

**DESDE 2013** https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI



Publicación Semestral Pädi Vol. 12 No. Especial 4 (2024) 261-271

# Efecto estructural del uso de agujeros de aligeramiento en engranes rectos para la industria aeroespacial Spur gear lightening holes effect in the part's structural integrity for aerospace industry

Julio D. Cabal-Velarde<sup>1</sup>, Antonio. Gómez-Jiménez<sup>1</sup>, Javier G. Cabal-Velarde<sup>1</sup>, Azdrubal Guerrero-Serrano<sup>1</sup>

<sup>a</sup> Universidad Aeronáutica de Querétaro, Carr. Querétaro-Tequisquiapan 22154, 76278 Santiago de Querétaro, ORO, México. <sup>b</sup> Tecnológico Nacional de México / Instituto Tecnológico Superior de Irapuato, Carretera Irapuato-Silao km. <sup>c</sup> Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, Área Académica de Ciencias de la Tierra y Materiales, México.

# Resumen

En la industria aeroespacial, el uso de los engranes rectos ha tenido un gran impacto en el desempeño de múltiples sistemas de aeronaves modernas. El uso de agujeros de aligeramiento en los engranajes de la aeronave sirve para reducir su peso y, por consiguiente, mejorar el consumo de combustible de la aeronave. Este trabajo se enfocó a realizar un análisis de la sensibilidad que permite determinar el número máximo y características de los agujeros que se deben maquinar a través del alma del engrane para reducir su peso sin comprometer su integridad estructural. Por otro lado, se busca mejorar la comprensión de los agujeros de aligeramiento y establecer modelos matemáticos que permitan a los diseñadores de aeronaves comprender los efectos mecánicos de estos agujeros sobre la rigidez radial, torsional, y las frecuencias naturales en este tipo de dispositivos mecánicos. Los resultados del análisis de sensibilidad mostraron que es posible maquinar entre 3 y 5 agujeros en el alma del engrane que abarquen hasta un 80% de la altura del alma sin comprometer su integridad estructural. Además, el estudio del diseño de experimentos y las simulaciones en elemento finito mostraron que el uso de agujeros en el alma tiene un efecto más significativo en la rigidez que en la masa removida, por lo que las frecuencias naturales se reducen aumentando el riesgo de una falla en el cuerpo del engrane, si no se tiene cuidado en la remoción de material.

Palabras Clave: Agujero de Aligeramiento, Rigidez Radial, Rigidez Torsional, Frecuencias Naturales, Engranes Rectos.

# Abstract

In the aerospace industry, the use of spur gears has had a major impact on the performance of multiple modern aircraft systems. The use of lightening holes in the aircraft's gears serves to reduce its weight and, consequently, improve the fuel consumption of the aircraft. This research work focused on carrying out a sensitivity analysis that allows determining the maximum number and characteristics of the holes that must be machined through the web of the gear to reduce its weight without compromising its structural integrity. On the other hand, it seeks to improve the understanding of lightening holes and establish mathematical models that allow aircraft designers to understand the mechanical effects of these holes on the radial, torsional stiffness, and natural frequencies in this type of mechanical devices. The results of the sensitivity analysis showed that it is possible to machine between 3 and 5 holes in the gear web spanning up to 80% of the web height without compromising its structural integrity. Furthermore, the study of the design of experiments and the finite element simulations showed that the use of holes in the web has a more significant effect on the stiffness than on the removed mass, so the natural frequencies are reduced, increasing the risk of a failure of the gear body if care is not taken in material removal.

Keywords: Lightening hole, Radial Stiffness, Torsional Stiffness, Natural Frequencies, Spur Gears.

#### Introducción 1.

Los engranajes son relevantes en el funcionamiento de muchas máquinas, ya que son elementos mecánicos utilizados para transmitir potencia de un componente a otro. En la aviación, los engranajes son uno de los productos más demandantes, debido a que son utilizados para múltiples tareas en el buen funcionamiento de los aviones, y las turbinas. Estos

Historial del manuscrito: recibido el 18/06/2024, última versión-revisada recibida el 10/10/2024, aceptado el 07/10/2024, publicado el 30/11/2024. DOI: https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial4.13258



<sup>\*</sup>Autor para la correspondencia: julio.cabal@unaq.mx Correo electrónico: julio.cabal@unaq.mx (Julio Daniel Cabal-Velarde), antoniogj\_95@live.com.mx (Antonio Gómez-Jiménez), javier.ev@irapuato.tecnm.mx (Javier Gustavo Cabal-Velarde), y azdrubal.guerrero@uaeh.edu.mx (Azdrubal Guerrero-Serrano).

componentes los podemos encontrar principalmente en las cajas de engranes de las turbinas comerciales. En la Figura 1, se muestra en la parte externa de la estructura de la turbina (*"Turbine Frame"*), el AGB (Accesory Gearbox), y parte del TGB (Transfer Gearbox) de una turbina comercial CFM56-7B, el IGB (Inlet Gearbox) se encuentra dentro de la Turbina. Estas cajas de engranes conectan accesorios indispensables para el funcionamiento de la aeronave, así como, elementos estructurales rotativos al rotor de alta, para el arranque y funcionamiento de la turbina.



Figura 1: Turbina CFM56-7B con AGB localizado a un lado de la carcasa del ventilador (CFM International, 2024).

Los engranes se pueden manufacturar de diferentes maneras, y de acuerdo con procedimientos de diseño complejos, los cuales suelen ser muy diversos. Su aplicación principal radica en la transmisión de movimiento desde el eje de una fuente de energía (que puede ser un motor de combustión, o un motor eléctrico), hasta otro eje, donde se realiza un trabajo o acción para mover otro sistema. Por ejemplo, PRATT&WHITNEY en la Figura 2, ha construido un motor (PW1000) de transmisión por engranajes, que permite que el ventilador ("FAN"), y el compresor de baja giren a diferentes velocidades para optimizar el rendimiento en cada sección de la turbina. De acuerdo al fabricante, este diseño complejo, y único de caja de engranes planetario, hace girar al ventilador a un tercio de velocidad (RPMs) del compresor de baja.



