omnidireccional mecanum.

donde q_i^m es el vector de velocidades de cada rueda en O , x_i y y_i son la distancia de traslación entre O_m y P_i . Usando (1), (2) y (3), se puede obtener la siguiente ecuación:

$$\dot{q}_i^\theta = (T_2^T)^{-1} (T_1^T)^{-1} T_3^T \dot{q}_i^m = R_i^T \dot{q}_i^m. \quad (4)$$

Considerando que las ruedas mecanum son idénticas los parámetros cinemáticos correspondientes se pueden determinar cómo $\theta = 0$, $x_i = l_x$, $y_i = l_y$. Por lo tanto, utilizando (5) y las matrices jacobianas de cada rueda, se deduce la cinemática directa del RORM:

$$\begin{matrix} \text{Cinemática directa} \\ \left[\begin{matrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{y}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \\ \omega_4(t) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5)$$

Para obtener las velocidades laterales y longitudinales del robot mecanum en el marco global $\{X_o, O, Y_o\}$, se denota:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_o(t) \\ \dot{Y}_o(t) \\ \dot{\omega}_o(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta)(t) & -\sin(\theta)(t) & 0 \\ \sin(\theta)(t) & \cos(\theta)(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_\theta} \begin{bmatrix} \dot{x}_m(t) \\ \dot{y}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

donde R_θ es la matriz de rotación del vehículo. Para obtener el modelo dinámico del vehículo se deducen a partir del sistema de coordenadas $\{X_o, O, Y_o\}$, con base al diagrama de cuerpo libre de la Figura 2 además de utilizar el método de Newton-Euler el movimiento traslacional y rotacional del RORM en su forma matemática. El modelo dinámico no lineal presentado en (Sahoo et al., 2018) es:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_o(t) &= \frac{a_1(t) - a_2(t)(\beta_x + \beta_y) - a_3(t)(\beta_{ix} - \beta_{iy})}{2mR_r}, \\ \ddot{Y}_o(t) &= \frac{a_4(t) - a_5(t)(\beta_x + \beta_y) - a_6(t)(\beta_x - \beta_y)}{2mR_r}, \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{(\tau_1(t) - \tau_2(t) + \tau_3(t) - \tau_4(t))}{2IR_r} (l_x + l_y) - \frac{\beta_w \dot{\theta}(t)}{I} \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \tau_1(t)(\cos(\theta)(t) - \sin(\theta)(t)) + \tau_2(t)(\cos(\theta)(t) + \sin(\theta)(t)) \\ &\quad + \tau_3(t)(\cos(\theta)(t) - \sin(\theta)(t)) + \tau_4(t)(\cos(\theta)(t) + \sin(\theta)(t)), \\ a_2(t) &= \dot{X}_m(t)2R_r(\cos^2(\theta))(t), \\ a_3(t) &= \dot{Y}_m(t)2R_r(\cos(\theta)\sin(\theta))(t), \\ a_4(t) &= \tau_1(t)(\cos(\theta)(t) + \sin(\theta)(t)) + \tau_2(t)(-\cos(\theta) + \sin(\theta)(t)) \\ &\quad + \tau_3(t)(\cos(\theta)(t) + \sin(\theta)(t)) + \tau_4(t)(-\cos(\theta)(t) + \sin(\theta)(t)), \\ a_5(t) &= X_m(t)2R_r(\cos(\theta)\sin(\theta))(t), \\ a_6(t) &= Y_m(t)2R_r(\cos^2(\theta))(t), \end{aligned}$$

m es la masa total de la plataforma, I es el momento de inercia del robot, $(\beta_x, \beta_y, \beta_w)$ son coeficientes de fricción que se consideran en la dinámica del robot. Por tanto, la representación en el espacio de estados del modelo no lineal en (7) es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(x)x(t) + B(x)u(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (8)$$

donde $x(t) \in R^6$, $u(t) \in R^4$, $y(t) \in R^6$, es el vector de estado, el vector de entrada, el vector de salida. El vector de estado es definido como; $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t), x_6(t)]^T =$

