

Regulación no lineal de la salida para sistemas descriptores en tiempo discreto Nonlinear output regulation for discrete-time descriptor systems

Raúl Santillan ^a, Nery Ortiz ^a, Victor Estrada-Manzo ^{a,*}, Tonatiuh Hernández-Cortés ^a, Jaime González-Sierra ^b

^aUniversidad Politécnica de Pachuca, Departamento de Mecatrónica, Carretera Pachuca-Cd. Sahagún Km. 20, 43830, Zempoala, Hidalgo, México.

^bUnidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Hidalgo, Instituto Politécnico Nacional, Carretera Pachuca—Actopan Kilómetro 1+500, Distrito de Educación, Salud, Ciencia, Tecnología e Innovación, 42162, San Agustín Tlaxiaca, Hidalgo, México.

Resumen

El presente trabajo propone un regulador no lineal en tiempo discreto para sistemas no lineales tipo descriptor. El diseño está dividido en dos partes: 1) un estabilizador no lineal calculado por medio del método directo de Lyapunov y modelos convexos, 2) un regulador lineal calculado a través de las llamadas ecuaciones de Francis-Isidori-Byrnes para modelos descriptores; las condiciones de diseño de ambas partes están en términos de desigualdades matriciales lineales. A diferencia de la teoría de regulación tradicional, se propone un exosistema desconocido, es decir, que las trayectorias se generan de forma arbitraria por algún otro sistema o usuario, un observador de alta ganancia estima dichas señales para utilizarlas, posteriormente, en el diseño del regulador.

Palabras Clave: Regulación a la salida, Sistema Descriptor, Método de Lyapunov, Desigualdad Matricial Lineal, Modelo Takagi-Sugeno.

Abstract

This work proposes a nonlinear regulator for discrete-time nonlinear descriptor systems. The approach is divided into two parts: 1) a nonlinear stabilizer calculated using the direct Lyapunov method and convex models, 2) a linear regulator calculated through the so-called Francis-Isidori-Byrnes equations for descriptor models; the designing conditions for both parts are in terms of linear matrix inequalities. In contrast with traditional regulation theory, it is proposed an unknown exosystem, i.e., the trajectories are arbitrarily generated by some other system or user, then a high-gain observer estimates the signals to be tracked so they can be used by the regulator.

Keywords: Output-regulation, Descriptor System, Lyapunov Method, Linear Matrix Inequality, Takagi-Sugeno Models.

1. Introducción

El problema de regulación a la salida es un tema importante dentro del área de control porque permite realizar seguimiento de trayectoria, sincronización de sistemas y rechazo a perturbaciones. En general, el problema consiste en diseñar una ley de control tal que la salida de un sistema siga asintóticamente una referencia deseada y a su vez rechace perturbaciones (Isidori, 1995). En los años 1970 se desarrollan los primeros trabajos sobre teoría de regulación principalmente para sistemas lineales multivariables, las condiciones son llamadas ecuaciones de Francis (Francis, 1977). Posteriormente, Isidori extendió la solución para sistemas no lineales mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales llamadas Francis-Isidori-Byrnes (FIB) (Isidori y Byrnes, 1990). Diversos inves-

tigadores han tratado de dar solución a este problema mediante los modelos de Takagi-Sugeno (TS) (Takagi y Sugeno, 1985). Estos modelos se ven como una combinación convexa de modelos lineales; adicionalmente el diseño del controlador puede ser mediante desigualdades matriciales lineales (LMIs por sus siglas del inglés *Linear Matrix Inequalities*) (Boyd *et al.*, 1994). Por otra parte, el problema de regulación para sistemas descriptores ha sido abordado en varios trabajos de investigación como (Poblete *et al.*, 2022; Hernández-Cortés *et al.*, 2023).

Los sistemas descriptores mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (ODEs por sus siglas del inglés *Ordinary Differential Equations*) o ecuaciones algebro-diferenciales (DAEs por sus siglas del inglés *Differential-Algebraic Equations*) caracterizan el comportamiento dinámico de plantas aplicadas a la

* Autor para correspondencia: victor_estrada@upp.edu.mx

Correo electrónico: raulsantillamhernandez@gmail.com (Raúl Santillan), neryurielortiz@micorreo.upp.edu.mx (Nery Ortiz), tonatiuh@upp.edu.mx (Tonatiuh Hernández-Cortés), jagonzalezsi@ipn.mx (Jaime González-Sierra).

Historial del manuscrito: recibido el 19/06/2024, última versión-revisada recibida el 29/07/2024, aceptado el 14/08/2024, publicado el 30/11/2024. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial4.13275>



ingeniería como circuitos eléctricos (Wells, 1967; Campbell, 1982), sistemas mecánicos (Duan, 2010) y procesos químicos (Kumar y Daoutidis, 1998); así mismo, estos modelos matemáticos están basados en leyes de la naturaleza como lo son las leyes de Newton o Kirchhoff o fórmulas empíricas (Belov *et al.*, 2018; Mahmoud y Singh, 2012). Por otro lado, para una amplia clase de sistemas (como los mencionados anteriormente), los valores de las variables dependientes sólo pueden llegar a definirse en instantes de tiempo discreto debido a la tecnología de los microprocesadores ya que se utilizan computadoras digitales para resolver dichos problemas. Por lo tanto, es conveniente representar los modelos matemáticos en forma de ecuaciones en diferencias (Mahmoud y Singh, 2012; Galor, 2007).

Por otra parte, en la teoría de regulación presentada en (Isidori, 1995), las referencias son generadas por un exosistema cuya dinámica es conocida por el diseñador. No obstante, en este trabajo se considera que el exosistema es desconocido y por tanto las trayectorias generadas también lo son. Entonces, se propone un observador de alta ganancia (HGO por sus siglas del inglés *High-Gain Observer*), debido a sus propiedades de convergencia (Saad *et al.*, 2018), para estimar esas señales de referencia y entonces usar la información en una adaptación de las ecuaciones FIB. Por ejemplo, los autores (Hernández-Cortés *et al.*, 2024) proponen el diseño de un exosistema con base en HGO que estima las señales de dinámicas que no se encuentran disponibles, pero que pueden ser medibles y que están acotadas.

Contribución: Este artículo provee condiciones en forma de LMIs para la regulación de la salida de sistemas descriptores no lineales. La parte de estabilización en el diseño del controlador se utiliza los enfoques no cuadráticos, similares a los presentados en (Guerra y Vermeiren, 2004; Estrada-Manzo *et al.*, 2014). La obtención de los mapeos Π y Γ es similar y está basado en lo presentado en (Poblete *et al.*, 2022), adaptado a la solución de las FIB para sistemas descriptores en tiempo discreto y cuando el HGO es tomado como el exosistema en la teoría de regulación.