Figura 2: Turbina PW1000 con caja de engranes planetarios (*the flying engineer*, 2024).

Debido a la cantidad de engranes en las cajas de las turbinas, se han buscado alternativas para reducir el peso de los componentes, y mejorar el rendimiento de las turbinas. Entre los métodos mas usados, está la reducción de tamaño (tomando en cuenta el área, y ancho del engrane), cuya función es reducir el peso del engrane. Otra opción, ha sido escoger materiales más ligeros, que puedan suplir las necesidades que requiera el engranaje para operar correctamente, y uno de los métodos más usados, es el maquinar agujeros de aligeramiento ("*LIGHTNENING HOLES*"), cuyo objetivo, es reducir un poco la masa del engranaje sin afectar su forma, maquinando perforaciones en el cuerpo del engrane (Öztürk, 2019) en la zona del alma, tal cual se muestra en la Figura 3.



Figura 3: Engrane recto con sus características principales, y con agujeros de aligeramiento (Anónimo, S.R.).

Gracias a las nuevas tecnologías, y el uso de sensores para medir, y monitorear el estado de los engranes, existen algunas herramientas (Softwares) muy útiles, como son: SOLIDWORKS, CATIA, ANSYS, entre otros, para ayudar a los diseñadores a realizar productos con una mayor resistencia estructural, de menor peso, y con un alto rendimiento, para operar de manera eficiente (Brahim, 2019), y con un menor consumo de combustible, y por supuesto, en la reducción del costo del producto, que ayuda a los ingenieros y diseñadores, a lograr todo este proceso en un plazo más corto, pero efectivo, y haciendo uso de la simulación.

En los años recientes, se han hecho investigaciones y pruebas experimentales para comprender el efecto de los agujeros de aligeramiento en engranes rectos, utilizando modelos matemáticos, basándonos en conceptos físicos y mecánicos, como la rigidez radial, la torsional (Chen, 2022), y las frecuencias naturales, mediante simulaciones en elemento finito, y con la ayuda de un diseño de experimentos (DOE).

Actualmente el campo aeronáutico y espacial (Angel, 2018), son una de las industrias más complejas e importantes a nivel global, ya que exige una innovación tecnológica casi constante en proyectos de investigación, en cuanto a la seguridad, el uso de materiales más ligeros y resistentes, la eliminación de características geométricas para reducir los tiempos de manufactura, la reducción del consumo de combustible de las aeronaves, así como, los periodos de mantenimiento, reparación de partes, y reducción de costos.

### 2. Metodología de Análisis

El propósito de este proyecto está enfocado en un análisis de factibilidad, y el uso del diseño de experimentos (DOE) para establecer una mejor comprensión de los agujeros de aligeramiento, y establecer modelos matemáticos que permitan a los diseñadores de aeronaves, comprender los efectos estructurales de estos agujeros sobre la rigidez radial, la torsional, y las frecuencias naturales en este tipo de dispositivos mecánicos. El parámetro más importante es la potencia que se va a transmitir a través de estos engranes, la cual se va a traducir en un torque (Par Torsional), y que a su vez va a generar fuerzas y esfuerzos en los dientes del engrane, y en el cuerpo. Para calcular el par torsional producido por la transmisión de potencia, utilizamos la (1), donde *P* sería la potencia transmitida, y  $\eta$  es la velocidad angular del engrane en "rad/s". El par torsional genera una fuerza radial  $W_R$ , y una fuerza tangencial  $W_T$  en el punto de contacto entre diente y diente, tal cual se muestra en la Figura 4. Los dientes de los engranajes rectos se fabrican con perfil envolvente (Involuta) o perfil cicloidal. La mayoría de los engranajes están fabricados por perfil envolvente, y con un ángulo de presión de 20°, en donde  $W_N$  es la fuerza normal en el contacto de superficie a superficie entre dientes (Norton, 2010).

$$T = \frac{P}{\eta}.$$
 (1)

La fuerza tangencial es la fuerza que se ejerce desde los dientes del piñón sobre los dientes del engrane, siendo ésta la componente horizontal de la fuerza normal, mientras la fuerza radial es la componente vertical. La fuerza tangencial multiplicada por el radio nos daría el par de torsión en el engrane, es decir, estaría dada por la (2), en donde *D* sería el diámetro de paso del engrane, y al final se obtendría la fuerza tangencial en función de la potencia, y de la velocidad angular del engrane, tal cual se muestra en la (3). Una vez teniendo la fuerza tangencial, se pude calcular la componente radial, y la fuerza normal por simple trigonometría.



Figura 4: Fuerzas aplicadas sobre el diente de un engrane (Norton, 2010).

$$T = W_T R = W_T \left(\frac{D}{2}\right) = \frac{P}{\eta},\tag{2}$$

$$W_T = \frac{2P}{D\eta'},\tag{3}$$

La fuerza normal  $W_N$ , y la fuerza radial  $W_R$  se calculan a partir de la fuerza tangencial, tal cual se describen en (4) y (5).

$$W_R = W_T tan \emptyset, \tag{4}$$

$$W_N = W_T sec\emptyset, \tag{5}$$

Conociendo las fuerzas en el engrane, se procede a calcular esfuerzos y deformaciones. Sin embargo, el estudio en este documento, se centra principalmente en el cuerpo del engrane, sin considerar los dientes. El objetivo es aplicar una fuerza radial, y posteriormente una fuerza tangencial unitaria en la parte superior del cuerpo del engrane, con el fin de calcular la rigidez radial, y su rigidez torsional. Finalmente, hacer un estudio de factibilidad en cuanto a las frecuencias naturales al maquinar agujeros de aligeramiento en la parte del alma del engrane. El proceso de maquinado de los agujeros es muy sencillo, y no implica un aumento excesivo en los costos de manufactura. Es más barato remover material por medio de un agujero.