$[X_o(t), Y_o(t), \theta(t), \dot{X}_o(t), \dot{Y}_o(t), \dot{\theta}(t)]^T$, el vector de entradas está dado por los torques de cada rueda; $u(t) = [\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t), \tau_4(t)]^T$; $A(x) \in R^{6 \times 6}$, $B(x) \in R^{6 \times 4}$, $C \in R^{6 \times 6}$ y se definen como:

$$\begin{aligned} A(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_1(x)(\beta_x + \beta_y)}{m} & \frac{-b_2(x)(\beta_x - \beta_y)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_2(x)(\beta_x - \beta_y)}{m} & \frac{-b_1(x)(\beta_x + \beta_y)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_w}{I} \end{bmatrix}, \\ B(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3(x) & b_4(x) & b_3(x) & b_4(x) \\ b_4(x) & -b_3(x) & b_4(x) & -b_3(x) \\ l_x + l_y & -l_x + l_y & l_x + l_y & l_x + l_y \\ 2IR_r & 2IR_r & 2IR_r & 2IR_r \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\begin{aligned} b_1(x) &= \cos^2(x_3), \quad b_2(x) = \cos(x_3)\sin(x_3), \\ b_3(x) &= \frac{\cos(x_3) - \sin(x_3)}{2mR_r}, \quad b_4(x) = \frac{\cos(x_3) + \sin(x_3)}{2mR_r}. \end{aligned}$$

En la siguiente Sección se presenta la reescritura convexa del modelo no lineal en (8) obtenido mediante el enfoque del sector no lineal (Ohtake et al., 2001) y una estructura producto tensorial (Ariño y Sala, 2007; Quintana et al., 2021), tal que el modelo convexo coincida exactamente con el modelo no lineal en un dominio de diseño \mathcal{D} del espacio de estado (López-Estrada et al., 2019).

3. Modelado convexo

Para obtener el modelo convexo del modelo no lineal mostrado en (8), primero se identifican las no linealidades y se capturan en las siguientes variables premisas:

$$z_1(x) = \cos(x_3), \quad z_2(x) = \sin(x_3). \quad (10)$$

Los términos $z_1(x)$ y $z_2(x)$ pueden reescribirse como una suma convexa de las cotas de sus no linealidades, es decir:

$$z_j(x) = \underbrace{\frac{z_j(x) - z_j^0}{z_j^1 - z_j^0}}_{w(x)_0^j} z_j^0 + \underbrace{\frac{z_j^1 - z_j(x)}{z_j^1 - z_j^0}}_{w(x)_1^j} z_j^1, \quad \forall j = 1, 2, \quad (11)$$

donde $w(x)_0^j + w(x)_1^j = 1 \forall x$ y cada función convexa debe cumplir con las siguientes propiedades; $0 \leq w(x)_0^j \leq 1$, $0 \leq w(x)_1^j \leq 1$, $\forall x \in \mathcal{D}$. Los valores de las cotas z_j^0 y z_j^1 serán seleccionados considerando toda la región de operación en \mathcal{D}

para cada $z_j(x)$, es decir, $z_1(x) \in [-1,1]$ y $z_2(x) \in [-1,1]$. Debido a que las variables premisas $z_1(x) = \cos(x_3)$ y $z_2(x) = \sin(x_3)$ es posible encontrar un sector global del modelo no lineal, que permite no limitar la propiedad holonómica del robot móvil.