El artículo esta organizado de la siguiente manera: La Sección 2 proporciona las propiedades y lemas que serán utilizados en el trabajo. En la Sección 3 se presenta el planteamiento del problema, el diseño del exosistema con base en un HGO, así como la discretización del exosistema y el descriptor no lineal y la metodología convexa para la representación de sistemas descriptores no lineales. Por otra parte, en la Sección 4 se desarrollan las condiciones LMI para el diseño de una ley de control que garantice el seguimiento asintótico de alguna referencia desconocida mientras que en la Sección 5 se ilustran algunos ejemplos que comprueban el desempeño y efectividad de la estrategia de control. Finalmente, en la Sección 2 se presentan algunas conclusiones y trabajo futuro.

2. Preliminares matemáticos

Las siguientes propiedades y notación serán utilizadas a lo largo del trabajo.

Propiedad 1. (Congruencia) (Bernal *et al.*, 2022) Dada una matriz $R = R^T$ y una matriz A de rango completo. Entonces lo

siguiente se sostiene:

$$R > 0 \implies ARA^T > 0.$$

Lema 1. (Oliveira y Skelton, 2001) Considere un vector $\chi \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{rank}(\mathcal{W}) < n$, por lo tanto las siguientes expresiones son equivalentes:

1. $\chi^T \mathcal{N} \chi < 0, \forall \chi \in \{\chi \in \mathbb{R}^n, \chi \neq 0, \mathcal{W} \chi = 0\}$.
2. $\exists \mathcal{M} \in \mathbb{R}^{m \times n} : \mathcal{M} \mathcal{W} + \mathcal{W}^T \mathcal{M}^T + \mathcal{N} < 0$.

En expresiones matriciales, un asterisco (*) representa la transpuesta del elemento simétrico, es decir:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix};$$

mientras que para expresiones en línea, representa la transpuesta de los términos en la parte izquierda, por ejemplo,

$$A + B + A^T + B^T + C = A + B + (*) + C.$$

3. Planteamiento del problema

Considere el siguiente modelo descriptor no lineal en tiempo continuo:

$$E(x)\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t), \quad y(t) = h(x), \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, $u \in \mathbb{R}^m$ es el vector de entrada, $y \in \mathbb{R}^o$ es el vector de salida. Los campos vectoriales $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $g(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ y $h(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^o$ se asume que son suaves y acotados para todo $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$; $E(\cdot) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$, con $\text{rank}(E(x)) = n, \forall x \in \Omega$.

La tarea consiste en diseñar una ley de control tal que el sistema en lazo cerrado sea capaz de seguir trayectorias desconocidas a través de un HGO que las estime. Además, se muestra la discretización del sistema (1) así como la metodología para construir modelos Takagi-Sugeno exactos.

3.1. Diseño del exosistema con base en un HGO

En los trabajos (Hernández-Cortés *et al.*, 2023, 2024) se diseña un HGO como exosistema. Siguiendo la notación ahí establecida, se define un vector $\Psi(t)$ el cual agrupa las señales desconocidas:

$$\Psi(t) = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \cdots \quad \psi_d]^T$$

donde cada elemento ψ_j , con $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, corresponde a las señales de referencia. Entonces, se puede diseñar un HGO para cada señal y presentarse en una matriz a bloques:

$$\dot{\omega} = S\omega + S_H \Psi(t), \quad y_\omega = Q_{ref} \omega, \quad (2)$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^q$ es el vector de estado del exosistema, $y_\omega \in \mathbb{R}^d$ es el vector de salidas del exosistema, ahora bien, si $\Psi(t)$ toma la forma de la salida de (2)¹, por tanto el sistema se puede reescribir como:

$$\dot{\omega} = S\omega + S_H Q_{ref} \omega, \quad y_\omega = Q_{ref} \omega, \quad (3)$$

¹Debido a las altas ganancias del HGO, este se asemeja a la referencia desconocida a seguir, en un intervalo de tiempo muy corto, durante el estado estacionario, es por ello que podemos asumir que $\Psi(t)$ toma la salida del observador $y_\omega = Q_{ref} \omega$ (Hernández-Cortés *et al.*, 2024).

donde

$$S = \text{block-diag}[S_1, S_2, \dots, S_d],$$

de tal modo que $S_j \in \mathbb{R}^{\rho \times \rho}$ se define como una matriz a bloques

$$S_j = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{\epsilon} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha_2}{\epsilon^2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\alpha_{\rho-1}}{\epsilon^{\rho-1}} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{\alpha_\rho}{\epsilon^\rho} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_{ref} = \text{block-diag}[Q_1, Q_2, \dots, Q_d],$$

$$S_H = \text{block-diag}[G_1, G_2, \dots, G_d],$$

donde $Q_j \in \mathbb{R}^{d \times q}$ y las matrices G_j están definidas como

$$G_j = \left[\frac{\alpha_1}{\epsilon} \quad \frac{\alpha_2}{\epsilon^2} \quad \dots \quad \frac{\alpha_\rho}{\epsilon^\rho} \right]^T, \quad \epsilon > 0,$$

ϵ es un número positivo relacionado con la tasa de decaimiento de la estimación del error; los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\rho$ se definen tal que el polinomio

$$s^\rho + \alpha_1 s^{\rho-1} + \alpha_2 s^{\rho-2} + \dots + \alpha_{\rho-1} s + \alpha_\rho,$$

sea Hurwitz. Sin embargo, un problema al diseñar el HGO es existe el problema denominado fenómeno pico (*peaking phenomenon*), ya que el transitorio tiene términos de la forma $(1/\epsilon)e^{-at/\epsilon}$, $a > 0$. En otras palabras, la magnitud del pico incrementa cuando el valor de $\epsilon > 0$ es muy pequeño (Khalil y Praly, 2014). Por otro lado, cuando ρ es demasiado grande se sigue presentando el fenómeno pico, debido a que las ganancias son proporcionales a $\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon^2}, \dots, \frac{1}{\epsilon^\rho}$. Para tratar de minimizar este problema, en este trabajo se considera $\rho = 2$ como en (Hernández-Cortés et al., 2023).

3.2. Discretización mediante aproximación de Euler

La aproximación de la derivada en tiempo discreto esta dada por $\dot{x} \approx (x_{t+1} - x_t)/T_s$, con $t \in \mathbb{N}$ siendo la muestra actual y T_s el tiempo de muestreo. Con base en lo anterior, (1) se discretiza de la siguiente manera:

$$E(x_t)x_{t+1} = \bar{f}(x_t) + \bar{g}(x_t)u_t, \quad y_t = h(x_t), \quad (4)$$

con $\bar{f}(x_t) = E(x_t)x_t + T_s f(x_t)$ y $\bar{g}(x_t) = T_s g(x_t)$. Del mismo modo, (3) se puede discretizar como

$$\omega_{t+1} = \bar{S}\omega_t + \bar{S}_H Q_{ref} \omega_t, \quad y_\omega = Q_{ref} \omega_t, \quad (5)$$

con $\bar{S} = (T_s S + I)$ y $\bar{S}_H = T_s S_H$, donde I es la matriz identidad de la dimensión adecuada.