Una manera sencilla de entender el efecto de la remoción de masa, y la rigidez en una estructura con respecto su comportamiento dinámico con el fin de evitar una resonancia (frecuencias naturales), es partiendo de un sistema masa resorte. En un sistema masa-resorte de un grado de libertad, y partiendo de la segunda ley de Newton en (6) se obtiene que:

$$Ma = -kx, (6)$$

Donde "M" es la masa del objeto, "k" la rigidez, y "a" es la aceleración de la masa. Por lo tanto, la ecuación anterior sería representada por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, tal cual se indica en (7):

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-\mathbf{k}\mathbf{x}}{\mathsf{M}},\tag{7}$$

Donde la propuesta de solución para esta ecuación diferencial está dada por (8):

$$x = Asen(\omega_0 t), \tag{8}$$

Derivando dos veces la propuesta de solución, y sustituyendo en (7) se obtiene:

$$-kx/M = -A\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t), \qquad (9)$$

Simplificando la expresión (9), se tiene:

$$\omega_o{}^2 = \frac{k}{M},\tag{10}$$

Como se puede observar en (10), " $\omega_o$ " sería la frecuencia natural del sistema, considerando la relación para la frecuencia natural en Hertz ( $w_o = 2\pi\omega_N$ ), se obtiene que, para el sistema dado, la primer frecuencia natural tiene una magnitud de:

$$\omega_N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}},\tag{11}$$

Al simplificar el engrane a un sistema masa-resorte, donde k es la rigidez equivalente del cuerpo del engrane, y M su masa equivalente. Se puede observar, que el aumento o disminución de las frecuencias naturales, quedará en función de la rigidez, y la masa del sistema. En este sistema masa-resorte, si reducimos la masa y mantenemos la rigidez, es obvio que las frecuencias naturales aumentan. Sin embargo, en un elemento estructural más complejo (engrane) al quitar masa, la rigidez disminuye en ciertas direcciones, pero sin saber cuál de los dos parámetros tiene más impacto sobre las frecuencias naturales (Fernandez, 2020), es por eso que hay que predecir adecuadamente su comportamiento por algún método numérico, en este caso, elemento finito. En un engrane al quitar masa, estamos reduciendo su peso, pero no se sabe en cuánto se está impactando la rigidez en las distintas direcciones, sería complicado predecir el comportamiento dinámico sin evaluar la rigidez de forma analítica o por simulación, de ahí la importancia de este tipo de estudios.

La rigidez de un cuerpo es una medida de la resistencia que ofrece un cuerpo elástico a la deformación. Por ejemplo, en un sistema masa-resorte con un solo grado de libertad, se tiene que la rigidez sería calculada con (12).

$$k = \frac{F}{\delta},\tag{12}$$

Donde "F" es la fuerza aplicada sobre el cuerpo, y " $\delta$ " es el desplazamiento producido por la fuerza en la misma dirección. Entonces para los casos analizados en este documento, la rigidez radial sería obtenida directamente de la simulación en elemento finito de la siguiente manera, tal cual se muestra en (13).

$$k_R = \frac{F_R}{\delta_R},\tag{13}$$

Por otra parte, la rigidez en la dirección tangencial estaría dada por (14).

$$k_T = \frac{F_T}{\delta_T},\tag{14}$$

La rigidez torsional es la medida de la resistencia a la deformación debido a un torque aplicado a un eje, y esta medida se puede calcular con (15).

$$k_{Tor} = \frac{T}{\theta} \,, \tag{15}$$

donde "*T*" es el par torsional, y " $\theta$ " es la deformación angular de giro. Entonces tenemos que la rigidez torsional de una barra circular, que es sometida a un par de torsión se puede calcular de manera analítica con (16):

$$k_{Tor} = \frac{\mathrm{T}}{\theta} = \frac{GJ}{L},\tag{16}$$

donde "G" es el módulo de elasticidad al corte, "J" es el momento polar de la sección transversal, "L" es la longitud o el espesor del cuerpo del engrane. Para deformaciones pequeñas se puede asumir que  $\delta_T = R\theta$ , y que  $T = F_T R$ , por lo que la rigidez torsional estaría dada por (17)

$$k_{Tor} = \frac{\mathrm{T}}{\theta} = \frac{F_T R^2}{\delta_t}.$$
 (17)

Finalmente, el análisis modal se basa en ecuaciones del movimiento (Rodríguez, 2005) que gobierna un sistema de N grados de libertad, tal cual se muestra en (18):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}.$$
 (18)

donde [*M*], [*c*], [*k*] son matrices de dimensiones N x N de masa, amortiguamiento y rigidez,  $\{x(t)\}$  y  $\{f(t)\}$  son vectores de dimensiones N x 1 que recogen variaciones temporales de los desplazamientos y de las fuerzas.

Para los casos sin amortiguación, que es el caso tal cual, analizado en este documento, las ecuaciones que gobiernan el movimiento se reducen de la siguiente forma en (19):

$$[M]{\ddot{x}(t)} + [k]{x(t)} = {f(t)}.$$
(19)

Debido a que se considera el caso de respuesta libre, por lo que f(t) es nulo. La solución es de la forma  $\{x(t)\}=\{X\}e^{i\omega t}$  donde  $\{X\}$  es un vector compuesto N x 1 de amplitudes independientes del tiempo.

