DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación Semestral Pädi Vol. 12 No. Especial 4 (2024) 128–137

Desarrollo y análisis de la integración de la dinámica del motor en el modelo de un actuador elástico en serie con detección de fuerza de reacción
Development and analysis of the motor dynamics integration into the reaction force-sensing series elastic actuator model

Andrés A. Palma-Huerta [a,*], Miguel G. Villarreal-Cervantes [a], Iván de J. Salgado-Ramos [a]

[a] *Instituto Politécnico Nacional, Centro de Innovación y Desarrollo Tecnológico en Cómputo, 07700, Ciudad de México, México.*

Resumen

Hoy en día las investigaciones con el actuador elástico en serie con fuerza de reacción (RFSEA) consideran principalmente las dinámicas asociadas a sus elementos mecánicos en su modelado matemático, obviando las implicaciones generadas con la dinámica asociada a la parte eléctrica del sistema, es decir, se omite la relación entre el par generado con el voltaje aplicado. El hecho de incluir los componentes eléctricos en el modelo dinámico aumenta la representatividad en simulación del RFSEA aumentando su confianza en aplicaciones experimentales. En el presente trabajo, se desarrolla la integración de la dinámica del motor en el modelo de un RFSEA. Se evalúan las propiedades de controlabilidad, observabilidad y estabilidad del sistema. También se analiza su comportamiento electromecánico tanto en simulación como en experimentación, considerando un controlador proporcional integral derivativo (PID) para un problema de seguimiento de trayectoria. Los resultados muestran que la simulación numérica presenta una diferencia en el error RMS alrededor del 50.98 % y del 36.67 % con respecto a los resultados experimentales con las señales adquiridas de forma directa y filtradas, respectivamente, lo que corrobora la efectividad del modelo.

Palabras Clave: Actuador elástico en serie, RFSEA, Dinámica, Acoplamiento dinámico.

Abstract

Nowadays, research on the reaction force-sensing series elastic actuator (RFSEA) primarily considers the dynamics associated with its mechanical elements in its mathematical modeling, ignoring the implications generated by the dynamics associated with the electrical part of the system, i.e., the model omits the relationship between the generated torque and the applied voltage. Including the electrical components in the dynamic model increases the representativeness of the RFSEA in simulation, enhancing its reliability in experimental applications. In the present work, the integration of motor dynamics into the model of an RFSEA is developed. The system's controllability, observability, and stability properties are evaluated. Its electromechanical behavior is also analyzed in simulation and experimentation, considering a proportional-integral-derivative (PID) controller for a trajectory tracking problem. The results show that the numerical simulation presents a difference in the RMS error around 50.98 % and 36.67 % with respect to the experimental results with the signals acquired directly and filtered, respectively, which corroborates the effectiveness of the model.

Keywords: Series elastic actuator, RFSEA, Dynamics, Dynamics coupling

1. Introducción

El actuador elástico en serie “SEA” por sus términos en Inglés “Series Elastic Actuator” (Williamson, 1995) es un actuador lineal que aprovecha el movimiento rotatorio de un motor de corriente directa e incluye una transmisión mecánica unida al extremo de un tornillo de fuerza y considera un resorte dispuesto en serie con el motor. Este actuador almacena y libera energía mecánica, al igual que por su configuración, permite el ahorro de espacio y así, hacer más eficiente su tarea de amortiguamiento. Hay diversas combinaciones de este tipo de actuadores, las cuales proporcionan ventajas dependiendo de su apli-

*Autor para correspondencia: apalmah1500@alumno.ipn.mx
Correo electrónico: apalmah1500@alumno.ipn.mx (Andrés Abraham Palma-Huerta), mvillarrealc@ipn.mx (Miguel Gabriel Villarreal-Cervantes), isalgado@ipn.mx (Iván de Jesús Salgado-Ramos).

