

# Segmentación de espectrograma de patrones por convolución de modelo-base aplicado a señales con ruido aditivo

## Pattern spectrogram segmentation by base-model convolution applied to signals with additive noise

Cesar Solis-Cervantes <sup>a,\*</sup>, Sergio Palomino-Resendiz <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Unidad Zacatenco, 07738, Ciudad de México, México.

### Resumen

El presente trabajo establece un método convolucional por segmentación de espectrograma para detectar señales discretizadas con un patrón espectral de interés y que está contaminada con ruido aditivo, donde la detección por espectrograma estándar tiende a no ser el procedimiento más eficiente. Para lograr dicho objetivo se propone una metodología de tres pasos: generación de un modelo-base de patrones de interés con características similares a identificar, extraer la norma de la transformada Gabor discreta de la señal a identificar en convolución con los patrones del modelo-base, umbralizar el resultado del paso anterior para limitar el contenido espectral del ruido e identificar los patrones resultantes. Se compara este método con los tradicionales de convolución de funciones seno/coseno (espectrograma) y se marcan las ventajas y desventajas de ambos. Para su validación se implementa código en Matlab 2024a del algoritmo propuesto. Finalmente se hacen comentarios de trabajos futuros sobre la identificación de señales de ondas gravitacionales inmersas en señales con ruido en los que se puede aplicar la metodología para encontrar dichos patrones.

**Palabras Clave:** Detección de señales, Teoría de la transformada Gabor, Métodos convolucionales, Teoría del espectrograma, Procesamiento de señales con ruido.

### Abstract

The present work establishes a convolutional method by spectrogram segmentation to detect discretized signals with a spectral pattern of interest and that is contaminated with additive noise, where detection by standard spectrogram tends to not be the most efficient procedure. To achieve this objective, a three-step methodology is proposed: generation of a base model of patterns of interest with similar characteristics to be identified, extracting the norm of the discrete Gabor transform of the signal to be identified in convolution with the patterns of the base model, threshold the result of the previous step to limit the spectral content of the noise and identify the resulting patterns. This method is compared with the traditional convolution of sine/cosine functions (spectrogram) and the advantages and disadvantages of both are highlighted. For validation, code in Matlab 2024a of the proposed algorithm is implemented. Finally, comments are made on future work on the identification of gravitational wave signals immersed in noisy signals in which the methodology can be applied to find these patterns.

**Keywords:** Signal detection, Gabor transform theory, Convolutional methods, Spectrogram theory, Processing noised signals.

## 1. Introducción

### 1.1. Antecedentes y estado del arte

El procesamiento de señales así como la detección de patrones ha ido evolucionando con el paso del tiempo y el surgimiento de nuevos dispositivos procesadores de señales, desde los microprocesadores convencionales hasta los DSP. Gracias a este auge es posible desarrollar diversas y novedosas

técnicas relacionadas, a continuación se presentan algunos de los últimos avances en la materia.

El procesamiento digital de señales a nivel pedagógico ha tenido avances académicos y desarrollos de laboratorio basados en FPGA sobre modulación, filtros FIR, muestreo, síntesis de frecuencias entre otros (Hansen y Manwaring, 2011). Marques et al. proponen una serie de ejercicios con dispositivos de bajo costo accesibles a los estudiantes resultando en el desarrollo de

\*Autor para correspondencia: csolisc@ipn.mx

Correo electrónico: csolisc@ipn.mx (Cesar Solis-Cervantes), spalominor@ipn.mx (Sergio Palomino-Resendiz).

Historial del manuscrito: recibido el 04/06/2024, última versión-revisada recibida el 31/07/2024, aceptado el 30/07/2024, publicado el 30/11/2024. DOI: <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial4.13171>



sonares, proyectos de adquisición de señales biométricas y de audio (Marques, 2019).

Se han presentado avances significativos en la detección por radar en donde el tratamiento de las señales se hace por medio de un FPGA para obtener una imagen bidimensional, reduciendo los costos de implementación de estas aplicaciones a nivel industrial (Wang *et al.*, 2022).

En campo de la Energía Nuclear se encuentra en la literatura reciente el procesamiento de señales para el decomisionamiento de objetos de energía nuclear ofreciendo una alternativa tecnológica por medio del modelado matemático correspondiente (Lavrentev y Filimonyuk, 2023).

En el área médica Cabanillas et al. sugieren un algoritmo para convertir señales digitales multidimensionales ya procesadas de electrocardiogramas (ECG) en señales de una dimensión con la intención de comprimir datos sin pérdida de información, lo cual es de relevante importancia al momento de almacenar bases de datos de pacientes (Cabanillas *et al.*, 2022). Se ha desarrollado un novedoso sistema de procesamiento de señales para monitorear a pacientes con respiradores artificiales, empleando también técnicas de inteligencia artificial para la toma de decisiones automáticas en el dispositivo en función de los patrones respiratorios y otros signos vitales (Khan *et al.*, 2023). Se han hecho avances en el desarrollo de una serie de algoritmos basados en inteligencia artificial para el estudio y clasificación de electromiogramas (EMG) con la ventaja de dar diagnósticos oportunos (Acevedo y Duarte, 2014). Se tienen avances recientes en la reducción de ruido en señales biomédicas donde se hace un estudio sobre el filtrado de fase lineal en una base de datos de ECG (Chandra *et al.*, 2019). Se ha propuesto un método de filtrado de ruido de alta frecuencia para señales de ECG basado en wavelets presentando una buena eficiencia frente a otras técnicas comunes (Noskova y Tumakov, 2024). Se han desarrollado técnicas de extracción de características e identificación de patrones en imágenes médicas por medio de la transformada wavelet Gabor (Soni *et al.*, 2014).

En el campo de la computación se encuentra una gama de aplicaciones relacionadas, por mencionar algunas se tiene a Watcharapinchai et al., donde los autores emplean una metodología de Análisis de Componentes Principales (PCA) para realizar la categorización de diversos objetos con patrones estadísticos similares (Watcharapinchai *et al.*, 2009), en el Análisis de Grandes Datos (big data) se desarrollaron metodologías por wavelets para detectar e identificar patrones estadísticos específicos, periódicos, detección de anomalías entre otros (Zhou *et al.*, 2016).

La reducción del ruido en una señal es todo un subcampo del saber relacionado con el tratamiento digital de señales, no cabe duda de que el ruido se puede presentar en diversas formas modificando los patrones originales de las señales, estudios exhaustivos recientes sobre filtros FIR otorgan recomendaciones para la elección de los parámetros heurísticos de los mismos (Magsi *et al.*, 2018), mejoras en el diseño filtros óptimos basados en el Método de Mínimos Cuadrados (LMS) (Prasad *et al.*, 2023), así como metodologías para combinar filtros en función de la caracterización del ruido que tenga la señal de interés (Liu, 2022). A nivel de hardware se han desarrollado tecnologías para reducir el ruido en amplificadores

CMOS disminuyendo la distorsión intrínseca debida a estos componentes electrónicos (Khunteta y Niranjana, 2018), así como en aplicaciones MOSFET (Jainwal *et al.*, 2015).