Sustituyendo en (19) con  $\{f(t)\}$  nulo se obtiene la expresión matemática (20):

$$([k] - \omega^2[M])\{X\}e^{i\omega t} = \{0\}.$$
 (20)

Cuyas soluciones diferentes de la trivial satisfacen: det $|[k] - \omega^2[M]| = 0$ , y de donde se obtienen los N valores de " $\omega^2$ ", que son las frecuencias naturales del sistema sin amortiguación.

La solución se puede expresar en dos matrices N x N que son:  $[\overline{\omega_r}^2]$ ,  $[\Psi]$ , donde  $\overline{\omega_r}^2$  es el r-esimo autovalor o frecuencia natural al cuadrado, y  $\{\Psi\}$  es una descripción del correspondiente modo de vibración.

Se plantearon dos modelos matemáticos para los cálculos de la rigidez radial y torsional. Modelo Matemático 1: "Cuerpo del engrane basándonos en la rigidez radial". El modelo se basa en el concepto de la rigidez por secciones, y se toman las diferentes secciones como resortes en serie, donde "h<sub>s</sub>" es la altura del área de soporte de los dientes, "h<sub>w</sub>" es la altura del alma, "h<sub>b</sub>" es la altura en la base del alma, "t<sub>s</sub>" el ancho del área de soporte de la base del alma, y "t<sub>t</sub>" el ancho en el área de soporte de la base del alma, el valor de "t<sub>t</sub>" representa el espesor de diente en la base. La Figura 5 muestra los parámetros de los dos modelos matemáticos.



Figura 5: Modelos matemáticos para el cálculo de rigidez.

Del modelo matemático 1 se tiene que la rigidez radial está dada por la formulación matemática (21):

.

$$K_{RS} = \frac{1}{\frac{h_s}{t_s t_t E} + \frac{h_w}{t_w t_t E} + \frac{h_b}{t_s t_t E}}.$$
(21)

Modelo Matemático 2: "Cuerpo del engrane basándonos en la rigidez torsional". Para este análisis se usa el concepto de la rigidez torsional en función de la fuerza tangencial, y de la deformación en la dirección de la fuerza tangencial. Por lo

tanto, la rigidez tangencial se calcula con la (22) (Antonio, G. y Julio C., 2024).

$$k_{Tor} = \frac{T}{\theta} = \frac{F_T R^2}{\delta_t}.$$
 (22)

La obtención de las frecuencias naturales se basará exclusivamente del análisis modal, éste se basa en ecuaciones del movimiento que gobierna un sistema de N grados de libertad, utilizado en los softwares de simulación de elemento finito (ANSYS®).

# 3. Estudio de Factibilidad del Cuerpo del Engrane

Para el estudio de factibilidad de los agujeros en el cuerpo del engrane, se realizó un *BENCHMARK* de los parámetros dimensionales principales de los engranes del *AGB* de una turbina CFM56-3. Las dimensiones del cuerpo del engrane se realizaron en base a los datos obtenidos del motor CFM56-3, motor que se muestra en la Figura 6.



Figura 6: Motor CFM56-3, AGB en la parte externa de la turbina (CFM International, 2024).

El modelo del cuerpo del engrane de prueba para el estudio se muestra en la Figura 7. Este modelo fue seleccionado en base al *BENCHMARK* referente al espacio dimensional usado en los engranes del AGB de la CFM56-3, y se realizaron las mediciones dimensionales de todos los engranes.

Para el estudio de factibilidad se utilizó el engrane mostrado en la Figura 7. El objetivo del estudio consistió en maquinar agujeros en el alma del engrane, desde 3 a 5 agujeros máximo, variando el tamaño del agujero, y haciendo una comparación con respecto a un engrane sin agujeros.

El tamaño de los agujeros se basó en el tamaño del alma del engrane, se utilizaron tamaño de agujeros desde el 50%, 65% y 80% de la altura del alma. Se seleccionaron estos tamaños para quitar suficiente masa, y no comprometer la integridad estructural del cuerpo del engrane. Además de que el fin principal de este estudio, es comprender el impacto de estos agujeros sobre la integridad estructural de los engranes.



Figura 7: Engranes para el estudio de sensibilidad con sus características geométricas.

Los modelos se realizaron en SOLIDWORKS, y las simulaciones en elemento finito se llevaron a cabo en ANSYS. Se aplicaron cargas unitarias para obtener las rigideces radiales, y las torsionales. También se realizaron análisis modales para obtener las frecuencias naturales para el modelo sin agujeros, y con agujeros.

En cada uno de estos engranes, se generó la malla apropiada (análisis de convergencia de malla) para su análisis en elemento finito. Para las simulaciones de las rigideces se establece como una estructura estática para implementar el soporte fijo en el engrane en la zona interna del cuerpo, así como también, la fuerza que se aplicaría sobre el modelo. La Figura 8 muestra las zonas de aplicación de la fuerza unitaria.



Figura 8: Fuerza nodal aplicada sobre un engrane de prueba en diferentes puntos de la superficie externa del cuerpo.

En la Figura 9, se muestra la deformación generada por una fuerza tangencial aplicada en la parte externa del cuerpo del engrane, sobre una zona ubicada en uno de los agujeros de aligeramiento, la fuerza aplicada es unitaria, cuya deformación máxima en el modelo se muestra en color rojo. La deformación máxima es de  $\delta = 7.268 \times 10^{-7}$  in en la dirección tangencial. Con la deformación obtenida se puede determinar la rigidez torsional, y ésta es de  $k_{Tor} = 2.66 \times 10^{-7}$  lb · in.



Figura 9: Deformación en la dirección tangencial de la fuerza unitaria, en una zona ubicada sobre un agujero de aligeramiento.