3.3. Modelado convexo

Considere el sistema en tiempo discreto (4) y asuma que

$$\bar{f}(x_t) + \bar{g}(x_t) = A(x_t)x_t + B(x_t)u_t \text{ y } y_t = C(x_t)x_t, \quad (6)$$

donde las no linealidades en $A(x_t), B(x_t), C(x_t)$ están bien definidas en la región Ω . Utilizando la metodología del sector no lineal de (Ohtake et al., 2001) podemos agrupar todos los términos no constantes p , de $E(x_t), A(x_t), B(x_t), y$

$C(x_t)$, en un vector de premisas $z(x_t) \in \mathbb{R}^p$. Cada entrada de $z(x_t)$ es acotada $\forall x \in \Omega$, por lo que se puede determinar que $z_i(x_t) \in [z_i^0, z_i^1]$. Las llamadas funciones de ponderación se definen como

$$w_0^i(x_t) = \frac{z_i^1 - z_i(x_t)}{z_i^1 - z_i^0} \text{ y } w_1^i(x_t) = 1 - w_0^i(x_t), \quad (7)$$

que cumplen la propiedad de la suma convexa para todo $x \in \Omega$, es decir,

$$w_0^i(x_t) + w_1^i(x_t) = 1 \text{ y } w_0^i(x_t) \geq 0, w_1^i(x_t) \geq 0.$$

Entonces, los términos no constantes pueden ser expresados como una suma convexa de sus límites

$$z_i(x_t) = w_0^i(x_t)z_i^0 + w_1^i(x_t)z_i^1.$$

Considere

$$z_1(x_t) = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(x_t)z_1^{i_1} \text{ y } z_2(x_t) = \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(x_t)z_2^{i_2};$$

por convexidad, se tiene lo siguiente

$$z_1(x_t) + z_2(x_t) = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(x_t) \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(x_t)(z_1^{i_1} z_2^{i_2})$$

$$z_1(x_t)z_2(x_t) = \sum_{i_1=0}^1 w_{i_1}^1(x_t) \sum_{i_2=0}^1 w_{i_2}^2(x_t)(z_1^{i_1} z_2^{i_2}).$$

Una vez más, debido a la convexidad se pueden construir las llamadas funciones de membresía

$$h_i(x_t) = w_{i_1}^1(x_t)w_{i_2}^2(x_t) \dots w_{i_p}^p(x_t), \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^p\},$$

donde $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$, $i_1, i_2, \dots, i_p \in \{0, 1\}$ y el conjunto de índices $[i_1 i_2 \dots i_p]$ es tal que se obtiene una representación binaria p dígitos de $(i - 1)$. Por ejemplo, si $p = 3$, $h_4(x_t) = w_0^1(x_t)w_1^2(x_t)w_1^3(x_t)$, y el conjunto $[011]$. Por construcción, las funciones de membresía también cumplen la propiedad de suma convexa:

$$\sum_{i=1}^{2^p} h_i(z(x_t)) = 1 \text{ y } h_i(z(x_t)) \geq 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}.$$

Finalmente (4) es representado por el modelo TS exacto:

$$\sum_{i=1}^{2^p} h_i(z(x_t))E_i x_{t+1} = \sum_{i=1}^{2^p} h_i(z(x_t))(A_i x_t + B_i u_t),$$

$$y_t = \sum_{i=1}^{2^p} h_i(z(x_t))C_i x_t, \quad (8)$$

donde los vértices se calculan tal que

$$(A_i, B_i, C_i, E_i) = (A(x_t), B(x_t), C(x_t), E(x_t))|_{h_i=1},$$

para $i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$. Para facilitar la lectura del documento, se utilizará la siguiente notación corta. Para una suma convexa

se tiene lo siguiente: $\Upsilon_h = \sum_{i=1}^{2^p} h_i(z(x_t))\Upsilon_i$, mientras que la inversa de una suma convexa es

$$\Upsilon_h^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{2^p} h_i(z(x_t))\Upsilon_i \right)^{-1},$$

el adelanto de una suma convexa se define como

$$\Upsilon_{h^+} = \sum_{k=1}^{2^p} h_k(z(x_{t+1}))\Upsilon_k,$$

y una doble suma convexa puede ser expresada como

$$\Upsilon_{hh} = \sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} h_i(z(x_t))h_j(z(x_t))\Upsilon_{ij}.$$

Haciendo uso de la notación de propiedades convexas, el sistema (8) puede ser expresado en notación corta como

$$E_h x_{t+1} = A_h x_t + B_h u_t, \quad y_t = C_h x_t.$$

Uno de los objetivos para diseñar controladores/observadores a través modelos TS (convexos) es que las condiciones estén en forma de LMIs; para esto se utiliza el método directo de Lyapunov. Entonces, en el proceso de diseño se presentan sumas convexas dobles o triples, por lo tanto, para obtener condiciones LMI, es necesario removerlas sabiendo que siempre son positivas y suman uno (Bernal *et al.*, 2022). Para tal fin, existen diversas metodologías, entre las que destacan las presentadas por (Tuan *et al.*, 2001; Liu y Zhang, 2003; Wang *et al.*, 1996). En este trabajo se hará el uso de una adaptación de la relajación de (Tuan *et al.*, 2001):

Lema 2 (Lema de Relajación). *Sea la siguiente desigualdad matricial*

$$\sum_{i=1}^{2^p} \sum_{j=1}^{2^p} \sum_{k=1}^{2^p} h_i(z(x_t))h_j(z(x_t))h_k(z(x_{t+1}))\Upsilon_{ij}^k < 0,$$

donde $\Upsilon_{ij}^k = (\Upsilon_{ij}^k)^T$, $(i, j, k) \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ son matrices de dimensiones apropiadas; entonces la desigualdad anterior se cumple si las siguientes LMIs son factibles

$$\frac{2}{2^p-1} \Upsilon_{ii}^k + \Upsilon_{ij}^k + \Upsilon_{ji}^k < 0, \quad \forall (i, j, k) \in \{1, 2, \dots, 2^p\}. \quad (9)$$

Observación 1. *El sistema convexo (8) es no lineal y gracias a que fue calculado a través del método del sector no lineal es algebraicamente equivalente a (4). Sin embargo, con el fin de estudiar la estabilidad en el origen o desarrollar estabilizadores, se emplea el método directo de Lyapunov y gracias a la convexidad de (8), es posible derivar condiciones de análisis y/o diseño en términos de LMIs que son numéricamente tratables a través de software comercial (Gahinet *et al.*, 1994). Debido a lo anterior, las conclusiones o diseños que se obtienen a partir del modelo convexo aplican directamente al sistema no lineal (4). Desde sus orígenes (Takagi y Sugeno, 1985), los investigadores han dedicado esfuerzos en reducir la conservatividad del enfoque, a través de: distintos modelos convexos, distintas funciones de Lyapunov candidatas, distintas estructuras para las*

*leyes de control/observación, distintos esquemas de relajación de sumas convexas, etcétera (Bernal *et al.*, 2022).*

3.4. Teoría de regulación con HGO

Considere la linealización alrededor del origen de (4):

$$E x_{t+1} = A x_t + B u_t, \quad y_t = C x_t, \quad (10)$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{o \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y el HGO como el exosistema dado en (3). El objetivo de regulación a la salida es diseñar un controlador tal que el error de seguimiento, definido como $e_t = y_t - y_w$ cumpla con

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_t = 0.$$

Lo anterior es posible si existen ganancias $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times q}$, y $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times q}$ que permitan construir la siguiente ley de control

$$u_t = F x_t - F \Pi \omega_t + \Gamma \omega_t \quad (11)$$

tal que

- $A + BF$ sea Hurwitz.
- $x_{ss}(t) = \Pi \omega(t)$ y $u_{ss}(t) = \Gamma \omega(t)$.