En el marco del estudio y profundización de las bases teóricas del procesamiento de señales, sus avances y nuevos resultados sobre wavelets se ha propuesto la construcción matemática en el dominio fraccional de Fourier (Ishikawa *et al.*, 2015), así como un compendio sobre la transformada de Fourier en el espacio tiempo fraccional (El Haoui y Zayed, 2024), técnicas de procesamiento rápido de la transformada wavelet Gabor por convolución (Bajaj y Kashyap, 2012), construcción de bases para wavelet y pares de transformación en espacio de Hilbert donde se desarrolla el soporte matemático abriendo la posibilidad futura de formar un banco de filtros basados para la Transformada Rápida de Fourier (FFT) asociada a los wavelets correspondientes (Chaudhury y Unser, 2009), nuevos algoritmos de procesamiento rápido para la transformada discreta de Fourier (DFT) para señales muestreadas pudiendo compararse en velocidad de convergencia con la FFT ofreciendo ciertas ventajas analíticas (Alexey y Olga, 2024; Alexey *et al.*, 2022), se han implementado diversos algoritmos para acelerar la convergencia de la DFT donde la mejora está en sus aplicación para señales de alta frecuencia (Natalia *et al.*, 2024). Se encuentra en la literatura una interesante propuesta de parametrización generalizada de la transformada de Fourier, unificando un marco teórico de las transformadas de Fourier, Mellin, Laplace y Z (Singh *et al.*, 2022). Estudios sobre la transformada Cuántica de Fourier abren la posibilidad a nuevas técnicas de procesamiento de señales por medio de la computación cuántica donde se pretende establecer una equivalencia de los algoritmos clásicos con esta rama del saber que permite cómputo paralelo (Lugilde *et al.*, 2024).

Resulta extensa la literatura en cuanto al tema, incluso los avances recientes son muy variados gracias a los costos económicos de la tecnología en cuestión. Vale la pena mencionar la aplicación de las técnicas de detección para la búsqueda e identificación de ondas gravitacionales en señales fuertemente contaminadas con ruido previamente caracterizado, estudios recientes en esta rama dan con un método de estimación de transitorios de ondas gravitacionales (Coughlin *et al.*, 2014), descripción de un modelo físico-matemático de propagación de ondas gravitacionales para objetos con masa que viajan a altas velocidades (He *et al.*, 2022), se propone un procedimiento para la detección de ondas gravitacionales dadas por el modelo de precalentamiento inflacionario (Cui y Sfakianakis, 2023), y como base física teórica se detallada sobre el origen de dichas ondas en el universo (Bertone, 2024).

## 1.2. Objetivos del trabajo presente

La idea principal es establecer una metodología adicional a la existente para la detección de patrones en una señal la cual está contaminada con ruido aditivo persiguiendo los siguientes objetivos:

- Establecer el marco teórico matemático que sirva como base para el desarrollo del procedimiento.
- Proponer un procedimiento simple para la generación de un modelo-base para la segmentación de espectrograma

por medio de ciertos patrones específicos de la señal de interés. Lo que es equivalente a realizar un cambio de base en el espectrograma y segmentarlo con un umbral en particular.

- Presentar el algoritmo correspondiente así como los resultados obtenidos para un ejemplo en particular e implementarlo en el software Matlab 2024a.
- Comparar con las técnicas de espectrograma estándar (transformada Gabor discreta con funciones seno/coseno en convolución con la señal a tratar).
- Presentar ventajas y desventajas de la propuesta frente al método estándar.
- Llegar a una conclusión objetiva donde se indiquen las potenciales aplicaciones así como trabajos futuros relacionados, en particular con la identificación de patrones similares a ondas gravitacionales en señales fuertemente contaminadas por ruido aditivo y otras señales indeseables.

## 2. Preliminares teóricos

En la sección presente se toma como referencia el marco del Análisis Funcional, su relación con la Teoría del procesamiento de señales discretas y el Álgebra Lineal (Kantorovich y Akilov, 2014; O’Leary, 2021; Leis, 2011; Loehr, 2014). Se definen únicamente aquellos elementos matemáticos necesarios para desarrollar los teoremas aplicables.

**Definición 2.1.** *El producto interno entre dos funciones discretas se toma como sigue:*

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k=1}^n f(t_k) \bar{g}(t_k), \quad (1)$$

donde  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\bar{g}$  es el complejo conjugado de la función y  $t_k$  es el tiempo en que ocurre la muestra  $k \in \mathbb{N}$ .

Este concepto cumple con la definición de producto interno y es el estándar para manipular señales digitalizadas y muestreadas.

De aquí es posible inducir una norma dada por  $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ . Un resultado importante de Álgebra Lineal es la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|, \quad (2)$$

esta propiedad es aprovechada en su versión de cociente:

$$0 \leq \frac{|\langle f, g \rangle|}{\|f\| \|g\|} \leq 1,$$

siempre que las normas de las funciones sean no nulas. Intuitivamente el resultado indica una correlación entre las funciones o, de forma más simple un ‘parecido’ entre ellas, si el valor es cercano a uno quiere decir que las funciones son muy parecidas, si se acerca a cero es que no.

**Definición 2.2.** *Sean  $v_1, v_2 \in V$  dos vectores del espacio vectorial  $V$  con producto interno, se dice que son ortonormales si  $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$  y  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$  para  $i = 1, 2$ .*

**Definición 2.3.** *Una base ortonormal de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  es el conjunto de vectores  $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  tales que generan al espacio vectorial de discurso y además  $\langle v_i, v_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$  y  $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ .*

**Teorema 2.1.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y una base ortonormal del mismo  $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  entonces un vector  $v \in V$  puede escribirse como:*

$$v = \sum_{k=1}^n c_k v_k, \quad (3)$$

donde  $c_k = \langle v, v_k \rangle$ .

**Teorema 2.2.** *Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita,  $\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $\mathcal{B}_2 := \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  bases de dicho espacio vectorial, y sea  $\mathcal{A}$  la matriz de cambio de base asociada, entonces se tiene lo siguiente:*

1. Si  $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$  tiene ceros en los elementos distintos de la diagonal principal, entonces son vectores ortogonales.
2. Si además del punto anterior los elementos de la diagonal principal son uno entonces se trata de vectores ortonormales.

Una señal muestreada es una función que toma valores puntuales en tiempos específicos  $t_k$ , en el presente texto se asumirá que el periodo de muestreo es constante y lo suficientemente pequeño como para que no se presente el fenómeno de aliasing (Leis, 2011). Es posible escribir estas funciones como una combinación lineal de los elementos de la base del espacio vectorial de discurso  $V$  donde los coeficientes son las componentes ‘espectrales’ de la señal en dicha base. De manera clásica los elementos de la base para el procesamiento de señales son las funciones seno y coseno, sin embargo, cabe recalcar que no es la única forma de elegirlas. El teorema ofrece una manera simplificada de determinar la ortonormalidad de los elementos de un conjunto de vectores y así establecer una base para los subespacios funcionales.