Historial del manuscrito: recibido el 29/09/2024, última versión-revisada recibida el 09/09/2024, aceptado el 01/09/2024, publicado el 30/11/2024. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v12iEspecial4.13322

cación. El actuador elástico SEA ha sido utilizado en muchos trabajos como en piernas robóticas (Junior *et al.*, 2016), en dispositivos biomédicos (Au *et al.*, 2007; Herr y Grabowski, 2012; Grimmer *et al.*, 2016), dispositivos mecatrónicos (Agarwal y Deshpande, 2017), dispositivos de rehabilitación de miembro inferior y superior (Subramanim *et al.*, 2022; Huo *et al.*, 2016).

A lo largo de los años, a partir de las combinaciones utilizadas por el actuador SEA, se empezó a investigar otros tipos de configuraciones modificando el orden del motor, la amortiguación y la transmisión. Los actuadores elásticos en serie se clasifican en tres tipos según la posición relativa del resorte con respecto al engranaje (Chan *et al.*, 2017): el Actuador elástico en serie con detección de fuerza "FSEA" por sus siglas en inglés "Force Sensing Elastic Actuator" ubica el resorte después del engranaje de transmisión. El actuador elástico en serie con detección de fuerza de reacción "RFSEA" por sus siglas en inglés "Reaction Force-sensing Series Elastic Actuator" que ubica el resorte antes del engranaje de la transmisión. Finalmente, el actuador elástico en serie con detección de fuerza transmitida "TFSEA" por sus siglas en inglés "Transmitted-Force-sensing Series Elastic Actuator" que ubica el resorte dentro del engranaje de la transmisión.

Dentro de las combinaciones del SEA, el RFSEA tiene una ventaja única debido a su configuración que permite detectar la fuerza de reacción y otorga un par mayor. En los trabajos(Choi *et al.*, 2022; Li *et al.*, 2023) se plantea un modelo mecánico del sistema RFSEA considerando sus partes móviles para aplicar un lazo de control implementándose en diferentes áreas en la mecatrónica, una de ellas es la interacción del dispositivo con un humano para realizar tareas específicas. También se ha aplicado en una prótesis transtibial como en (Carney, 2019), donde se utiliza el modelo dinámico del sistema para minimizar el consumo de energía. En (Yong-Su *et al.*, 2017) se realiza el modelo del sistema RFSEA considerando las variables de la posición angular y el desplazamiento del resorte y en (Kyeong-min y Young, 2019), se modela el sistema RFSEA considerando las variables del desplazamiento lineal y el desplazamiento del resorte. En ambos casos, no se incluyó la dinámica del motor. En (Silawatchananai *et al.*, 2022), se realizó el acoplamiento del motor al sistema RFSEA y se proporciona la función de transferencia de la posición del husillo con respecto al voltaje de entrada y la fuerza externa. A diferencia de (Silawatchananai *et al.*, 2022), en el trabajo actual, el modelo acoplado se obtiene a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange, donde se incorpora la restricción cinemática que relaciona el movimiento angular del motor, el movimiento lineal del husillo y del resorte como en Yong-Su *et al.* (2017). Así mismo, el modelo electromecánico obtenido se representa en el espacio de estados y se dan a conocer las propiedades del sistema acoplado.

La obtención de un modelo en espacio de estados con una mayor aproximación al comportamiento del sistema físico permitirá, no solamente tener una mayor certeza en la respuesta, también contribuirá en el desarrollo de enfoques de sintonización óptima fuera de línea de controladores y optimización estructual, los cuales mejoran el control y el diseño mecánico del sistema.

Este documento está organizado de la siguiente manera: La Sección 2 se describe el modelo dinámico del RFSEA incluyendo la integración de la parte mecánica y la eléctrica. En la Sección 3, se realiza un análisis de las propiedades matemáticas del sistema. Posteriormente, en la Sección 4 se muestran los resultados en simulación y experimentación. Finalmente, las conclusiones se presentan en la Sección 4.3.1.