En la siguiente simulación (Figura 10), se aplicó una fuerza radial de 1 lb sobre una zona específica donde se ubica uno de los agujeros de aligeramiento, obteniendo una deformación  $\delta = 5.121 \times 10^{-7}$  in. Con este resultado obtenido de la simulación, se usaría la (7) para obtener su rigidez radial  $k_R =$  $1.95 \times 10^6$  lb/in.



Figura 10: Deformación en la dirección radial de la fuerza unitaria, en una zona ubicada sobre un agujero de aligeramiento.

En la Figura 11, se aplicó una fuerza tangencial de 1 lb sobre una zona donde no había ningún agujero de aligeramiento, solo la parte sólida del alma, cuya deformación dio como magnitud  $\delta = 7.22 \times 10^{-7}$ in, y su rigidez torsional  $k_{Tor} = 2.68 \times 10^7 \ lb \cdot$ *in*.



Figura 11: Deformación en la dirección tangencial de la fuerza unitaria, en una zona sobre al alma donde no hay agujero.

En la Figura 12, la deformación se generó por la aplicación de una fuerza radial de 1 lb sobre una zona sin agujeros, cuya deformación radial dio como resultado  $\delta = 4.21 \times 10^{-7}$  in, y una rigidez radial  $k_R = 2.37 \times 10^6$  lb/in sobre la zona del alma sólida.

Para la obtención de las frecuencias naturales, se realizó un análisis modal en ANSYS, en el cual se establece el máximo número de modos de vibración de 10. La Figura 13, muestra la primera frecuencia natural para el modelo de prueba de 3 agujeros, con ocupación del agujero en el alma del 80%.



Figura 12: Deformación radial con fuerza aplicada en una zona sobre el alma donde no hay agujero (alma sólida).



Figura 13: Primera frecuencia natural del modelo de 3 agujeros  $(1^{n} \text{ frecuencia Natural} = 1691.4 \text{ hz}).$ 

De los resultados obtenidos por las simulaciones en elemento finito, y los modelos matemáticos, se puede observar en la Figura 14, que el usar agujeros de aligeramiento, reduce tanto las frecuencias naturales, como la rigidez radial y la torsional. Sin embargo, de acuerdo con el estudio de sensibilidad, y a un análisis estructural que se documenta en la siguiente sección, se recomienda reducir el peso en los engranes utilizando hasta 5 agujeros máximo con un 80% de ocupación del alma, ya que la integridad estructural del engrane recto es asegurada.

En las Figuras 14 y 15, se puede apreciar la reducción de la rigidez radial y la torsional, así como también de las frecuencias naturales. Se puede notar como la rigidez radial se reduce en mayor magnitud, si la fuerza aplicada es sobre un agujero, que sobre el alma-sólida. A pesar de esta reducción, la rigidez radial sigue siendo alta, no afectando el comportamiento del engrane.

La Figura 14 muestra de manera clara, como el reducir volumen en el cuerpo del engrane, se reduce la rigidez radial, la rigidez torsional, y las frecuencias naturales. En la Figura 14 se puede observar el comportamiento del cuerpo en función de la remoción de material. Podemos observar que entre mayor sea el tamaño de agujero, mayor será la reducción en las respuestas analizadas. La Figura 15 muestra el mismo comportamiento, pero en menor magnitud.

Para comprobar de manera visual la reducción de las frecuencias naturales con el aumento de agujeros en el engrane (Figura 16), se puede observar como el aumento en el número de agujeros, reduce las frecuencias naturales generados sobre el engrane de prueba.

La Figura 16, muestra las frecuencias naturales en función de los modos de vibración para el caso sin agujeros, y con agujeros (Figura 17). Se puede notar como las frecuencias naturales disminuyen con el número de agujeros sobre el alma. Comportamiento importante para el diseñador, gracias a este tipo de estudios.



Figura 14: Diagrama de relación de reducción de volumen respecto a la reducción de la rigidez torsional, la radial y de las frecuencias naturales, en donde las fuerzas unitarias están directamente sobre los agujeros de aligeramiento en los engranes con 5 agujeros.



Figura 15: Diagrama de relación de reducción de volumen respecto a la reducción de la rigidez torsional, la radial y de las frecuencias naturales, en donde las fuerzas unitarias están directamente sobre el alma sólida en los engranes con 5 agujeros.



Figura 16: Gráfica comparativa entre las frecuencias naturales generadas en los 5 primeros modos de vibración en cada cuerpo del engrane, y con diferentes agujeros.



Figura 17: Los primeros 5 modos de vibración, y sus frecuencias naturales para el engrane de prueba con 5 agujeros al 80% de ocupación del alma.

#### 4. Diseño de Experimentos (DOE)

Con los resultados obtenidos de las pruebas de sensibilidad, se continuó con la siguiente fase, que fue el de crear un diseño de factorial completo a partir de los datos adquiridos de los engranes rectos de la caja de engranes de la turbina comercial CFM56-3. La Figura 18 muestra los principales parámetros utilizados en el DOE. Este tipo de estudios, hoy en día son muy importantes en la industria, ya que al final con las simulaciones, y resultados del diseño de experimentos, se pueden obtener las ecuaciones de regresión para determinar las diferentes respuestas que se están analizando en este trabajo de investigación.



Figura 18: Parámetros geométricos medidos para el DOE.

Las dimensiones obtenidas de cada parámetro, así como el espacio de diseño están contenidas en la Tabla 1. El diseño de factorial completo es un 2<sup>7</sup>, por lo que se generaron 128 modelos diferentes para el estudio. La Figura 19 muestra 4 de los 128 modelos generados de los cuerpos de los engranes.