Es preferible tener un conjunto base ortonormal a que simplemente se verifique la independencia lineal de sus elementos, pues en el primer caso todas las proyecciones de funciones en esta base no tendrán componentes compartidos entre sí, en cambio en el segundo caso es posible que se presente dicha situación. Esto tiene repercusiones al momento en la cantidad de cálculos computacionales que se realizan para el procesamiento de señales, siendo menos en el primer caso.

Los espacios funcionales por lo general son de dimensión infinita por lo que la proyección sobre cualquier subespacio vectorial de dimensión finita será sólo una aproximación (Loehr, 2014). En la práctica se emplean espacios vectoriales de dimensión finita donde el espacio de frecuencias es el adecuado para cada señal, es decir, es aquel donde existe la mayor concentración de potencia espectral de una señal (Leis, 2011).

**Definición 2.4.** *Una función de ventaneo (windowing)  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  cumple con las siguientes propiedades:  $w(t_k, t_j) = w(t_k, t_k - t_j)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $w(t_k, t_j) \geq 0$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} w(t_k, t_j) = 0$  para todo  $t_j$ .*

La función de ventaneo al ser multiplicada por una función de señal de prueba permite extraer la 'información' de dicha señal pero en un tramo delimitado por el ancho de la ventana al tiempo  $t_k$ , esto quiere decir que se puede hacer un análisis local de las señales en cada instante de tiempo según se requiera, comúnmente se conoce como *proceso de ventaneo* o *ventana móvil*.

De las funciones de ventaneo más comunes es la gaussiana, dada por la ecuación:

$$w(t_k, \tau_j) := e^{-\beta(t_k - \tau_j)^2}, \quad (4)$$

con  $\beta \geq 0$  el parámetro de varianza que determina el ancho de la ventana gaussiana. Si  $\beta = 0$  se tiene una función de ventaneo rectangular de altura unitaria. Los parámetros  $k, j$  indican que se trata de muestras al tiempo  $t_k$  y  $t_j$  respectivamente.

Si una señal pasa por un proceso de ventaneo y además se realiza el producto interno con un conjunto de señales patrón (vectores de la base) para cada instante de tiempo  $t_k$ , se tendría como resultado un proceso de convolución el cual permite extraer las componentes espectrales respecto de los vectores base (Leis, 2011), como se menciona en la siguiente definición.

**Definición 2.5.** (Leis, 2011) Sean  $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  se define la convolución discreta de ambas funciones como:

$$(f * g)(t_k) := \sum_{j=1}^n f(t_j) g(t_{k-j+1}). \quad (5)$$

La convolución discreta tiene la propiedad de conmutatividad y asociatividad (Woerdeman, 2015), mismas que son aprovechadas en el presente trabajo.

Una función propia de la convolución es la exponencial  $e^{-st}$  donde  $s \in \mathbb{C}$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Si se toma  $s = -j\omega$  se tendría la base para la transformada discreta de Fourier, la cual está dada por:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-i\omega_r t_k} \right\}_{r=1}^s, \quad (6)$$

de aquí se induce el siguiente concepto.

**Definición 2.6.** Dada una función muestreada  $f(t_k)$  su transformada de Fourier discreta y finita con la base estándar (6) está dada por:

$$\mathcal{F}\{f(t_k)\}(\omega_r) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n f(t_k) e^{-j\omega_r t_k}, \quad (7)$$

donde  $\omega_r$  son múltiplos de la frecuencia fundamental dada por  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}$  con  $T_s$  el periodo de muestreo.

Lo anterior es posible reescribirlo en formato matricial:

$$\mathcal{F}\{f(t_k)\}(\omega_r) := A(t_k, \omega_r) f(t_k), \quad (8)$$

donde

$$A(t_k, \omega_r) := \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} e^{-i\omega_1 t_1} & e^{-i\omega_1 t_2} & e^{-i\omega_1 t_3} & \dots & e^{-i\omega_1 t_n} \\ e^{-i\omega_2 t_1} & e^{-i\omega_2 t_2} & e^{-i\omega_2 t_3} & \dots & e^{-i\omega_2 t_n} \\ e^{-i\omega_3 t_1} & e^{-i\omega_3 t_2} & e^{-i\omega_3 t_3} & \dots & e^{-i\omega_3 t_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i\omega_s t_1} & e^{-i\omega_s t_2} & e^{-i\omega_s t_3} & \dots & e^{-i\omega_s t_n} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

con  $k, r \in \mathbb{N}$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $r = 1, 2, \dots, s$  y  $f_k := [f(t_1) \ f(t_2) \ f(t_3) \ \dots \ f(t_n)]^T$ . Se verifica que (6) forma un conjunto ortonormal, pues se calcula  $A(t_k, \omega_r) A^T(t_k, \omega_r)$  y resulta que los elementos de la diagonal principal son uno y el resto cero (Hsu, 2020).

**Definición 2.7.** La potencia espectral media de una señal muestreada  $f(t_k)$  está dada por:

$$P_{\text{señal}} := \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \|\mathcal{F}\{f(t_k)\}(\omega_r)\|. \quad (10)$$

**Definición 2.8.** La relación señal/ruido está dada por:

$$SNR := 10 \log_{10} \left( \frac{P_{\text{señal}}}{P_{\text{ruido}}} \right), \quad (11)$$

donde  $P_{\text{señal}}$  es la potencia espectral media de la señal de interés y  $P_{\text{ruido}}$  es la potencia espectral media de las señales persistentes no deseadas o el ruido.

Resulta claro que la matriz dada por (9) es de cambio de base, es decir, se pasa del espacio de muestreo en el tiempo al espacio discreto de la frecuencia. En este nuevo espacio vectorial discreto es posible aplicar una serie de filtros que puedan modificar las componentes espectrales de la señal original, tanto para atenuar el contenido de ruido como para extraer ciertas componentes deseadas, sin embargo, se pierde información en el tiempo. Con la intención de localizar características de señales tanto en la frecuencia como en el tiempo es necesario introducir una transformación con una ventana móvil tal que, en cada espacio de ventaneo se obtenga una transformada discreta de Fourier, ello se logra con el concepto dado a continuación.

**Definición 2.9.** Se define a la transformada Gabor discreta como una función  $\mathcal{G} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$\mathcal{G}(t_k, \omega_r) := (b(\omega_r, t_k) w(t_k, \tau_j)) * f(t_k), \quad (12)$$

donde  $b(\omega_r)$  son funciones base,  $w(t_k, \tau_j)$  una función de ventaneo, y  $f(t_k)$  una señal muestreada en el tiempo. Las variables  $t_k, \omega_r, \tau_j \in \mathbb{R}$  son el tiempo discretizado, la 'frecuencia' dada por las funciones base y el tiempo en que se desplaza la ventana en el tiempo discretizado respectivamente.

Si las funciones base se toman como  $e^{-i\omega_r t_k}$ , la función de ventaneo como en (4) y se toma la norma de la transformada Gabor discreta resultante entonces se obtiene el *espectrograma* con un ancho de ventana dado por el parámetro de varianza  $\beta$  (Leis, 2011).

Con el espectrograma se identifican las componentes seno/coseno (elementos de la base funcional estándar) y su ocurrencia a lo largo de la señal tanto en el tiempo como en la frecuencia, es decir, el espectrograma 'resalta' estas características. Al cambiar la base es posible identificar otros patrones que no es evidente distinguir en el espectrograma. La información de la señal no se modifica por un cambio de base de funciones, simplemente se resaltan otros patrones que son interés.