Si siguiendo los resultados dados por (Lin y Dai, 1996; Hernández-Cortés *et al.*, 2023), las ecuaciones FIB tradicionales son adaptadas para sistemas descriptores (10) y del mismo modo cuando el exosistema es considerado un HGO discretizado (5), entonces el problema de regulación a la salida tendrá solución si y sólo si se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} E \Pi \bar{S} + E \Pi \bar{S}_H Q_{ref} &= A \Pi + B \Gamma \\ 0 &= C \Pi - Q_{ref}. \end{aligned} \quad (12)$$

Si el conjunto de ecuaciones anterior se cumple, la ley de control está dada por (11).

4. Resultados teóricos

En esta sección se presentan las contribuciones del trabajo: a) condiciones LMI para el diseño de una ley de control no lineal que establezca el origen del sistema y b) condiciones, también LMI, para el cálculo de los mapeos encargados de realizar el seguimiento de trayectoria. Entonces, se propone la siguiente ley de control no lineal:

$$u_t = \mathcal{F}(x_t)x_t - \mathcal{F}(x_t)\Pi\omega_t + \Gamma\omega_t, \quad (13)$$

donde $\mathcal{F}(x_t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la ganancia no lineal del estabilizador, $\Pi \in \mathbb{R}^{n \times q}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times q}$ son los mapeos necesarios para realizar regulación en el sentido de Isidori. Note que este controlador es un caso general de (11).

4.1. Estabilizador no lineal por medio de LMIs

Para la parte de estabilización, considere el modelo descriptor convexo (8) y la ley de control no lineal:

$$u_t = \mathcal{F}(x_t)x_t, \quad \mathcal{F}(x_t) = F_h H_h^{-1}, \quad (14)$$

donde

$$F_h = \sum_{j=1}^{2^p} h_j(z(x_t)) F_j \quad \text{y} \quad H_h^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{2^p} h_j(z(x_t)) H_j \right)^{-1},$$

con $F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$; considerando que F_h, H_h son de estructura convexa y dependen de las mismas funciones de ponderación de (8), es una adaptación de la propuesta por Estrada-Manzo *et al.* (2014) y generalizada en (Estrada-Manzo *et al.*, 2015). La ley de control que se propone es conocida como non-PDC (Bernal *et al.*, 2022). El sistema (8) bajo la ley de control (14) resulta en $E_h x_{t+1} = (A_h + B_h F_h H_h^{-1}) x_t$ mismo que puede expresarse como

$$\begin{bmatrix} A_h + B_h F_h H_h^{-1} & -E_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix} = 0. \quad (15)$$

Note que lo anterior tiene la forma $\mathcal{W}\chi = 0$ del Lema 1. Con esto en mente se tiene lo siguiente:

Teorema 1. *El origen $x = 0$ del sistema (4), bajo la ley de control (14), es asintóticamente estable si existen matrices $P_j = P_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ tal que $P_j > 0$ y las LMIs (9) se satisfagan con*

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} -P_j & (*) \\ A_i H_j + B_i F_j & -E_i H_k - H_k^T E_i^T + P_k \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Prueba 1. *Considere la función candidata de Lyapunov:*

$$V(x_t) = x_t^T H_h^{-T} P_h H_h^{-1} x_t, \quad (17)$$

$P_j = P_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$. La variación de (17) es

$$\Delta V(x_{t+1}) = x_{t+1}^T H_{h+}^{-T} P_{h+} H_{h+}^{-1} x_{t+1} - x_t^T H_h^{-T} P_h H_h^{-1} x_t.$$

Para poder hacer uso de Lema 1, la expresión anterior puede ser expresada en la forma $\chi^T \mathcal{N} \chi$

$$\Delta V(x_{t+1}) = \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -H_h^{-T} P_h H_h^{-1} & 0 \\ 0 & H_{h+}^{-T} P_{h+} H_{h+}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Por lo tanto, (15) y (18) pueden agruparse mediante el Lema 1:

$$\begin{aligned} & \mathcal{M} \begin{bmatrix} A_h + B_h F_h H_h^{-1} & -E_h \end{bmatrix} + (*) \\ & + \begin{bmatrix} -H_h^{-T} P_h H_h^{-1} & 0 \\ 0 & H_{h+}^{-T} P_{h+} H_{h+}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (19)$$

donde $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ H_{h+}^{-T} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$. Por medio de la propiedad de congruencia, es decir, pre-multiplicando (19) con $\begin{bmatrix} H_h^T & 0 \\ 0 & H_{h+}^T \end{bmatrix}$ y post-multiplicando por $\begin{bmatrix} H_h & 0 \\ 0 & H_{h+} \end{bmatrix}$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} -P_h & (*) \\ A_h H_h + B_h F_h & -E_h H_{h+} - H_{h+}^T E_h^T + P_{h+} \end{bmatrix} < 0.$$

Finalmente aplicando el Lema 2 de relajación se obtiene el resultado deseado (16).

Las LMIs del Teorema 1 pueden mejorarse en términos de la tasa de decaimiento, es decir, la velocidad de convergencia del vector de estado al origen (Tanaka y Wang, 2001); esto se puede hacer al considerar la misma función candidata de Lyapunov (17) junto con la condición $\Delta V(x_t) \leq (\beta^2 - 1)V(x_t)$, $0 < \beta^2 < 1$, (Bernal *et al.*, 2022, Teorema 4.5). El siguiente resultado proporciona LMIs para dicha tarea.

Corolario 1. *El origen $x = 0$ del sistema (4), bajo la ley de control (14), es asintóticamente estable, con una tasa de decaimiento $\beta < 1$, $0 < \beta^2 < 1$ si existen matrices $P_j = P_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $H_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$ tal que $P_j > 0$ y las LMIs (9) se satisfagan con*

$$\Upsilon_{ij}^k = \begin{bmatrix} -\beta^2 P_j & (*) \\ A_i H_j + B_i F_j & -E_i H_k - H_k^T E_i^T + P_k \end{bmatrix} \quad (20)$$

para $(i, j, k) \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$.