Tabla 1: Espacio de diseño del DOE.					
Parámetro	Descripción	Espacio de diseño del DOE			
		Min	Max		
ts	Ancho de la base del diente "t <sub>s</sub> " (in)	0.2591	0.9334		
$t_{\rm w}$	Ancho del alma (in)	0.0965	0.1774		
$h_s$	Altura radial de la base del diente "h <sub>s</sub> " (in)	0.1935	0.2489		
$h_b$	Altura radial del eje soporte "h <sub>b</sub> " (in)	0.1575	0.2026		
$d_s$	Diámetro del soporte de	0.9981	1.8749		

	eje (in)		
$h_{w}$	Altura del alma (in)	0.9303	2.2334
Ν	Numero de agujeros	3	5

Se utilizó el software de MINITAB para generar el factorial completo de los 128 modelos. A los modelos se les aplicaron las mismas condiciones de frontera del análisis de sensibilidad para obtener las diferentes respuestas, como es la rigidez radial, la torsional, y las frecuencias naturales del componente.

Finalmente se obtuvieron 7 ecuaciones de regresión del análisis del DOE. Para una mayor precisión de los resultados en las ecuaciones de regresión, se determinó usar los 7 términos, y todas sus interacciones. Estas ecuaciones de regresión sirven para evaluar cualquier tipo de engrane con agujeros de aligeramiento dentro del espacio de diseño del DOE.

En la gráfica de Pareto de la rigidez radial sobre los agujeros (Figura 20), el factor que tiene un mayor impacto es  $h_w$  (Altura del alma), y le siguen los términos como  $t_s$  (Ancho de Base-Diente) y  $t_w$  (Ancho del alma), cuyos factores implican un aumento en la rigidez cuando aumentan su valor, y hay algunas interacciones entre los parámetros que también son significativos. Prácticamente, de los 7 parámetros, el único valor insignificante sería " $h_b$ ", que es la altura radial en la base del alma del engrane.



a partir del factorial completo.

En la Figura 21, se muestra la gráfica de efectos principales para la rigidez radial, de ahí se puede observar que los factores que reducen la rigidez al aumentar su magnitud son la altura del alma (h<sub>w</sub>) y el número de agujeros (N), el resto de los factores aumentaría la rigidez con aumento en su magnitud.



Figura 20: Gráfica Pareto de efecto de rigidez radial sobre agujeros.



Figura 21: Gráfica de efectos principales para la rigidez radial sobre agujeros (lb/in).

En el caso de la rigidez torsional sobre agujeros, las gráficas de Pareto (Figura 22), muestran que los términos  $h_w$ ,  $d_s$  y N son significativos en la ecuación de regresión, y que en la gráfica de interacciones muestra un impacto insignificante de la mayoría de las interacciones. La gráfica de efectos principales (Figura 23) nos indica que la rigidez torsional se ve disminuida con un incremento en la altura del alma, y un incremento en el número de agujeros.



Figura 23: Gráfica de efectos principales para la rigidez torsional (lb-in) sobre agujeros.

En la gráfica de efectos principales para la primera frecuencia natural (Figura 24), el factor más relevante es la altura del alma (h<sub>w</sub>), le siguen en menor proporción el espesor del alma (t<sub>w</sub>), y el ancho de soporte del diente (t<sub>s</sub>). La Figura 25 muestra que un aumento en h<sub>w</sub> y t<sub>s</sub>, implica una disminución en la frecuencia natural, por otro lado, un aumento en el espesor del alma, indica un incremento en la frecuencia natural. En la Figura 26, se muestra una gráfica normal de efectos para la rigidez torsional, en donde se observan los parámetros significantes, y los que no son significantes, este tipo de gráficas se obtuvieron para todas las respuestas a analizar. Sin embargo, en este documento solo se ilustra para la rigidez torsional. La Figura 27 muestra la gráfica de interacciones entre los diferentes parámetros para la rigidez torsional sobre agujeros, y se puede observar que no hay ninguna intersección entre las líneas, por lo que indica que no hay interacción significativa entre los parámetros.



Figura 24: Gráfica Pareto de frecuencias naturales.



Figura 25: Gráfica de efectos principales de las frecuencias naturales (Hz).



Figura 26: Gráfica normal de la rigidez torsional sobre agujeros.



Figura 27: Gráfica de interacciones de la rigidez torsional sobre agujeros.

Analizando cada una de las gráficas tanto la Normal, el Pareto, y la de efectos principales e interacciones en cada ecuación de regresión, el termino de mayor relevancia fue el "h<sub>w</sub>", siendo un factor de entrada para todas las ecuaciones de regresión, y diferentes combinaciones. Al final después de un análisis extensivo, se llegó a la conclusión de que simplificar o

reducir de tamaño las ecuaciones podría afectar en la precisión de las ecuaciones de regresión. Por lo tanto, se optó por transferir las 7 ecuaciones a programas como MATLAB, SCILAB y EXCEL para poder utilizarlas de manera efectiva, y usando todos los términos de las ecuaciones. Se utilizaron estas plataformas para validar los resultados, y que el diseñador utilice las de su preferencia.

# 5. Análisis Estructural del Engrane de Prueba

Se realizó un análisis estructural del engrane de prueba con y sin dientes (modelo simplificado y conservativo), para corroborar que no se está comprometiendo la integridad estructural de los engranes, y esto con el fin de demostrar que los esfuerzos generados sobre los modelos en la zona del Alma (*web*) son menores a los alcanzados en la zona de la raíz del diente, causados por la flexión del diente. Para estas simulaciones se requirió partir del esfuerzo permisible en la raíz del diente al recomendado por ANSI/AGMA 2001-D04 y 2102-D04, y usando la ecuación de Flexión de Lewis (Budynas, 2008), de ahí se obtienen las fuerzas radial y tangencial que serán aplicadas a los modelos.