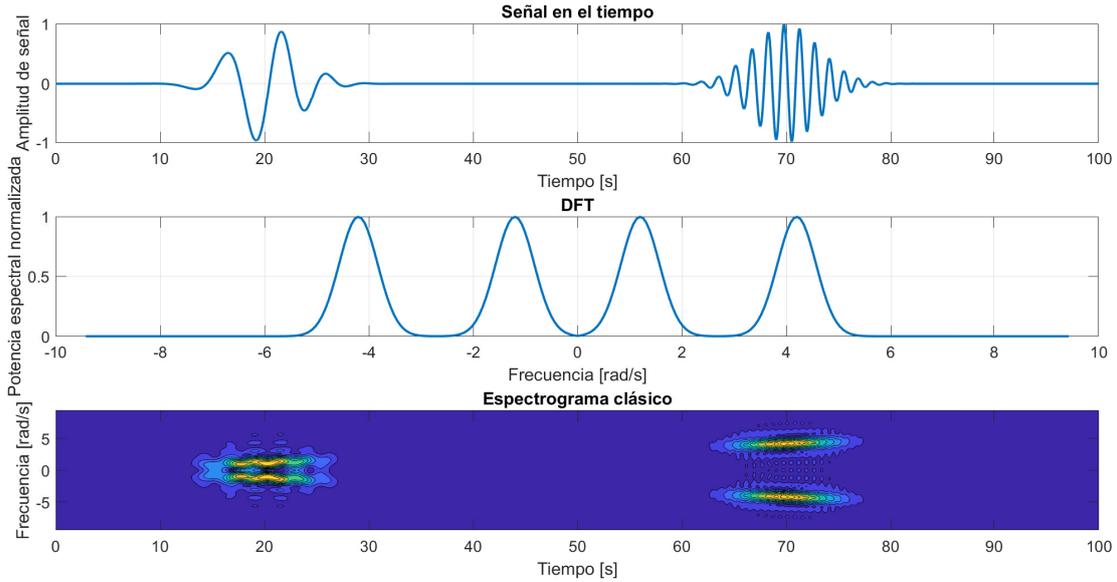


Figura 1: (a) Señal en el tiempo, (b) espectro de potencia normalizado (DFT), (c) espectrograma clásico normalizado.

**Ejemplo 2.1.** Considere una señal muestreada a  $0.002[s]$ , libre de ruido aditivo y con un tiempo de duración de  $100[s]$  dada por:

$$x(t_k) := \left( e^{-0,05(t_k-20)^2} + e^{-0,05(t_k-70)^2} \right) \sin(0,03t_k^2). \quad (13)$$

Se desea determinar su espectro de potencia normalizado (norma de la transformada de Fourier discreta) y su espectrograma.

En la Figura 1 se aprecia la gráfica de la señal, la cual son dos ventanas de señal senoidal con frecuencia creciente, su espectro de potencia normalizado donde se muestra el concentrado de componentes espectrales que ocurren en toda la señal y su espectrograma que presenta la ocurrencia en el tiempo de las componentes espectrales, es decir, 'revela' las características de la señal en el tiempo y en la frecuencia.

A continuación se introduce el concepto de función umbral la cual permite establecer un nivel de potencia para aceptar/rechazar ciertas componentes espectrales y así generar filtros.

**Definición 2.10.** Se dice que una función  $f_u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es un umbral de la función  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dado el parámetro  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene:

$$f_u(t_k, l_k, \dots, z_k) := \begin{cases} f(t_k, l_k, \dots, z_k) & \text{si } f(t_k, l_k, \dots, z_k) \geq \alpha, \\ 0 & \text{si } f(t_k, l_k, \dots, z_k) < \alpha. \end{cases} \quad (14)$$

Si se umbraliza el espectrograma de la señal (13) como en la Figura 2 es posible obtener de manera más clara las características de la señal bajo la base estándar y se elimina información que no contribuye en información a la señal.

**Definición 2.11.** Se dice que un espectrograma con modelo-base  $\mathcal{B}$  está segmentado cuando la norma

transformada Gabor discreta está umbralizada por una función  $f_u$ .

Umbralizar un espectrograma permite segmentar sus componentes espectrales y así identificar las características más sobresalientes por encima del ruido aditivo.

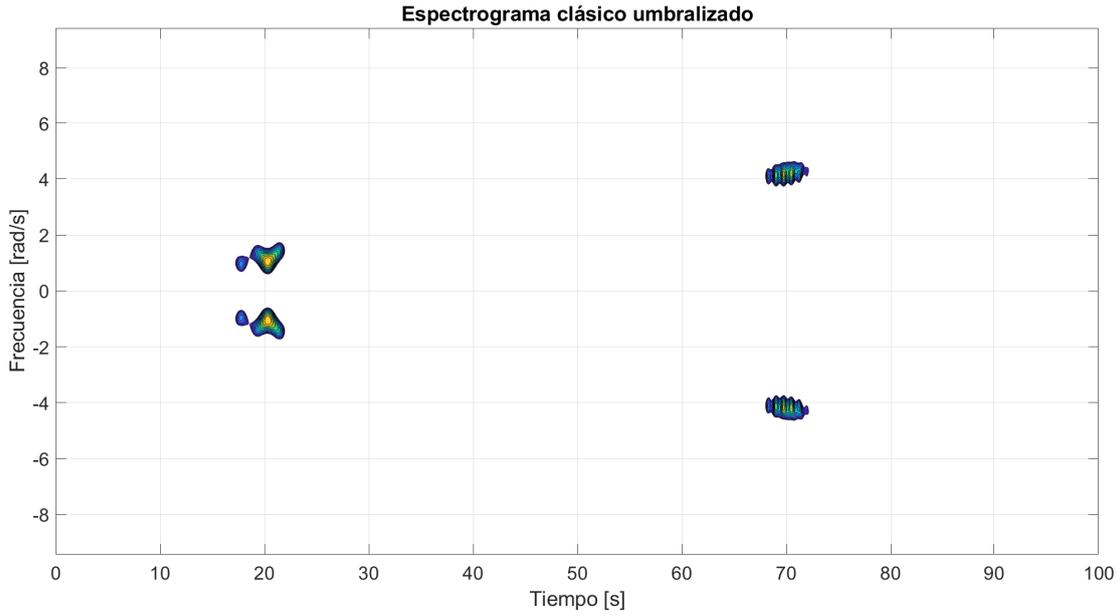
### 3. Desarrollo, implementación y resultados

Como se ha mencionado en la sección anterior, es posible hacer un cambio de base el cual permite 'resaltar' ciertas características deseables de identificar. En las próximas subsecciones se lista la metodología para implementar el procedimiento en tres pasos:

1. Generación del modelo-base donde se propone un conjunto linealmente independiente de funciones con el patrón de características de interés. Es importante que se verifique la independencia lineal de dicho conjunto. El conjunto puede ser obtenido a partir de un modelo matemático que describa al patrón de señales o de manera empírica con señales patrón obtenidas experimentalmente.
2. Construcción del espectrograma normalizado con la base obtenida en el punto anterior por medio de la transformada Gabor discreta y una función de ventaneo adecuada al tamaño de información de la señal a analizar.
3. Segmentación del espectrograma para detectar las características sobresalientes por encima del ruido aditivo.