Por tanto, realizando el planteamiento en (11) para cada $z_j(x)$, $j = 1,2$, el modelo no lineal (8) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i \in B^3} w_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t)), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (12)$$

donde $B = \{0,1\}$, $i = (i_1, i_2, i_3)$, $w_i(x) = w_{i_1}^1(x)w_{i_2}^1(x)w_{i_3}^2(x)$ y $A_i = A(x)|_{w_i(x)=1}$, $B_i = B(x)|_{w_i(x)=1}$. Las matrices A_i y B_i son:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_1(z_1^{i_1}, z_1^{i_2})\beta_1}{m} & \frac{-b_2(z_1^{i_1}, z_2^{i_3})\beta_2}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-b_2(z_1^{i_1}, z_2^{i_3})\beta_1}{m} & \frac{-b_1(z_1^{i_1}, z_1^{i_2})\beta_2}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\beta_\omega}{l} \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_3(\cdot) & b_4(\cdot) & b_3(\cdot) & b_4(\cdot) \\ b_4(\cdot) & -b_3(\cdot) & b_4(\cdot) & -b_3(\cdot) \\ \frac{lx + ly}{2lR_r} & -\frac{lx + ly}{2lR_r} & -\frac{lx + ly}{2lR_r} & \frac{lx + ly}{2lR_r} \end{bmatrix},$$

donde $\beta_1 = \beta_x + \beta_y$, $\beta_2 = \beta_x - \beta_y$ y los valores de $b_1(z_1^{i_1}, z_1^{i_2})$, $b_2(z_1^{i_1}, z_2^{i_3})$, $b_3(z_1^{i_1}, z_2^{i_3})$ y $b_4(z_1^{i_1}, z_2^{i_3})$ son definidos como:

$$\begin{aligned} b_1(z_1^{i_1}, z_1^{i_2}) &= z_1^{i_1} z_1^{i_2}, b_2(z_1^{i_1}, z_2^{i_3}) = z_1^{i_1} z_2^{i_3}, \\ b_3(z_1^{i_1}, z_2^{i_3}) &= \frac{z_1^{i_1} - z_2^{i_3}}{2mR_r}, b_4(z_1^{i_1}, z_2^{i_3}) = \frac{z_1^{i_1} + z_2^{i_3}}{2mR_r}. \end{aligned}$$

En la siguiente Sección se diseña un observador PIC con base en el modelo convexo (12). En este trabajo, las funciones convexas $w_i(x)$ dependen de señales medibles puesto que se asume que se tiene acceso al vector de estado.

4. Diseño del observador PI

Considere el modelo convexo en (12) en presencia de fallas en actuadores:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i \in B^3} w_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i f_a(t)), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (13)$$

donde $f_a(t) \in R^m$ es el vector de fallas y F_i es la matriz de distribución de fallas que se define igual que la matriz B_i . Asumiendo que $\dot{f}_a(t) \approx 0$ es de variación lenta (Chadli et al.,

2013) y considerando un aumento del modelo convexo, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{f}_a(t) \\ \dot{\bar{x}} \end{bmatrix} = \sum_{i \in B^3} w_i(x) \left(\begin{bmatrix} A_i & F_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ f_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \right), \quad (14)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ f_a(t) \end{bmatrix}.$$

Para estimar las fallas de los actuadores del robot omnidireccional con ruedas mecanum, se propone el siguiente observador PIC:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i \in B^3} w_i(x) (\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i (y(t) - \hat{y}(t))), \quad (15)$$

$$\hat{y}(t) = \bar{C} \hat{x}(t),$$

donde $\hat{x}(t) \in R^{n+m}$ es el vector de estado estimado, $\hat{y}(t) \in R^q$ es el vector de salida estimada y \bar{L}_i son las ganancias a encontrar. Definiendo el error de estimación como:

$$e(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t), \quad (16)$$

para la dinámica del error, basta con sustituir (14) y (15) en la derivada de (16) por tanto:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i \in B^3} w_i(x) (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}) e(t).$$

A continuación, el Teorema 1 proporciona condiciones suficientes para garantizar la convergencia asintótica del vector de estado del observador (15).

Teorema 1: (Glykas, 2010) Dado el modelo convexo aumentado en (14) y el observador (15), el error de estimación (17) es asintóticamente estable, si existen matrices $P = P^T > 0$, $N_i \in R^{(n+m) \times q}$, tal que las LMIs sean:

$$P \bar{A}_i - N_i \bar{C} + \bar{A}_i^T P - \bar{C}^T N_i^T < 0, \quad \forall i \in 1,2,3, \quad (18)$$

donde las ganancias del observador se obtienen $\bar{L}_i = P^{-1} N_i$.