Prueba 2. *El desarrollo es similar la demostración del Teorema 1, pero considerando $\Delta V(x_t) \leq (\beta^2 - 1)V(x_t)$.*

Observación 2. *Con el fin de evitar saturar los actuadores y por tanto dañarlos, se debe acotar la magnitud de la señal de entrada $u_t \in \mathbb{R}^m$; esto es posible por medio de $\|u_t\| < \mu$ para $\mu > 0$ o a través de las siguientes LMIs (Tanaka y Wang, 2001):*

$$\begin{bmatrix} P_j & (*) \\ F_j & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & (*) \\ x(0) & H_j + H_j^T - P_j \end{bmatrix} \geq 0, \quad (21)$$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, 2^p\}$, donde $x(0)$ es la condición inicial.

A continuación se proponen condiciones para resolver (12) a través de un problema de optimización convexa.

4.2. Condiciones LMI para obtener Π y Γ

En (Bernal *et al.*, 2012), se muestra que las ecuaciones pueden aproximarse mediante un problema de minimización elemento a elemento, es decir, $M(x) - N(x) = 0$, donde $M(x)$ y $N(x)$ son funciones de matrices lineales continuamente diferenciables de la variable de decisión x , pueden resolverse como un problema de minimización: $\min \varepsilon > 0 : -\varepsilon \prec M(x) - N(x) \prec \varepsilon$, lo cual se expresa como

$$\min \varepsilon > 0 : \begin{cases} M(x) - N(x) - \varepsilon \prec 0 \\ M(x) - N(x) + \varepsilon \succ 0 \end{cases},$$

donde \prec y \succ representan menor que y mayor que elemento a elemento, respectivamente.

Observación 3. *La solución de las ecuaciones FIB (12) puede aproximarse mediante un problema de optimización LMI, es decir,*

$$\begin{aligned} & \min \varepsilon > 0 \text{ tal que:} \\ & -\varepsilon \prec \begin{bmatrix} A\Pi + B\Gamma - E\Pi\bar{S} - E\Pi\bar{S}Q_{ref} & 0 \\ 0 & C\Pi - Q_{ref} \end{bmatrix} \prec \varepsilon. \end{aligned} \quad (22)$$

En las secciones previas se han presentado condiciones LMI para el diseño de: 1) una ganancia no lineal $\mathcal{F}(x_t)$ y 2) obtención de los mapeos lineales Π y Γ .

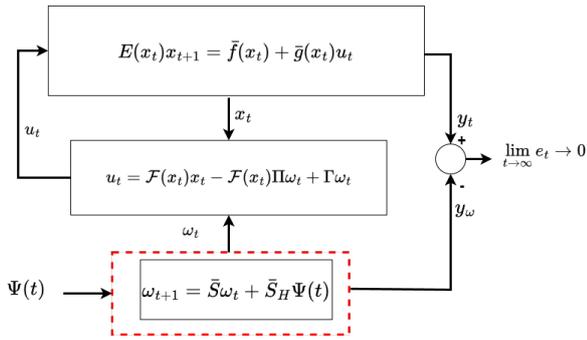


Figura 1: Esquema de control propuesto.

Observación 4. La salida del sistema no lineal (4) sigue una señal desconocida $\Psi(t)$, si existe una ley de control no lineal (13) donde la ganancia de estabilización $\mathcal{F}(x_t)$ se calcula a partir de condiciones LMI en el Teorema 1, la restricción de la entrada (21) y las ganancias Π y Γ se obtienen del problema de minimización LMI en la Observación 3. La Figura 1 presenta un esquema de la propuesta: se puede observar que la señal no modelada $\Psi(t)$ entra al exosistema diseñado a partir de HGO; además, los estados del exosistema así como los de la planta influyen en la ley de control, la cual es implementada en el sistema no lineal (4), con el fin de cumplir el objetivo de regulación.

5. Ejemplos numéricos

En esta sección se presentan dos ejemplos con el fin de ilustrar y validar cómo nuestra propuesta funciona. El primero es numérico y el segundo mostrando la aplicabilidad a un sistema físico mediante simulación. Los resultados numéricos de esta sección fueron obtenidos por medio del LMItoolbox (Gahinet et al., 1994) de MATLAB R2021a, los resultados en simulación mediante el solucionador *fixed-step (discrete)* con un paso de simulación de 0.01 s.

Ejemplo 1. Sea el sistema descriptor no lineal discretizado (4) con:

$$E(x_t) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 + 0.3\eta \\ 0.3\eta & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \bar{g}(x_t) = \begin{bmatrix} 0.1T_s \\ 0.8T_s \end{bmatrix},$$

$$\bar{f}(x_t) = \begin{bmatrix} 0.8 - 0.4T_s & 103T_s + 0.3\eta \\ 1.05T_s \frac{\sin x_1}{x_1} + 0.3\eta & 0.2 + 0.2T_s \end{bmatrix} x_t,$$

con $\eta = (1 + x_2^2)^{-1}$, la salida $y_t = x_1$, dentro de la región $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq \pi, |x_2| \leq 1\}$, los términos no lineales $z_1 = \eta \in [0.5 \ 1]$, $z_2 = \frac{\sin x_1}{x_1} \in [0 \ 1]$, las funciones de ponderación $w_0^1 = \frac{z_1 - \eta}{z_1 - z_0^1}$, $w_1^1 = 1 - w_0^1$, $w_0^2 = (z_2^1 - \frac{\sin x_1}{x_1}) / (z_2^1 - z_2^0)$, $w_1^2 = 1 - w_0^2$, con funciones de membresía $h_1 = w_0^1 w_0^2$, $h_2 = w_0^1 w_1^2$, $h_3 = w_1^1 w_0^2$ y $h_4 = w_1^1 w_1^2$. Las matrices vértice son:

$$E_1 = E_2 = \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.6500 \\ 0.1500 & 0.6000 \end{bmatrix}, \quad E_3 = E_4 = \begin{bmatrix} 0.8000 & 0.8000 \\ 0.3000 & 0.6000 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.7960 & 1.1800 \\ 0.1500 & 0.2020 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.7960 & 1.1800 \\ 0.1605 & 0.2020 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.7960 & 1.3300 \\ 0.3000 & 0.2020 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.7960 & 1.3300 \\ 0.3105 & 0.2020 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0.0010 \\ 0.0080 \end{bmatrix}, \quad C_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Para el HGO en forma de exosistema se considera $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 5$, $\epsilon = 0.28$, resultando

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0.8571 & 0.0100 \\ -0.6378 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{S}_H = \begin{bmatrix} 0.1429 \\ 0.6378 \end{bmatrix}, \quad Q_{ref} = [1 \ 0].$$