#### 3.1. Paso 1: Generación del modelo-base

El modelo-base es un conjunto del espacio vectorial que contiene funciones linealmente independientes cuya finalidad es realizar una proyección ortogonal de la señal a analizar con este conjunto y así extraer sus características. En palabras simples, constituye la base de datos de funciones patrón para

Figura 2: Espectrograma clásico normalizado y con un umbral de  $\alpha = 0,7$ .

comparar con alguna señal muestreada de interés. Para su implementación se usa el software Matlab 2024a. Así, como primer paso es la construcción de dicho conjunto.

Con la finalidad de implementar de manera explícita este paso se trabaja con el ejemplo de la sección anterior con algunas modificaciones. Suponga que se desea identificar en una señal los patrones con la forma dada por (13), dicha señal está muestreada a 0.002[s] tiene ruido blanco aditivo con potencia espectral desconocida pero acotada y además se ha contaminado con dos señales senoidales aditivas dadas por  $\sin(2,5t_k)$  y  $\sin(3,5t_k)$  de las cuales se desconoce su amplitud.

Para resolver el problema planteado se observa que el patrón puede darse por medio de una serie de funciones senoidales con el tiempo cuadrático en el argumento. Entonces se sugiere el siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{B} := \left\{ e^{-i\omega_r t_k^2} \right\}_{r=1}^s. \quad (15)$$

Nótese que no se están considerando las ventanas que tiene la propia señal (13) ya que se estiman en la misma función de ventaneo de la transformada Gabor discreta. Es necesario verificar que (15) es un conjunto linealmente independiente.

**Proposición 3.1.** *El conjunto de funciones  $\mathcal{B} := \left\{ e^{-i\omega_r t_k^2} \right\}_{r=1}^s$  con  $\omega_r$  múltiplos de la frecuencia fundamental es linealmente independiente.*

*Demostración.* Si el conjunto de funciones es linealmente independiente entonces para cualquier  $t_k$  se debe cumplir que la ecuación:

$$\sum_{r=1}^s a_r e^{-i\omega_r t_k^2} = 0,$$

tiene únicamente solución trivial para todos los  $a_r$ . En particular, si se elige  $t_k = \sqrt{k}$  para  $k = 0, \dots, s-1$  y se forma el

sistema lineal dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-i\omega_1} & e^{-i\omega_2} & e^{-i\omega_3} & \dots & e^{-i\omega_s} \\ e^{-2i\omega_1} & e^{-2i\omega_2} & e^{-2i\omega_3} & \dots & e^{-2i\omega_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-(s-1)i\omega_1} & e^{-(s-1)i\omega_2} & e^{-(s-1)i\omega_3} & \dots & e^{-(s-1)i\omega_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

la matriz de este sistema de ecuaciones se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (e^{-i\omega_1})^1 & (e^{-i\omega_2})^1 & (e^{-i\omega_3})^1 & \dots & (e^{-i\omega_s})^1 \\ (e^{-i\omega_1})^2 & (e^{-i\omega_2})^2 & (e^{-i\omega_3})^2 & \dots & (e^{-i\omega_s})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (e^{-i\omega_1})^{s-1} & (e^{-i\omega_2})^{s-1} & (e^{-i\omega_3})^{s-1} & \dots & (e^{-i\omega_s})^{s-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

que resulta ser de Vandermonde (Woerdeman, 2015), y como  $e^{-i\omega_j} \neq e^{-i\omega_m}$  para  $j \neq m$  y todo  $t_k$ , entonces es no singular, de aquí que la solución a (16) es únicamente la trivial. Se concluye que el conjunto  $\mathcal{B}$  es linealmente independiente.  $\square$

Sería preferible que fuera además un conjunto ortonormal, sin embargo, dicha relación no es posible verificarla de manera analítica, es decir, el cálculo del producto interno sólo se puede obtener por métodos numéricos para valores de  $s$  bien determinados.

Es importante resaltar que el conjunto de funciones en el modelo-base no necesariamente debe estar dado por ecuaciones definidas analíticamente, es posible implementarlo a partir de una señal patrón, muestrearla a diferentes frecuencias y desfasarla si es posible.

Retomando el ejemplo, es posible generar de manera analítica el modelo-base ya que se conoce la función que describe a la señal original, para ello se ha programado en

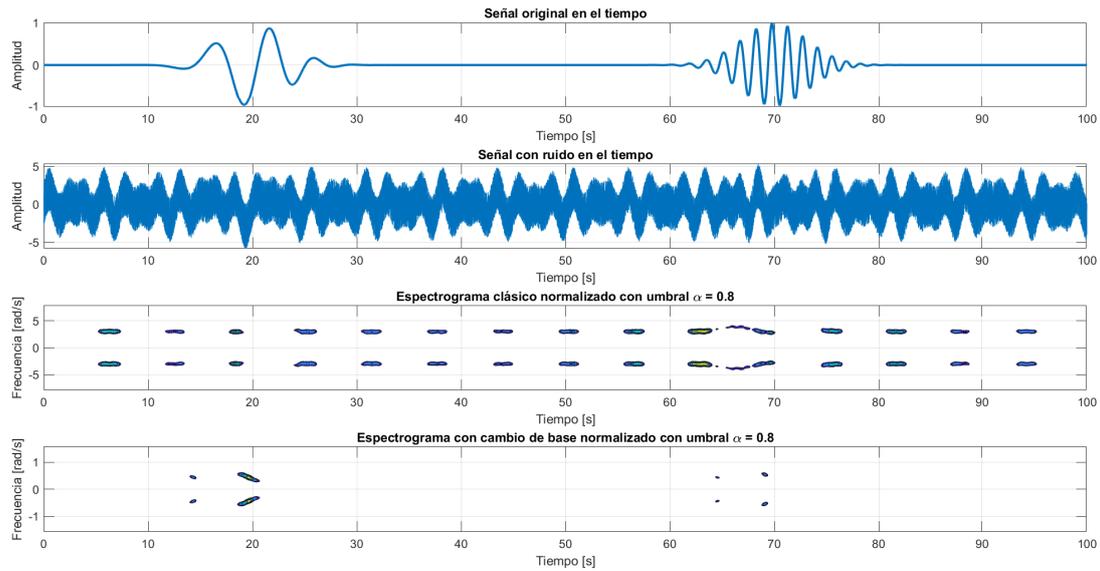


Figura 3: (a) Señal original en el tiempo, (b) Señal en el tiempo con ruido aditivo y señales senoidales indeseables, (c) espectrograma clásico normalizado y umbralizado con ventana rectangular, (d) espectrograma con cambio de base normalizado y umbralizado con ventana rectangular.