Demostración: Para verificar las condiciones de estabilidad del error de estimación, se utiliza el método directo de Lyapunov. Se propone una función cuadrática de Lyapunov $V(e) = e(t)^T P e(t) > 0$ cuya derivada es definida como:

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) < 0, \quad (19)$$

reemplazando (17) en (19) se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \left(\sum_{i \in B^3} b w_i(x) (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}) e(t) \right)^T P e(t) \\ &+ e(t)^T P \left(\sum_{i \in B^3} b w_i(x) (\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}) e(t) \right) < 0, \end{aligned} \quad (20)$$

realizando operaciones matriciales, es posible simplificar:

$$\sum_{i \in B^3} w_i(x) e(t)^\top (P \bar{A}_i - (P \bar{L}_i) \bar{C} + \bar{A}_i^\top P - \bar{C}^\top (P \bar{L}_i)^\top) e(t) < 0. \quad (21)$$

Note que en la desigualdad (21) contiene términos no lineales; se realiza los siguientes cambios de variables $N_i = P \bar{L}_i$ para expresar a (21) en las LMIs del Teorema 1. Esto completa la demostración.

5. Resultados

En esta Sección se presentan las simulaciones que demuestran la efectividad del observador (15). Para evaluar los resultados del algoritmo, se consideran los valores de los parámetros del modelo no lineal en (7) mostrados en la Tabla 1 obtenidos en (Sahoo et al., 2018).

Las condiciones iniciales $x(0) = [0.2 \ -0.15 \ \frac{\pi}{9} \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ y $\hat{x}(0) = [-0.25 \ 0.1 \ -\frac{\pi}{15} \ 0.05 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ son del modelo (13) y del observador PIC. De acuerdo con la descripción que se hace sobre la expresión (13), las fallas que puede estimar el (14) deben ser de variación lenta, es decir $\dot{f}_a(t) \approx 0$. Por tanto, se consideran $f_{a1}(t) = 0.2$ [Nm] en $t \geq 10$ s y $f_{a3}(t) = 0.15$ [Nm] en $t \geq 20$ s como fallas abruptas.

Parámetros	Unidad
m	6 kg
l_x	0.11 m
l_y	0.18 m
R_r	0.05 m
I	0.0945
β_{xyz}	0.02

La solución de las LMIs en (18) del Teorema 1 proporciona valores de ganancias a través del solucionador SEDUMI y de la herramienta YALMIP. La solución en (18) proporciona el valor de la siguiente matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

de acuerdo con el observador PIC visto en (15) se obtuvieron 8 ganancias que garantizan la estimación de las fallas:

$$\bar{L}_1 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & -0.04 & 0 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 3.33 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 3.33 & 0 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & 3.33 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_2 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & -0.04 & 0.04 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & 3.33 & 0 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & -3.33 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 3.33 & 0 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_3 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & -0.04 & 0 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 3.33 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 3.33 & 0 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & 3.33 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_4 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0.04 & 2.498 \\ 0 & 0 & 0.01 & 3.33 & 0 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & -3.33 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 3.33 & 0 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_5 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0 & -0.04 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & -3.33 & 0 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & 3.33 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & -3.33 & 0 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_6 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0.04 & 0 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & -3.33 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & -3.33 & 0 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & -3.33 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_7 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0.04 & 0 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & -3.33 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & -3.33 & 0 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & -3.33 & -30.72 \end{bmatrix},$$

$$\bar{L}_8 = \begin{bmatrix} 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.35 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1.34 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.35 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99 & 0.04 & 0 & 2.49 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & -3.33 & 30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & -3.33 & 0 & -30.72 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0 & -3.33 & -30.72 \end{bmatrix},$$

En este caso de estudio, se consideró una estabilización convexa dado por una sumatoria de ganancias que son interpoladas por las funciones de ponderación que se retroalimentan al estado; en la literatura es muy bien conocida como compensación paralela distribuida (PDC por sus siglas en inglés) (Tanaka y Wang, 2001).