2. Modelo dinámico del RFSEA

El RFSEA se puede dividir en tres secciones de estudio. La primera parte está relacionada con el movimiento del motor y su transmisión mecánica, donde se establece la relación en la posición angular y el par. La segunda parte considera el movimiento del resorte. Finalmente, se considera el movimiento lineal de un husillo de bolas, el cual es accionado directamente por el motor y afectado en forma directa por el movimiento del resorte. En la Figura 1 se muestra en color verde la sección del resorte, en color azul la sección del motor y en color rojo la parte del husillo.

De forma esquemática en la Figura 2 se muestra las secciones de estudio, donde K_s es el coeficiente de rigidez del resorte, M_s es la masa del resorte, x_s es el desplazamiento del resorte, B_s es el coeficiente de amortiguamiento del resorte, B_l es el coeficiente de amortiguamiento de la carga, M_l es la masa de la carga, x_l es el desplazamiento del husillo, J_m es la inercia del motor, B_m es el coeficiente de amortiguamiento del motor, D_l es la fuerza de reacción a la carga, τ_m es el par del motor, θ_m es la posición angular del motor, τ es el par de salida de la transmisión de banda-polea, θ es la posición angular del actuador lineal, l es el paso del husillo, r_e es el radio de la polea, $N_p = \frac{R_1}{R_2}$ es la relación de reducción entre las dos poleas y $N_m = \frac{2\pi N_p}{l}$ es la relación de reducción de husillo de bolas y la banda de transmisión.

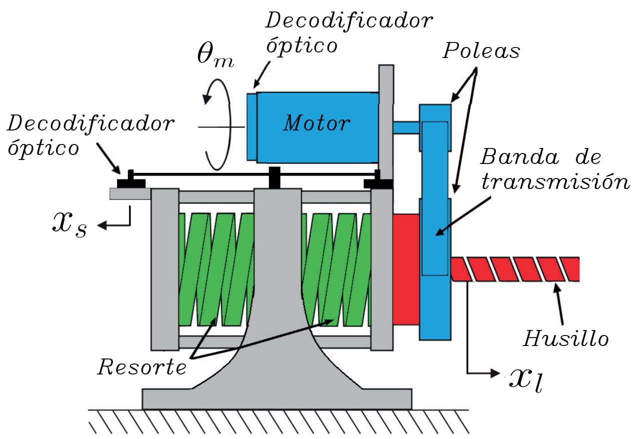


Figura 1: Partes del sistema RFSEA.

En la Figura 2 se representan los componentes móviles del RFSEA, donde el movimiento lineal del resorte x_s se expresa como en (1), θ_e es el ángulo de la polea de movimiento lineal a angular del resorte, r_e es el radio de la polea de distribución. El movimiento del motor θ_m proporciona el movimiento a la polea R_2 a través de la banda y ésto hace mover la polea R_1, la cual acciona directamente el husillo de bolas x_l. Esta relación de movimientos se describe en la restricción cinemática en (2).

En la misma figura se observa la fuerza de reacción que ingresa al husillo, denominada D_l.

$$x_s = r_e\theta_e. \quad (1)$$

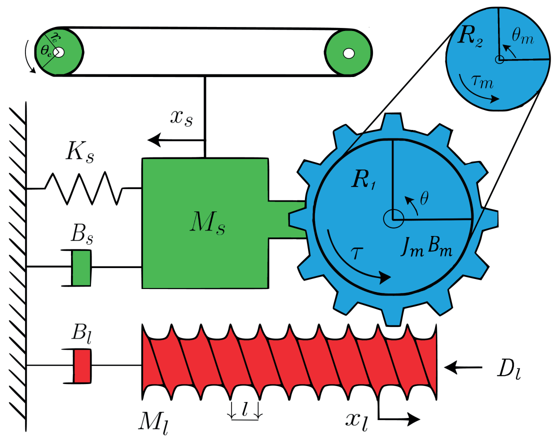


Figura 2: Diagrama esquemático de los componentes en movimiento.