Matlab 2024a código que puede encontrarse en el Apéndice A. Las líneas 5 a la 10 declaran las variables fundamentales necesarias como es el tiempo de ventaneo, la duración de la señal la frecuencia de muestreo, la frecuencia fundamental, en las líneas 13 y 14 se definen la cantidad de múltiplos de la frecuencia fundamental a analizar para el espectrograma estándar y con el de cambio de base respectivamente, las líneas 20 y 21 determinan a las funciones de ventaneo con parámetro  $\beta$  dado en la línea 8, finalmente en las líneas 22 y 23 se obtienen los modelos-base para la versión clásica y con cambio de base respectivamente, nótese que el comando *kron* se emplea para vectorizar el código pues realmente calcula un producto de Kronecker. Las líneas 27 y 28 son las señales original y contaminada con ruido aditivo y señales senoidales persistentes indeseables respectivamente.

### 3.2. Paso 2: Generación del espectrograma normalizado con cambio de base

Para generar el espectrograma con cambio de base normalizado se emplea la definición de convolución sobre el modelo-base y la señal de interés.

En el Apéndice A de las líneas 31 a 35 se realiza el cálculo de la transformada Gabor discreta con la base clásica, y de la 38 a 40 la obtención de su espectro de potencia y normalización. Misma situación se repite pero para la transformada Gabor con el cambio de base en las líneas 43 a 52.

Es notable resaltar que hasta esta parte del código ya se tienen los espectrogramas correspondientes, sin embargo, contienen demasiada información principalmente por la señal de ruido que está agregada por lo que se requiere de una umbralización con la finalidad de 'visualizar' mejor los patrones.

### 3.3. Paso 3: Umbralización y segmentación

En esta subsección se aplica un umbral con la intención de 'filtrar' aquellas componentes espectrales que no aportan información de patrón de interés y que están por debajo de cierto umbral de potencia. Ello se observa en la línea 63 del código del Apéndice A, la cual define un vector de valores de interés en las imágenes generadas en la línea 55 a la 91 donde el nivel de umbral elegido es de  $\alpha = 0,8$ . Este tipo de técnicas son comúnmente empleadas en el procesamiento de imágenes binarias para detectar objetos pero aquí se ha implementado en señales muestreadas.

### 3.4. Comparación de resultados

En la Figura 3 primer gráfico se observa la señal de interés a detectar la cual está inmersa de manera aditiva en la señal contaminada con ruido aditivo y otras señales senoidales persistentes dada en el segundo gráfico. Al emplear una ventana de tipo rectangular con  $\beta = 0$  el espectrograma estándar normalizado y umbralizado en el tercer gráfico muestra las componentes espectrales de las señales senoidales persistentes junto con parte del patrón de la señal de interés, esto podría llegar a causar confusión en la identificación. En el cuarto gráfico de la misma imagen, con la misma función de ventaneo se observa que el espectrograma normalizado y umbralizado pero con la base dada en 15, el cual detecta únicamente los patrones de la señal de interés, rechazando el resto de frecuencias.

El proceso anterior se repite pero ahora eligiendo una ventana gaussiana con parámetro  $\beta = 0,6$  y se obtienen los resultados de la Figura 4, observando que en el espectrograma estándar (tercer gráfico de esta figura) siguen apareciendo componentes de las señales senoidales persistentes pero el patrón de interés es mucho más pronunciado, en cambio en el espectrograma con cambio de base (cuarto gráfico) el patrón de interés es perfectamente claro.

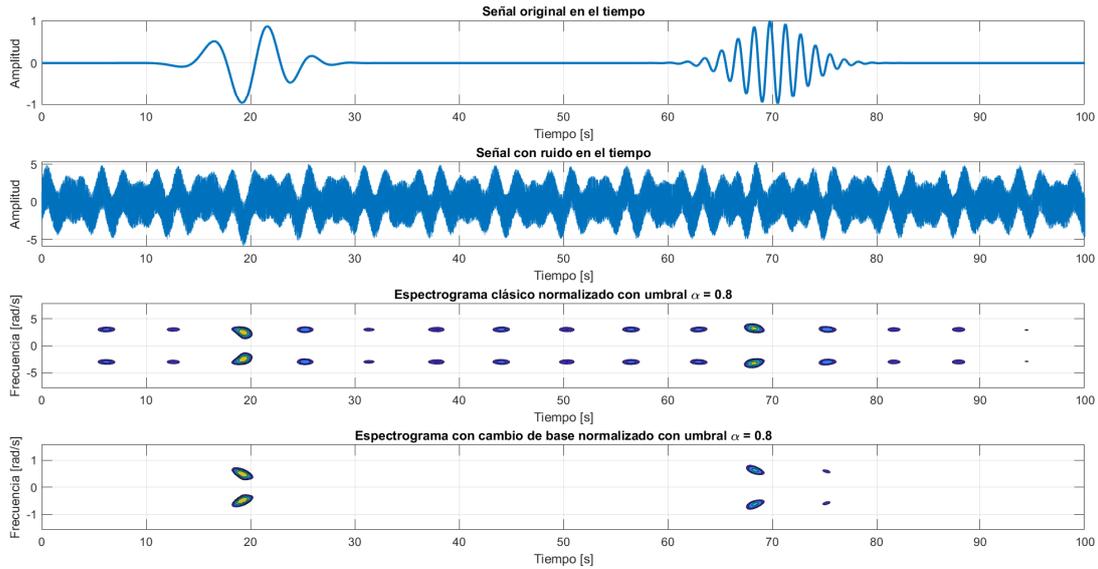


Figura 4: (a) Señal original en el tiempo, (b) Señal en el tiempo con ruido aditivo y señales senoidales indeseables, (c) espectrograma clásico normalizado y umbralizado con ventana gaussiana, (d) espectrograma con cambio de base normalizado y umbralizado con ventana gaussiana.

Es importante mencionar que la información de la señal no se pierde en ambos espectrogramas, simplemente el segundo 'resalta' aquellos patrones del modelo-base que contiene las características de interés. Por otro lado, el espectrograma nos devuelve la 'ubicación temporal' del patrón de interés, es decir, nos indique en qué momento en el tiempo tienen ocurrencia.

Este tipo de identificación basado en modelo resulta útil cuando se tienen suficientes elementos y patrones a detectar o se conoce el modelo matemático que describe las señales de interés, tal es el caso de las ondas gravitacionales, señales analógicas codificadas pero contaminadas con ruido aditivo, señales digitales de satélites de espacio profundo entre otras aplicaciones.

Con la finalidad de validar la eficiencia de este algoritmo, se calcula la relación señal/ruido dada por (11) para el ejemplo y se obtiene:

$$SNR = -1,6303[dB],$$

esto significa que la potencia del ruido y señales persistentes es mayor que la señal de interés y aún así se logra hacer la identificación de los patrones.

### 3.5. Recomendaciones prácticas

Como se observa, hay una serie de parámetros a tomar en cuenta al momento de elegir un modelo-base, de fijar el valor de  $\beta$  y hasta el periodo de muestreo de una señal. Se recomienda tomar en cuenta lo siguiente:

1. La frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia de corte de la señal (Teorema de Nyquist-Shanon, ver (Marques, 2019)), sugiriéndose de al menos cinco veces dicho valor para fines prácticos.
2. El modelo-base debe tener un conjunto de vectores similares a los patrones de interés a detectar, con diferente frecuencia y fase, no necesariamente deben estar dados por una ecuación definida pero sí deben

ser linealmente independientes. Si además el conjunto es ortogonal se tiene garantizado que se va a tener la mejor distribución de componentes espectrales respecto de dicho modelo-base.