Siguiendo la metodología dada en la Observación 4, tenemos que las LMIs del Corolario 1 y las desigualdades (21) de la Observación 2 son factibles para $T_s = 0.01$, $\mu = 20$, $\beta = 0.85$, $x(0) = [-0.9 \ 0.9]^T$, resultando las siguientes ganancias

$$F_1 = [-6.7064 \quad -16.6059], \quad F_2 = [-7.3662 \quad -16.4829],$$

$$F_3 = [-25.0453 \quad 1.1936], \quad F_4 = [-26.4470 \quad 2.8836],$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 13.3270 & -7.3641 \\ -8.8770 & 5.9885 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 12.9592 & -7.2053 \\ -8.6918 & 5.9266 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 4.7167 & -1.5551 \\ -2.2774 & 1.5584 \end{bmatrix}, \quad H_4 = \begin{bmatrix} 4.5282 & -1.5013 \\ -2.1573 & 1.4953 \end{bmatrix},$$

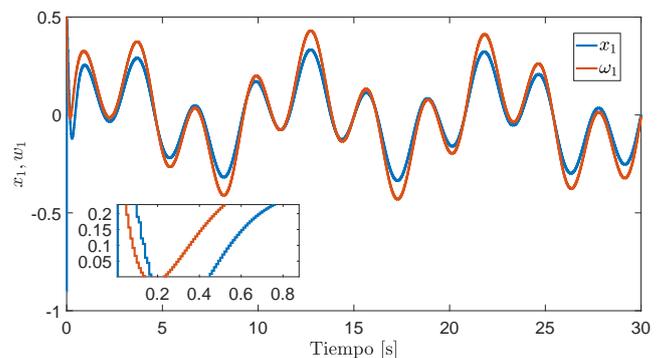
$$P_1 = \begin{bmatrix} 3.8448 & -1.8693 \\ -1.8693 & 2.0476 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 3.6530 & -1.8209 \\ -1.8209 & 2.0745 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1.8939 & -0.0098 \\ -0.0098 & 0.5131 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 1.8397 & -0.0065 \\ -0.0065 & 0.4699 \end{bmatrix}.$$

Además las LMIs de la Observación 3 también son factibles con $\epsilon = 6.8975 \times 10^{-12}$ resultando

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.0454 & 0.0137 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Gamma = [-3.6516 \quad 1.0916].$$

Para $\Psi(t) = \pi/15 \sin(\pi/1.5t) + \pi/15 \sin(\pi/5t)$ como la señal de referencia y procesándola a través de un retenedor de orden cero, los resultados se muestran en simulación para condiciones iniciales $\omega(0) = [0.5 \ -0.5]^T$. En la Figura 2 podemos observar la salida del sistema no lineal x_1 , siguiendo la señal de referencia ω_1 , mientras que en la Figura 3 se muestra el error de seguimiento el cual oscila alrededor de cero. Por otra parte, la señal de control se ilustra en la Figura 4 la cual se mantiene acotada, respetando la restricción μ .

Figura 2: Salida de la planta x_1 y salida del exosistema ω_1 .

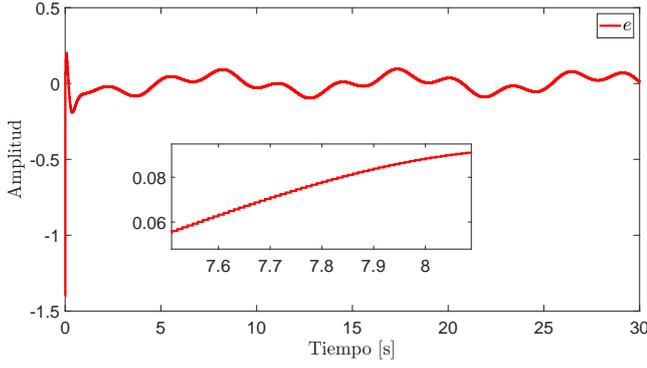
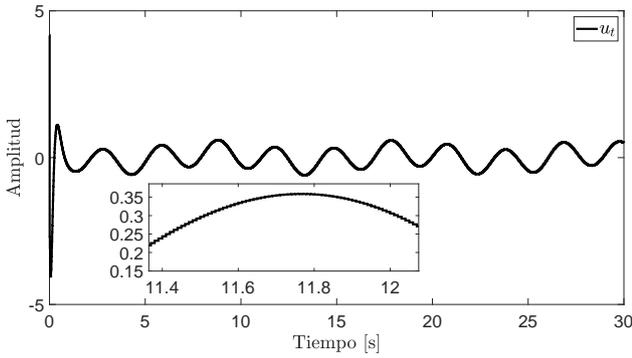
Figura 3: Error de seguimiento $e = y_t - y_\omega = x_1 - \omega_1$.

Figura 4: Señal de control.

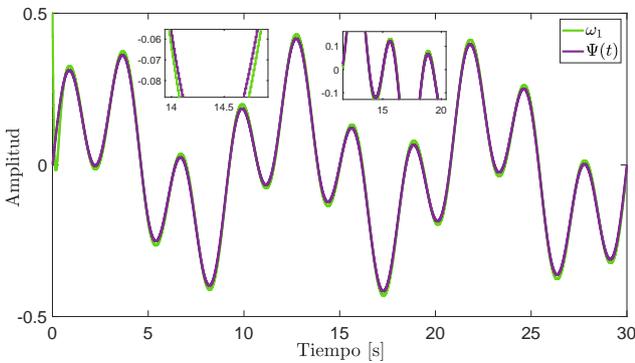


Figura 5: Estimación de señal.

Finalmente, en la Figura 5 se muestra la estimación de $\Psi(t)$, y se puede ejemplificar el por que $\Psi(t)$ de (2) toma la salida de (3), debido a las altas ganancias del HGO esta se asemeja a la salida desconocida a seguir, en un intervalo de tiempo muy pequeño.

Adicionalmente, para ilustrar las ventajas de la forma descriptor (4), y considerando que $E(x_t)$ es invertible, en comparación con las formas tradicionales $x_{t+1} = \tilde{f}(x_t) + \tilde{g}(x_t)u_t$, tenemos $\tilde{f}(x_t) = E^{-1}(x_t)\tilde{f}(x_t)$ y $\tilde{g}(x_t) = E^{-1}(x_t)\tilde{g}(x_t)$. Para construir el estabilizador (14), utilizamos las LMIs del Corolario (1) junto con las de la Observación 2 para ambos casos, es decir, para el caso tradicional se tienen tres términos no constantes $z_1 = \eta$, $z_2 = \frac{\sin x_1}{x_1}$ y $z_3 = 1/(0.48 - .09\eta^2 - 0.15\eta)$, lo que genera $r = 8$ y matrices vértice nuevas, donde $E_i = I$,

$i \in \{1, 2, \dots, 8\}$. El experimento consiste en fijar la tasa de decaimiento en $\beta = 0.89$ y $x(0) = [-0.9 \ 0.9]^T$ para ambos casos, se busca disminuir el valor de μ pues es la cota de la entrada. Para el esquema descriptor $\mu = 12.544$ las LMIs correspondientes son factibles mientras que para la forma tradicional tenemos que las LMIs dejan de ser factibles en $\mu = 16.698$, es decir, el esquema descriptor permite el ahorro de energía en actuadores. Ahora bien, para considerar las LMIs propuestas en (Estrada-Manzo et al., 2014, Teorema 2) es necesario separar las no linealidades de los lados derecho e izquierdo de (4), es decir, hay dos familias de funciones de membresía; al hacer esto, las LMIs dan factibles para $\mu = 12.654$.