Los datos de entradas son:  $\sigma_{Permisible} = 70,000 \, psi$   $t_s = 0.9013 \, in$   $l_{diente} = 0.2664 \, in$   $t_{diente} = 0.29 \, in$   $\emptyset_{diente} = 20^{\circ}$ Nodos en la base del dient

Nodos en la base del diente = Dato variable dependiendo de la malla.

Se parte del esfuerzo permisible de la (23).

$$\sigma_{Permisible} = \frac{6(l_{diente})(W_t)}{(t_s)(t_{diente})^2}$$
(23)

De la ecuación de Lewis se despeja la fuerza tangencial aplicada ( $W_T$ ), dada por (24).

$$W_T = \frac{(\sigma_{Permisivo})(t_s)(t_{diente})^2}{6(l_{diente})}$$
(24)

De esta ecuación nos da como resultado  $W_T = 3319.540$  lb. De  $W_T$  se usó para obtener  $W_R$  por medio de (25). Así como también el momento aplicado (M<sub>o</sub>) en (26). Considerando de manera conservativa que las cargas están en la punta del diente.

$$W_R = W_T \tan \phi_{diente} \tag{25}$$

$$M_o = (W_T)(l_{diente}) \tag{26}$$

De estas ecuaciones se obtuvieron resultados de  $W_R$ =1208.214 lb y  $M_o$  =884.326 lb-in. El momento se va a utilizar para el engrane sin dientes. Para las simulaciones, los resultados obtenidos se dividieron por el número de nodos en donde se aplicaría las fuerzas tangenciales y radiales, tal cual se muestran en (27) y (28).

Fuerza nodal radial= 
$$W_t$$
 /Nodos(27)Fuerza nodal tangencial=  $W_r$ /Nodos(28)

Con los datos obtenidos, se modeló un engrane sin agujeros, pero con 41 dientes en ANSYS. Este engrane en conjunto con dos engranes sin dientes (uno sin agujeros, y el otro con 5 agujeros al 80% de ocupación del alma). En el primer caso, el engrane sin agujeros, y sin dientes, se pueden observar que los esfuerzos generados sobre el cuerpo del engrane (Figuras 28 y 29), muestran que el esfuerzo efectivo generado sobre el engrane no afecta la integridad estructural del cuerpo del engrane. Esfuerzos efectivos en el alma son menores a 30 ksi, esfuerzos menores inclusive al permisible en la raíz del diente.



Figura 28: Fuerzas nodales aplicadas sobre el Modelo\_F5 con 37 nodos en la base del diente, como también el soporte fijo sobre la pieza.



Figura 29: Esfuerzos de von-Mises (Modelo\_F5) generados en el cuerpo del engrane sin agujeros de aligeramiento.

En el segundo caso (Figuras 30, 31, 32 y 33) con el engrane sin dientes (Modelo\_F5) con 5 agujeros de aligeramiento al 80% de ocupación del alma, se le aplicaron las mismas fuerzas tangencial y radial, pero en este caso se aplicó en dos zonas distintas, el primero sobre uno de los agujeros de aligeramiento, y el otro sobre el alma-sólida, donde los esfuerzos efectivos fueron menores a 40 ksi.



Figura 30: Fuerzas nodales aplicadas sobre el engrane (Modelo\_F5) con 5 agujeros con 39 nodos en la base del diente, sobre uno de los agujeros de aligeramiento.



Figura 31: Fuerzas nodales aplicadas sobre un engrane (Modelo\_F5) con 5 agujeros, y 39 nodos en la base del diente, sobre el alma-sólida.



Figura 32: Esfuerzos de von-Mises generados en el engrane (Modelo\_F5) en uno de sus agujeros de aligeramiento.



Figura 33: Esfuerzos de von-Mises generados en el engrane (Modelo\_F5) en la zona del alma-sólida.

En el último caso (Figura 34 y 35) se utilizó otra vez el engrane (Modelo\_F5) sin agujeros de aligeramiento, pero usando sus respectivos 41 dientes para simular una situación más real, y obtener los esfuerzos generados sobre el modelo. En la simulación se detectó el mismo patrón de esfuerzos que se vio en el primer caso, con la única diferencia que la mayor concentración de esfuerzos estaba principalmente sobre el diente, lo cual demuestra que incluso con sus 41 dientes el esfuerzo generado sobre el engrane no genera un riesgo estructural sobre el alma-sólida.



Figura 34: Esfuerzos de von-Mises generados en el engrane en los dientes, y en la zona del agujero de aligeramiento.



Figura 35: Esfuerzos de von-Mises generados en el engrane en los dientes, y en el área del alma sólida.

#### 6. Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran como los agujeros de aligeramiento, ya sea aumentando su número en el alma (*web*) o aumentando el tamaño de los agujeros, atribuye a una reducción de la rigidez torsional, radial y de las frecuencias naturales. De ahí la importancia de este tipo de análisis para entender que tanto material se pudiese remover para reducción de peso, pero manteniendo un diseño adecuado en cuanto a su integridad estructural. El objetivo de usar al final agujeros de aligeramiento es factible, ya que es más fácil remover material de esta manera que modificar el diseño del cuerpo del engrane.