3. Tener una gran cantidad de vectores en el modelo-base sin tener certeza de que sean linealmente independientes no es garantía de una mejor identificación de características y ello podría elevar el consumo de recursos computacionales.
4. El tiempo de ventaneo está dado por la duración de cada patrón en la base, el cual será específico para cada aplicación, el parámetro  $\beta$  permite realizar una transición menos abrupta en el ventaneo, similar a los efectos *fade-in* y *fade-out*.

## 4. Conclusiones y trabajos futuros

Se ha observado a lo largo del presente artículo un análisis simplificado basado en Álgebra Lineal para construir cambios de base en espectrogramas con la finalidad de resaltar aquellos patrones de interés conforme un modelo-base.

En comparación con el espectrograma con base estándar se tienen las siguientes ventajas y desventajas:

1. Ventajas observadas:
  - a) Tiene el mismo grado de complejidad computacional que un espectrograma estándar.
  - b) La generación de modelos-base se puede implementar por medio de funciones bien definidas o por medio de una señal patrón obtenida experimentalmente.
  - c) Resalta los patrones de interés mejor que la metodología clásica, incluso con ruido aditivo y otras señales periódicas persistentes.

d) Permite una detección 'visual' de las características de interés por medio de la segmentación del espectrograma resultante.

## 2. Algunas desventajas:

a) El conjunto de funciones del modelo-base no necesariamente es ortonormal aunque sí debiera ser linealmente independiente. Esto implica que se debe establecer dicha independencia antes de implementar el algoritmo.

b) Si no se puede establecer la independencia lineal de los elementos del modelo-base las componentes espectrales obtenidas por la norma de la transformada Gabor discreta tendrán un factor de escalamiento indeseado, además de que se tendrá un costo computacional más elevado, ello se puede mitigar por medio de la normalización aunque no proporcionará la información de potencia espectral absoluta sino relativa, en la mayoría de los casos es suficiente con dicha información.

c) Es sensible al ancho de la ventana y a la forma de la misma, es decir, se pueden obtener diferentes espectrogramas si se modifican los tiempos de ventaneo, sin embargo, el espectrograma estándar tiene la misma desventaja.

d) No es recomendable intentar filtrar el espectrograma con cambio de base y posteriormente aplicar una deconvolución para reconstruir la señal deseada ya que se ha observado que los métodos numéricos existentes inducen un error relativo muy alto el cual no se puede corregir con técnicas computacionales tradicionales.

Como trabajos a futuro se pretende realizar una extensión para el desarrollo de un detector de ondas gravitacionales en señales fuertemente contaminadas con ruido aditivo a partir de los modelos relativistas existentes. Proponer una clasificación de características por medio de Redes Neuronales Artificiales y obtener un proceso de reconstrucción de la señal de interés sin necesidad de usar la deconvolución.

## Referencias

Acevedo, C. M. D. y Duarte, J. E. J. (2014). Development of an embedded system for classification of emg signals. pp. 1–5, Cartagena, Colombia. IEEE.

Alexey, P. y Olga, P. (2024). Real time method and algorithms for fast discrete fourier transform of discrete finite signals. pp. 1–6, Moscow, Russian Federation. IEEE.

Alexey, P., Olga, P., y Natalia, S. (2022). Fast parametric fourier transform. pp. 1–6, Samara, Russian Federation. IEEE.

Bajaj, N. y Kashyap, R. (2012). Extension of wavelet family in fractional fourier domain. pp. 1–4, Surat, India. IEEE.

Bertone, G. (2024). Dark matter, black holes, and gravitational waves. *Nuclear Physics. B*, 1003:10. Id/No 116487.

Cabanillas, J. C., Kemper, G., y del Carpio, C. (2022). A conversion algorithm for ecg signals on a 2d array based on digital signal processing. pp. 105–109, Singapore, Singapore. IEEE.

Chandra, S., Sharma, A., y Singh, G. K. (2019). Denoising of ecg signal using computationally efficient linear phase filtering. pp. 1–8, Kanpur, India. IEEE.

Chaudhury, K. N. y Unser, M. (2009). Construction of hilbert transform pairs of wavelet bases and gabor-like transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57:3411–3425.

Coughlin, M., Christensen, N., Gair, J., Khasamy, S., y Thrane, E. (2014). Method for estimation of gravitational-wave transient model parameters in frequency-time maps. *Classical and Quantum Gravity*, 31(16):14. Id/No 165012.

Cui, Y. y Sfakianakis, E. I. (2023). Detectable gravitational wave signals from inflationary preheating. *Physics Letters. B*, 840:9. Id/No 137825.

El Haoui, Y. y Zayed, M. (2024). On the fractional space-time Fourier transforms. *Integral Transforms and Special Functions*, 35(2):127–150.

Hansen, E. W. y Manwaring, P. K. (2011). Introducing signal processing through an advanced digital design course. pp. 107–111, Sedona, AZ, USA. IEEE.

He, X., Liu, X., y Cao, Z. (2022). Gravitational waveform of moving source with high speed. *Classical and Quantum Gravity*, 39(19):20. Id/No 195020.

Hsu, T. M. (2020). *Fourier series, fourier transforms, and function spaces*. MAA Press, an imprint of the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Ishikawa, T., Takayama, R., y Arai, S. (2015). Fast gabor wavelet transform based on synthesis of gabor spectrum using convolution of gaussian. pp. 327–331, Washington, DC, USA. IEEE.

Jainwal, K., Shah, K., y Sarkar, M. (2015). Low frequency noise reduction using multiple transistors with variable duty cycle switched biasing. *IEEE Journal of the Electron Devices Society*, 3:481–486.

Kantorovich, L. V. y Akilov, G. P. (2014). *Functional Analysis*. Elsevier Science, Burlington, 2nd ed edición.

Khan, S., Alzaabi, A., Iqbal, Z., Ratnarajah, T., y Arslan, T. (2023). A novel digital twin (dt) model based on wifi csi, signal processing and machine learning for patient respiration monitoring and decision-support. *IEEE Access*, 11:103554–103568.

Khunteta, A. y Niranjana, V. (2018). A novel noise reduction technique in cmos amplifier. pp. 779–783, Bangalore, India. IEEE.

Lavrentev, K. y Filimonuk, L. (2023). The method of creating digital signal processing systems for complexes of a nuclear energy objects' decommission. pp. 1–5, Moscow, Russian Federation. IEEE.

Leis, J. (2011). *Digital signal processing using MATLAB for students and researchers*. Wiley, Hoboken, NJ.

Liu, R. (2022). Speech noise reduction system based on combined filter. pp. 611–616, Dalian, China. IEEE.

Loehr, N. A. (2014). *Advanced linear algebra*. CRC Press, Boca Raton, 1st ed edición.

Lugilde, G., Combarro, E. F., y Rúa, I. F. (2024). Functional quantum abstract detecting systems. *Quantum Information Processing*, 23(3):44. Id/No 82.