Ejemplo 2. Considere un péndulo simple (ver Figura 6) modelado a partir del enfoque de Euler-Lagrange.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C_o(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = \tau,$$

donde θ es el ángulo entre la vertical y el brazo del péndulo y $\dot{\theta}$ su velocidad, $M(\theta) = \frac{R_m I}{K_m}$, $C_o(\theta, \dot{\theta}) = K_b$ y $G(\theta) = \frac{R_m m g l \sin(\theta)}{K_m}$. La Tabla 1 presenta los parámetros del sistema. Para poder obtener una representación en modelo descriptor, se elige a $x_1 = \theta$ y $x_2 = \dot{\theta}$ como los estados del sistema, además, se considera $\tau = \frac{k_m}{R_m} V_m - \frac{K_m K_b}{R_m} \dot{\theta}$ con $V_m = u_t$. Entonces, mediante la aproximación de Euler (ver Sección 3.2), se obtiene su representación en forma descriptor en tiempo discreto (4) con los siguientes valores:

$$E(x_t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R_m I}{K_m} \end{bmatrix}, \quad \bar{g}(x_t) = \begin{bmatrix} 0 \\ T_s \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}(x_t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -T_s \left(K_b - \left(R_m g l m \frac{\sin(x_1)}{x_1} \right) / K_m \right) \frac{R_m I}{K_m} \end{bmatrix} x_t,$$

y $h(x_t) = x_1$ como un salida lineal.

Tabla 1: Parámetros de péndulo simple.

Variable	Descripción	Valor
m	Masa del péndulo	0.086 kg
l	Longitud de péndulo	0.2741 m
I	Momento de inercia	0.07716251 Kg·m ²
R_m	Resistencia de armadura del motor	1.9 Ω
K_b	Constante del torque del motor	0.01672 N·m/A
K_m	Constante de la fuerza electromotriz	0.01672 V/(rad/s)
V_m	Voltaje de la fuente	V
g	Constante gravitacional	9.8 m/s ²

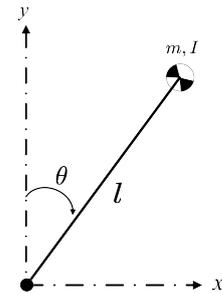


Figura 6: Diagrama péndulo simple.

Considere la región de operación $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq 0.5236\text{rad}\}$, los términos no lineales $z_1 = \frac{\sin(x_1)}{x_1} \in [0.95, 1]$. Las funciones de pertenencia $w_0^1(\cdot) = z_1^1 - \frac{\sin(x_1)}{x_1}/z_1^1 - z_1^0$, $w_1^1(\cdot) = 1 - w_0^1$, con $T_s = 0.01$. Además, $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 7, \epsilon = 0.7$ para el HGO en forma de exosistema:

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0.9429 & 0.0100 \\ -0.1429 & 1.0000 \end{bmatrix}, \bar{S}_H = \begin{bmatrix} 0.0571 \\ 0.1429 \end{bmatrix}, Q_{ref} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

considerando los parámetros de la Tabla 1, con $\mu = 20$, $\beta^2 = 0.777$, $x(0) = [0.0873 \ -0.0873]^T$ las condiciones del Corolario 1 y las LMIs (21) de la Observación 2 son factibles y dan las siguientes ganancias:

$$F_1 = [-1.8921 \ -4.5572], F_2 = [-1.9173 \ -4.4068],$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.0225686 & -0.0651775 \\ -0.2842111 & 2.8407313 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.0225518 & -0.0650821 \\ -0.2837211 & 2.8297724 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0202296 & -0.0410736 \\ -0.0410736 & 0.4026723 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.0201990 & -0.0409231 \\ -0.0409231 & 0.3998021 \end{bmatrix}.$$

Las LMIs para el cálculo de los mapeos (22) son factibles con $\epsilon = 5.3814 \times 10^{-14}$ de lo cual resultan las siguientes ganancias $\Pi = I$ y $\Gamma = [-14.0082 \ 14.1107]$. Los resultados en simulación consideran condiciones iniciales $w(0) = [0.0873 \ -0.0873]^T$, la señal como $\Psi(t) = \pi/18 \sin(\pi/3 \cdot t) + \pi/18 \sin(\pi/2 \cdot t)$. La Figura 7 muestra la salida del sistema no lineal x_1 y la señal de referencia a seguir, considerando la subgráfica presentada en está como un zoom en la señales, con el fin de poder observar con un poco de detalle la señal discreta, mientras que en la Figura 8 se muestra el error de seguimiento el cual se encuentra oscilando alrededor de cero. La señal de control se muestra en la Figura 9 note que es acotada y respeta el voltaje de restricción μ impuesto por las características del motor y finalmente, en la Figura 10 la señal desconocida $\Psi(t)$, así mismo como la estimación de dicha señal a través de ω_1 .

Conclusiones

Se ha presentado el diseño de un regulador no lineal para sistemas descriptores no lineales en tiempo discreto; la salida del sistema en lazo cerrado sigue una referencia no conocida gracias a un observador de alta ganancia. Las condiciones de diseño están en forma de LMIs. Dos ejemplos ilustran el desempeño de la propuesta. Como trabajo a futuro se buscará diseñar un regulador no lineal que asegure el seguimiento asintótico de la referencia.

Agradecimientos

Los autores agradecen al laboratorio de LANAVEX y Robótica de la Universidad Politécnica de Pachuca, a CONAHCyT por las becas de CVUs 1238127 (R. Santillan), 1237339 (N. Ortiz). Jaime González-Sierra agradece el apoyo del Instituto Politécnico Nacional a través del Proyecto SIP: 20240014.

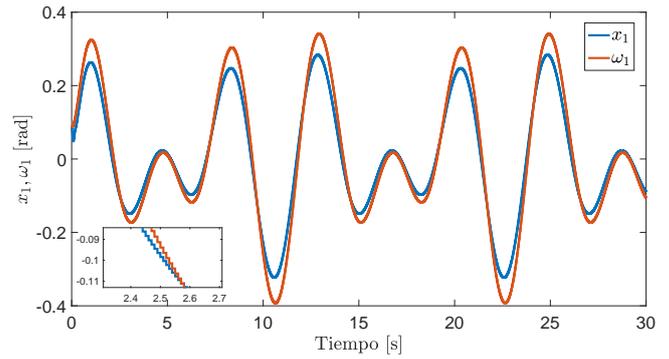


Figura 7: Salida x_1 versus ω_1 .