2.1. *Movimiento cinemático*

Las relaciones cinemáticas que acopla el desplazamiento del husillo (x_l) con el desplazamiento del resorte (x_s) y el movimiento angular del motor (θ_m), así como su correspondiente velocidad y aceleración, se representan en (2), donde x_l es el desplazamiento del husillo, θ_m es el movimiento angular, x_s es el desplazamiento del resorte y N_m es la relación de reducción de la transmisión del husillo de bolas y banda de transmisión.

$$x_l = x_s + N_m^{-1}\theta_m, \quad (2)$$
$$\dot{x}_l = \dot{x}_s + N_m^{-1}\dot{\theta}_m, \quad (3)$$
$$\ddot{x}_l = \ddot{x}_s + N_m^{-1}\ddot{\theta}_m. \quad (4)$$

2.2. *Dinámica del sistema RFSEA*

El modelo dinámico del actuador lineal juega un papel importante para el movimiento de simulación, análisis de la estructura y diseño de algoritmos de control. Se analizan las entradas y salidas del sistema y las coordenadas generalizadas para obtener las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema utilizando el método de Euler-Lagrange.

2.2.1. *Dinámica asociada a la parte mecánica*

El Lagrangiano de la parte mecánica del RFSEA representado en (5) (Yong-Su *et al.*, 2017), se compone de la energía cinemática K (6) que relaciona a la energía cinética del resorte, del husillo y del motor. Así mismo, se incluye la energía potencial V (7) que incorpora la energía potencial del resorte y además se adiciona la restricción cinemática $\hat{C}$ (8) que relaciona los movimientos lineales y angulares del sistema (2) a través de los multiplicadores de Lagrange λ. Se considera $q = [x_l, x_s, \theta_m]^T$ como las coordenadas generalizadas del sistema RFSEA.

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q) + \lambda\hat{C}, \quad (5)$$

donde:

$$K = \frac{1}{2}M_s\dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}M_l\dot{x}_l^2 + \frac{1}{2}J_m\dot{\theta}_m^2, \quad (6)$$
$$V = \frac{1}{2}K_s x_s^2, \quad (7)$$
$$\hat{C} = x_s + N_m^{-1}\theta_m - x_l = 0. \quad (8)$$

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange resultan en (9), donde $\mathcal{D}$ es la función de disipación de Rayleigh dada en (10).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial\dot{q}_i} = F_i, \quad (9)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}B_s\dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}B_l\dot{x}_l^2 + \frac{1}{2}B_m\dot{\theta}_m^2. \quad (10)$$

Una vez resolviendo (9), se pueden agrupar las ecuaciones de movimiento de Lagrange en (11)-(13).

$$F_s = M_s\ddot{x}_s + K_s x_s - \lambda + B_s\dot{x}_s, \quad (11)$$
$$F_l = M_l\ddot{x}_l + \lambda + B_l\dot{x}_l, \quad (12)$$
$$\tau_m = J_m\ddot{\theta}_m - \lambda N_m^{-1} + B_m\dot{\theta}_m. \quad (13)$$

Despejando λ de (13) y sustituyéndolo en (11) y (12), así como considerando las fuerzas o pares de entrada $F_s = 0$, $F_l = D_l$ y τ_m, se obtienen las ecuaciones (14)-(15) que relacionan a la dinámica asociada a la parte mecánica.