Magsi, H., Sodhro, A. H., Chachar, F. A., y Abro, S. A. K. (2018). Analysis of signal noise reduction by using filters. pp. 1–6, Sukkur, Pakistan. IEEE.

Marques, P. A. (2019). Digital signal processing education using a low cost student owned laboratory. pp. 15–19, Krakow, Poland. IEEE.

Natalia, P., Olga, P., y Alexey, P. (2024). Efficient method for fast discrete fourier transform of finite signals with high frequency resolution. pp. 1–7, Moscow, Russian Federation. IEEE.

Noskova, E. y Tumakov, D. (2024). Analysis of wavelet transform application for filtering real ecg signals from high-frequency noise. pp. 1–5, Moscow, Russian Federation. IEEE.

O'Leary, M. L. (2021). *Linear Algebra*. Wiley, 1 edición.

Prasad, N., Prakash, D., y Dixit, S. (2023). Implementation of optimized adaptive lms noise cancellation system to enhance signal to noise ratio. pp. 1581–1586, Salem, India. IEEE.

Singh, P., Gupta, A., y Joshi, S. D. (2022). General parameterized fourier transform: A unified framework for the fourier, laplace, mellin and z transforms. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 70:1295–1309.

Soni, K., Gupta, S. K., Kumar, U., y Agrwal, S. L. (2014). A new gabor wavelet transform feature extraction technique for ear biometric recognition. pp. 1–3, Delhi, India. IEEE.

Wang, Z., Xie, R., Liu, Z., Wang, W., Zhou, Y., Liu, X., Li, P., y Rui, Y. (2022). Design and implementation of signal processing system for two-dimensional electric scanning radar. pp. 573–578, Jiangsu, China. IEEE.

Watcharapinchai, N., Aramvith, S., Siddhichai, S., y Marukatat, S. (2009). Dimensionality reduction of sift using pca for object categorization. pp. 1–4, Bangkok, Thailand. IEEE.

Woerdeman, H. J. (2015). *Advanced linear algebra*. Chapman and Hall/CRC, an imprint of Taylor and Francis, Boca Raton, FL, first edition edición.

Zhou, W., Li, J., y Shah, F. (2016). Retrospect and prospect of wavelet and big data: A survey. pp. 307–310, Chengdu, China. IEEE.

## Apéndice A. Listado de programa en Matlab

El listado de código que a continuación se lista permite desarrollar la implementación descrita en las secciones anteriores, fue desarrollado como script en Matlab 2024a.

```

1 clear;
2 clc;
3
4 %% Definición de variables
5 time_wind = 5; % tiempo de ventaneo
6 time_signal = 100; % tiempo de señal
7 cent = time_wind/2; % centro del
   ventaneo
8 param = -0.6; % parámetro de ventana
9 samp_time = 1/500; % tiempo de muestreo
10 frec_fund = 2*pi/samp_time; % Frecuencia
   fundamental
11
12 %% Definición de tiempos, frecuencias y
   ventana
13 frec = frec_fund
   *(-0.0025:0.00001:0.0025); %
   Múltiplos de frec. fundamental
14 frec2 = frec_fund
   *(-0.0005:0.00001:0.0005); %
   Múltiplos de frec. fundamental
   cambio de base
15 tot_freq = length(frec); % cantidad de
   frecuencias
16 tot_freq2 = length(frec2); % cantidad de
   frecuencias
17 tt = linspace(0, time_wind, ceil(
   time_wind/samp_time)); % tiempo de
   ventana
18 t = linspace(0, time_signal, ceil(
   time_signal/samp_time)); % tiempo de
   señal 0 a 100 seg
19
20 window = repmat(exp(param*(tt-cent).^2),
   [tot_freq, 1]); % Definición de la
   ventana
21 window2 = repmat(exp(param*(tt-cent).^2),
   [tot_freq2, 1]); % Definición de
   la ventana
22 y_dat = window.*exp(1i*(kron(frec, tt)
   ')); % generación de modelo base
   clásico
23 y_dat2 = window2.*exp(1i*(kron(frec2, (
   tt.^2)'))); % generación de modelo
   base cambio de base
24
25
26 %% Definición de señal a procesar
27 signal_org = sin(0.03*t.^2).*(exp
   (-0.05*(t-20).^2)+exp(-0.05*(t-70)
   .^2)); %señal original
28 signal_02 = sin(0.03*t.^2).*(exp(-0.05*(
   t-20).^2)+exp(-0.05*(t-70).^2)) +
   1*sin(2.5*t) + 1*sin(3.5*t) + 6*(
   rand(1,ceil(time_signal/samp_time))
   -0.5); % señal a probar
29
30 %% Espectrograma clásico
31 cc1 = zeros(tot_freq, ceil(time_signal/
   samp_time)); % inicialización
32 % Convolución entre las ventanas y la
   señal
33 for i = 1:tot_freq
34     cc1(i,:) = conv(signal_02, y_dat(i
   ,:), 'same');
35 end
36
37 % Espectro de potencia normalizado
38 cc1_norm = abs(cc1);
39 cc1_max_norm = max(max(cc1_norm));
40 cc1_std = cc1_norm/cc1_max_norm;
41
42 %% Espectrograma con cambio de base
43 cc2 = zeros(tot_freq2, ceil(time_signal/
   samp_time)); % Inicialización
44 % Convolución entre las ventanas y la
   señal
45 for i = 1:tot_freq2
46     cc2(i,:) = conv(signal_02, y_dat2(i
   ,:), 'same');
47 end
48
49 % Espectro de potencia normalizado
50 cc2_norm = abs(cc2);
51 cc2_max_norm = max(max(cc2_norm));
52 cc2_std = cc2_norm/cc2_max_norm;
53
54 %% Gráficas
55 figure(1)
56 %Señal original
57 subplot(4,1,1)
58 plot(t, signal_org);
59 xlabel('Tiempo [s]');
60 ylabel('Amplitud');
61 title('Señal original en el tiempo');
62 grid on;
63
64 umbral = 0.8:0.05:1; % niveles de umbral
65 % Señal en el tiempo a probar
66 subplot(4,1,2)
67 plot(t, signal_02);
68 xlabel('Tiempo [s]');
69 ylabel('Amplitud');
70 title('Señal con ruido en el tiempo');
71 grid on;
72
73 % Espectrograma clásico normalizado
74 [X,Y] = meshgrid(t, frec);
75 subplot(4,1,3)
76 contourf(X, Y, cc1_std, umbral);
77 colormap parula
78 xlabel('Tiempo [s]');
79 ylabel('Frecuencia [rad/s]');

```

```
80 title('Espectrograma clásico normalizado
      con umbral \alpha = 0.8');
81 grid on;
82
83 % Espectrograma con cambio de base
84 [X,Y] = meshgrid(t, freq2);
85 subplot(4,1,4)
86 contourf(X, Y, cc2_std, umbral);

87 colormap parula
88 xlabel('Tiempo [s]');
89 ylabel('Frecuencia [rad/s]');
90 title('Espectrograma con cambio de base
      normalizado con umbral \alpha = 0.8'
      );
91 grid on;
```