En la Figura 3 se ilustra la convergencia asintótica de la estimación de las fallas simultáneas en los actuadores; motor 1 y motor 3. En la Figura 4 se ilustra los errores de estimación de los estados y de las fallas.

Es importante mencionar que los resultados mostrados en la Figura 3 y Figura 4 considera disponible el vector de estado del sistema, tal que la matriz C se define como se presenta en (9). La disponibilidad de todo el vector de estado del sistema no implica que el diseño del observador no sea relevante, puesto que el objetivo principal de este trabajo es diseñar un observador convexo para estimar las fallas en los actuadores.

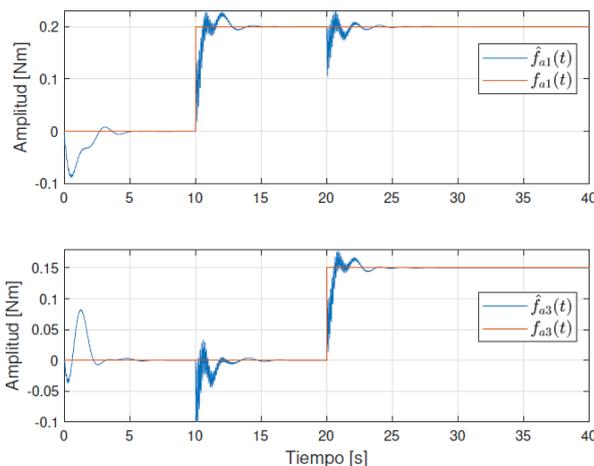


Figura 3: Estimación de fallas.

6. Conclusiones

En este trabajo se aborda una estimación de fallas en los actuadores de un modelo de un robot omnidireccional tipo mecanum. La metodología consiste en realizar una reescritura convexa del modelo no lineal para hallar soluciones a través

de un conjunto de desigualdades lineales matriciales. Las simulaciones demostraron la convergencia asintótica de las fallas simultáneas en los actuadores. Para trabajos futuros, se propone plantear un observador robusto en presencia de perturbaciones y ruido de medición en los sensores, tal que, puedan ser trasladados a un esquema de control tolerante a fallas activo.

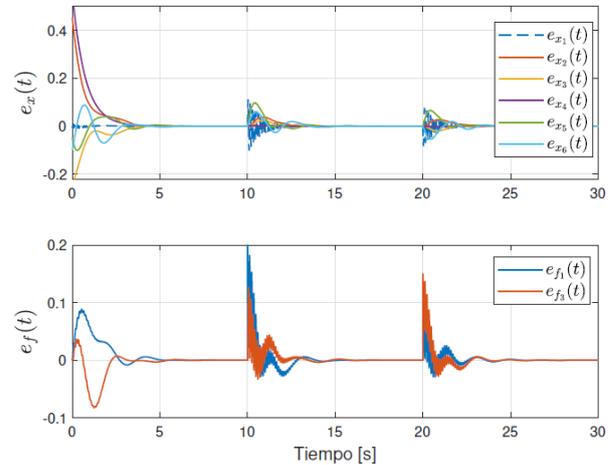


Figura 4: Error de los estados $e_x(t)$, error de estimación de las fallas $e_f(t)$.

Agradecimientos

Agradecemos al Tecnológico Nacional de México por el financiamiento a este trabajo través del programa Proyectos de Investigación Científica, Desarrollo Tecnológico e Innovación, con clave de proyecto 16800.23-P.