Las ecuaciones de regresión obtenidas del diseño de experimentos en MINITAB, son altamente confiables para determinar la rigidez radial, torsional, y frecuencias naturales. Además, se desarrollaron herramientas con el uso de plataformas como MATLAB, SCILAB y EXCEL. Estas ecuaciones de regresión implementadas en los softwares antes mencionados, aportan grandes ventajas para los diseñadores a la hora de analizar sus diseños de engranes rectos, el factor más importante será la parte del tiempo, ya que un diseñador experimentado, le tomaría en modelar la pieza en CAD, y de ahí exportarlo a un software como ANSYS, alrededor de 9 horas por modelo, dependiendo de que tan definida esté la malla implementada en la pieza. En cambio, usando las cuatro ecuaciones de regresión del DOE para obtener un resultado equivalente, sólo le tomaría menos de un minuto en introducir los datos de los parámetros de entrada del programa, y revisar el comportamiento estructural de las respuestas seleccionadas. Por lo que estas herramientas en caso de no contar con algún programa de simulación de elemento finito, son muy útiles para las etapas de diseño de concepto del cuerpo de engranes rectos, así como también para evaluar las piezas que vienen fuera de diseño por problemas de desgaste de las herramientas de manufactura, etc.

Para la rigidez radial, se pudo observar que un incremento en la altura del alma implica una reducción en la rigidez. Además, que después de la altura del alma, otro de los principales parámetros que reducen la rigidez radial es el número de agujeros. Por otro parte, el resto de los parámetros un aumento en su dimensión, incrementan la rigidez. De los 7 parámetros analizados en este estudio, 6 son significantes, y uno no lo es. El que no es significante es la altura radial de la base del alma. Para la rigidez torsional, se pudo observar el mismo comportamiento en cuando al incremento en la altura del alma, y el número de agujeros, ambos incrementos reducen la rigidez torsional. En esta respuesta, los parámetros que más influyen son la altura del alma, el número de agujeros y el diámetro de la base del alma. Finalmente, las frecuencias naturales son reducidas principalmente por la altura del alma. Para las frecuencias naturales, podemos observar de este estudio, que los 4 parámetros más significativos en la respuesta son la altura del Alma, el espesor del alma, su combinación de ambos ( $h_w$ , y  $t_w$ ), y el espesor de la base del diente. Prácticamente los parámetros que dan la forma principal del engrane. Por lo que es importante, para entender el efecto en la reducción de las frecuencias naturales. De los cuatro, el que causa un decremento en la respuesta, es un incremento en la altura del alma.

# Agradecimientos

"Agradecimientos a las empresas ESSS y ANSYS por la entrega de las licencias de softwares de simulación ANSYS que se han utilizado para el desarrollo de este trabajo".

#### Referencias

- Angel, M. (2018). La industria aeroespacial en México: características y retos en Sonora. Marzo 19, 2022, de Scielo Sitio web: https://doi.org/10.22201/iiec.20078951e.2018.195.63183
- Anónimo. (2020). Torsional stiffness. Abril 01, 2022, de S.B.A. Invent Sitio web:https://sbainvent.com/strength-of-materials/torsional-stress/torsionalstiffness/
- Brahim, M; Taha, C; Khaled, B; Améziane, A. (2019). Optimum design of a spur gear using a two level optimization approach. Marzo 23, 2022, de Mechanika Sitio web: http://dx.doi.org/10.5755/j01.mech.25.4.18994
- Budynas, R; Nisbett, J. (2008). Diseño en ingeniería mecánica de Shigley. México: McGrawHill.
- Chen Y, Zhu R, Jin G, Xiong Y. (2022). Influence of shaft torsional stiffness on dynamic response of four-stage main transmission system. Marzo 19, 2022, de Hindawi Sitio web: https://doi.org/10.1155/2018/6141035.
- CFM International (2024). The CFM56 Engine Family, https://www.cfmaeroengines.com/engines/cfm56/
- Das P. (2011). Design and analysis of a new accessory gearbox housing for a gas turbine engine. Marzo 17, 2022, de ASME Sitio web: http://proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/pdfaccess.ashx?url=/da ta/conferences/gt2011/70379/
- Dengel, B. (2021). When designing and manufacturing gears, the materials used will depend on what type of gear is being made and how and where it will be used. de https://gearsolutions.com/features/finding-the-idealmaterials-for-gears/
- Fernandez, A. (2020a). Formación en análisis de vibraciones-engranajes. Marzo 15, 2022, de Power-MI Sitio web: https://powermi.com/es/content/engranajes
- Fernandez, A. (2020b). Formación en análisis de vibraciones-resonancia. Marzo 15, 2022, de Power-MI Sitio web: https://powermi.com/es/content/resonancia.
- Gómez, A. (2024), Tesis: Efectos del Uso de Agujeros de Aligeramiento en Engranes Rectos para la Industria Aeroespacial. Abril 13, 2024. De la Universidad Aeronáutica de Querétaro. http://cin.unaq.edu.mx/
- Luz, G. (2022). SAE 1050 Propiedades (Mecánicas, Químicas y Clasificación) rev. 2022. de https://www.materiales.gelsonluz.com/2020/12/sae-1050propiedades-mecanicas-químicas.html
- Mott, R. (2006). Diseño de elementos de máquinas. México: Pearson Educación.
- Norton, R. (2010). Machine Design. New Jersey, USA: Prentice Hall
- Öztürk E. (2019). Optimization of Lightening Hole on a Spur Gear of an Aircraft Motor Optimization of Lightweight Hole on a Spur Gear of Aircraft Motor. Marzo 10, 2022, de Researchgate Sitio web: https://www.researchgate.net/publication/336685723.
- Rodríguez, M. (2005). "Análisis. Modal Operacional: Teoría y Práctica". Trabajo Especial de Grado. Escuela Superior de Ingenieros. Sevilla, España.
- The Flying Engineer (2024), The PW1100G Geared Turbofan (GTF) engine, developed by Pratt & Whitney. https://theflyingengineer.com/thepw1100g-geared-turbofan-engine/
- Wang S, Tang J, Gu J, Huang D. (2020). Study on Torsional Vibration of RV Reducer Based on Time-Varying Stiffness. Marzo 15, 2022, de Krishtel eMaging Sitio web: https://doi.org/10.1007/s42417-020-00211-8.