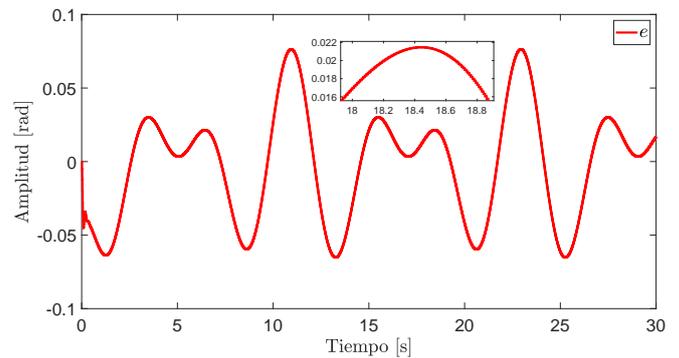


Figura 8: Error de seguimiento $e = y_t - y_\omega = x_1 - \omega_1$.

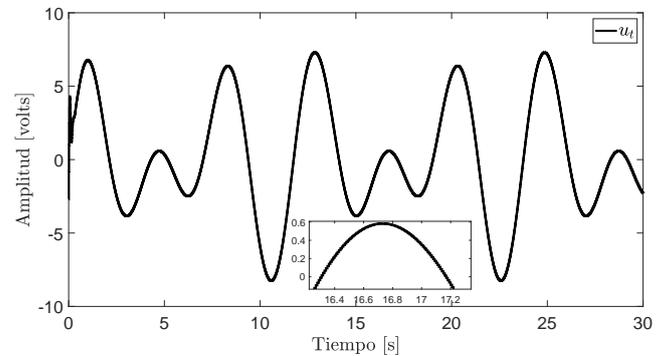


Figura 9: Señal de control.

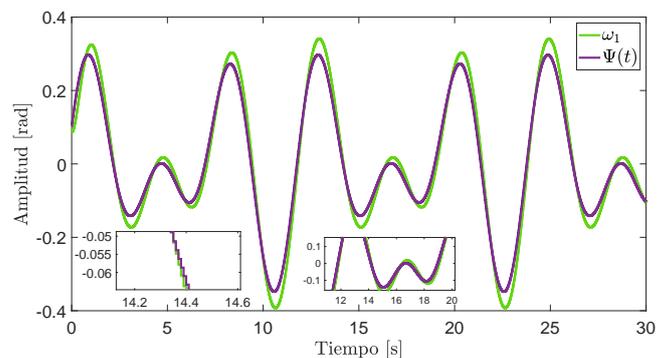


Figura 10: Estimación de señal.

Referencias

- Belov, A. A., Andrianova, O. G., y Kurdyukov, A. P. (2018). Control of discrete-time descriptor systems. *Cham: Springer International Publishing*, 39.
- Bernal, M., Marquez, R., Estrada-Manzo, V., y Castillo-Toledo, B. (2012). Nonlinear output regulation via Takagi-Sugeno fuzzy mappings: A full-information LMI approach. En *2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 1–7. IEEE.
- Bernal, M., Sala, A., Lendek, Z., y Guerra, T. M. (2022). *Analysis and Synthesis of Nonlinear Control Systems: A Convex Optimisation Approach*, volumen 408. Springer Nature.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., y Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volumen 15. SIAM: Studies In Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
- Campbell, S. (1982). Singular systems of. *Differential Equations II Pitman, New York*.
- Duan, G.-R. (2010). *Analysis and design of descriptor linear systems*, volumen 23. Springer Science & Business Media.
- Estrada-Manzo, V., Guerra, T. M., Lendek, Z., y Pudlo, P. (2014). Discrete-time Takagi-Sugeno descriptor models: controller design. En *2014 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pp. 2277–2281.
- Estrada-Manzo, V., Lendek, Z., Guerra, T. M., y Pudlo, P. (2015). Controller design for discrete-time descriptor models: a systematic LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 23(5):1608–1621.
- Francis, B. (1977). The linear multivariable regulator problem. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 15:486–505.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J., y Chilali, M. (1994). The LMI control toolbox. En *Proceedings of 1994 33rd IEEE conference on decision and control*, volumen 3, pp. 2038–2041. IEEE.
- Galor, O. (2007). *Discrete dynamical systems*. Springer Science & Business Media.
- Guerra, T. M. y Vermeiren, L. (2004). LMI-based relaxed non-quadratic stabilization conditions for nonlinear systems in Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 40(5):823–829.
- Hernández-Cortés, T., Amador-Macías, M., Tapia-Herrera, R., y Meda-Campana, J. (2024). Output regulation for descriptor systems with high-gain observer used as exosystem for unmodeled references. *IEEE Latin America Transactions*, 22(2):156–165.
- Hernández-Cortés, T., Amador-Macías, M., Tapia-Herrera, R., y Meda-Campana, J. A. (2023). On the output regulation for an underactuated inverse pendulum when the exosystem is a high-gain observer. *IEEE Access*, 11:10792–10800.
- Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer, London, 3 edición.
- Isidori, A. y Byrnes, C. I. (1990). Output regulation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(2):131–140.
- Khalil, H. K. y Praly, L. (2014). High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6):993–1015.
- Kumar, A. y Daoutidis, P. (1998). Control of nonlinear differential algebraic equation systems: an overview. *Nonlinear model based process control*, pp. 311–344.
- Lin, W. y Dai, L. (1996). Solutions to the output regulation problem of linear singular systems. *Automatica*, 32(12):1713–1718.
- Liu, X. y Zhang, Q. (2003). Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for T-S fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(6):830–839.
- Mahmoud, M. S. y Singh, M. G. (2012). *Discrete systems: analysis, control and optimization*. Springer Science & Business Media.
- Ohtake, H., Tanaka, K., y Wang, H. O. (2001). Fuzzy modeling via sector non-linearity concept. En *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, volumen 1, pp. 127–132.
- Oliveira, M. y Skelton, R. (2001). Stability tests for constrained linear systems. En *Perspectives in robust control*, volumen 268 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pp. 241–257. Springer-Verlag, Berlin.
- Poblete, L. A., Hernández-Cortés, T., y Estrada-Manzo, V. (2022). On the nonlinear output regulation for systems described by Takagi-Sugeno fuzzy descriptor models with a steady-state mapping as an LMI optimization problem. *Pádi Boletín Científico De Ciencias Básicas E Ingenierías Del ICBI*, 9(18):85–91.
- Saad, M., Shirazi, R. A., y Liaquat, M. (2018). Output regulation of n-link robotic manipulator using feedback linearizable systems under the approach of cascade high gain observers. En *Proceedings of the 6th International Conference on Control, Mechatronics and Automation*, pp. 16–20.
- Takagi, T. y Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1):116–132.
- Tanaka, K. y Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, New York.
- Tuan, H., Apkarian, P., Narikiyo, T., y Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 9(2):324–332.
- Wang, H., Tanaka, K., y Griffin, M. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 4(1):14–23.
- Wells, D. A. (1967). *Lagrangian dynamics: With a treatment of Euler's equations of motion, Hamilton's equations and Hamilton's principle*. McGraw-Hill.