Referencias

- Alakshendra, V., y Chiddarwar, S. S. (2017). Adaptive robust control of Mecanum-wheeled mobile robot with uncertainties. *Nonlinear Dynamics*, 87(4), 2147–2169. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3179-1>
- Ariño, C., y Sala, A. (2007). Relaxed LMI conditions for closed-loop fuzzy systems with tensor-product structure. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 20(8), 1036–1046. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.engappai.2007.02.011>
- Chadli, M., Aouaouda, S., Karimi, H. R., y Shi, P. (2013). Robust fault tolerant tracking controller design for a VTOL aircraft. *Journal of the Franklin Institute*, 350(9), 2627–2645. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.09.010>
- Chang, P. I., Fan-Chiang, S. C., Chen, C., y Lan, C. Y. (2021). Real Time Fault Detection for Mecanum Wheel Omnidirectional Robot Platform. *International Conference on Control, Automation and Systems, 2021-October*, 1969–1973. <https://doi.org/10.23919/ICCAS52745.2021.9649780>
- Glykas, Michael. (2010). *Fuzzy cognitive maps : advances in theory, methodologies, tools and applications*. Springer.
- López-Estrada, F. R., Rotondo, D., y Valencia-Palomo, G. (2019). A review of convex approaches for control, observation and safety of linear parameter varying and Takagi-Sugeno systems. In *Processes* (Vol. 7, Issue 11). MDPI AG. <https://doi.org/10.3390/pr7110814>
- Mellah, S., Graton, G., Adel, E. M. E. L., Ouladsine, M., y Planchais, A. (2019). Detection & isolation of sensor and actuator additive faults in a 4-mecanum wheeled mobile robot (4-MWMM). *2019 International Conference on Control, Automation and Diagnosis (ICCAD)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICCAD46983.2019.9037885>
- Mellah, S., Graton, G., Adell, E. M. E. L., Ouladsine, M., y Planchais, A. (2019). Mobile Robot Additive Fault Diagnosis and Accommodation.

- 2019 8th International Conference on Systems and Control (ICSC), 241–246. <https://doi.org/10.1109/ICSC47195.2019.8950504>
- Mellah, S., Graton, G., El Adel, E. M., Ouladsine, M., y Planchais, A. (2021). Health State Monitoring of 4-mecanum Wheeled Mobile Robot Actuators and its Impact on the Robot Behavior Analysis. *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, 102(4). <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01446-7>
- Mellah, S., Graton, G., Mostafa, E., Adel, E. L., Ouladsine, M., y Planchais, A. (2020). 4-mecanum wheeled mobile robot actuator fault detection & isolation using unknown input observer-based approach. In *2020 European Control Conference (ECC)*. https://doi.org/10.0/Linux-x86_64
- Na, G., y Eun, Y. (2021). Actuator fault detection for unmanned ground vehicles considering friction coefficients. *Sensors*, 21(22). <https://doi.org/10.3390/s21227674>
- Ohtake, H., Tanaka, K., y Wang, H. O. (2001). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569)*, 1, 127–132. <https://doi.org/10.1109/NAFIPS.2001.944239>
- Quintana, D., Estrada-Manzo, V., y Bernal, M. (2021). An exact handling of the gradient for overcoming persistent problems in nonlinear observer design via convex optimization techniques. *Fuzzy Sets and Systems*, 416, 125–140. <https://doi.org/10.1016/j.fss.2020.04.012>
- Sahoo, S. R., Chiddarwar, S. S., y Alakshendra, V. (2018). Intuitive dynamic modeling and flatness-based nonlinear control of a mobile robot. *Simulation*, 94(9), 797–820. <https://doi.org/10.1177/0037549717741192>
- Tanaka, K. y Wang, H. (2001) Takagi-Sugeno Fuzzy Model and Parallel Distributed Compensation. In *Fuzzy Control Systems Design and Analysis* (pp. 5–48). John Wiley & Sons, Ltd. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/0471224596.ch2>
- Teknologi, J., Juhairi, M., Safar, A. (2015). *Holonomic and omnidirectional locomotion systems for wheeled mobile robots: a review* (Vol. 77). www.jurnalteknologi.utm.my