$$\ddot{x}_l = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_0}x_s + \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\beta}_0}\dot{x}_l + \frac{\hat{\beta}_3}{\hat{\beta}_0}\dot{x}_s + \frac{\hat{\beta}_4}{\hat{\beta}_0}\tau_m + \frac{\hat{\beta}_5}{\hat{\beta}_0}D_l, \quad (14)$$
$$\ddot{x}_s = \frac{\hat{\beta}_6}{\hat{\beta}_0}x_s + \frac{\hat{\beta}_7}{\hat{\beta}_0}\dot{x}_l + \frac{\hat{\beta}_8}{\hat{\beta}_0}\dot{x}_s + \frac{\hat{\beta}_9}{\hat{\beta}_0}\tau_m + \frac{\hat{\beta}_{10}}{\hat{\beta}_0}D_l; \quad (15)$$

donde: $\hat{\beta}_0 = -\left(M_l M_s + J_m M_l N_m^2 + J_m N_m^2 M_s\right)/J_m^2 N_m^4$,
$\hat{\beta}_1 = K_s/J_m N_m^2$, $\hat{\beta}_2 = \left(B_l M_s + B_l J_m N_m^2 + B_m N_m^2 M_s\right)/J_m^2 N_m^4$,
$\hat{\beta}_3 = \left(B_s J_m - B_m M_s\right)/J_m^2 N_m^2$, $\hat{\beta}_4 = -M_s/J_m^2 N_m^3$,
$\hat{\beta}_5 = -(M_s + J_m N_m^2)/\left(J_m N_m^2\right)^2$, $\hat{\beta}_6 = K_s\left(J_m N_m^2 + M_l\right)/J_m^2 N_m^4$,
$\hat{\beta}_7 = \left(B_l J_m - B_m M_l\right)/J_m^2 N_m^2$,
$\hat{\beta}_8 = \left(B_s M_l + B_m M_l N_m^2 + B_s J_m N_m^2\right)/J_m^2 N_m^4$,
$\hat{\beta}_9 = M_l/J_m^2 N_m^3$, $\hat{\beta}_{10} = -1/J_m N_m^2$.

2.2.2. *Dinámica asociada a la parte eléctrica*

El modelo RFSEA incluye además una dinámica asociada a la parte eléctrica. Esta dinámica está relacionada con el motor de CD. En la Figura 3 se muestra el diagrama esquemático del motor de CD. Aplicando la ley de voltaje de Kirchoff en el diagrama, la ecuación que resulta de la parte eléctrica está descrita en (16) (Chiasson, 2005; De Doncker *et al.*, 2020), donde K_e es la constante de fuerza electromotriz, L_a es la inductancia de armadura, R_a es la resistencia de armadura y V_{in} es el voltaje aplicado al motor.

$$L_a\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_e\dot{\theta}_m = V_{in}. \quad (16)$$

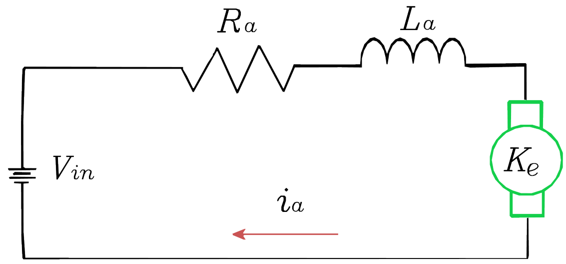


Figura 3: Diagrama de un motor CD.

2.3. *Acoplamiento dinámico*

En esta sección se integrará la dinámica que relaciona la parte eléctrica con la parte mecánica del RFSEA. Para realizar lo anterior, se acoplará el movimiento cinemático de velocidad del husillo proporcionado en (3), en la dinámica de la parte eléctrica del RFSEA (16). Por lo que se despeja la corriente de armadura i_a en (16) y se utiliza la velocidad angular del motor $\dot{\theta}_m$ de la restricción cinemática en (3), obteniéndose (17):

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{K_e N_m}{L_a}\dot{x}_l + \frac{K_e N_m}{L_a}\dot{x}_s - \frac{R_a}{L_a}i_a + \frac{1}{L_a}V_{in}. \tag{17}$$

Utilizando las ecuaciones que describen el comportamiento mecánico (14)-(15) y aquella que describe el comportamiento eléctrico (17), se puede hacer una descripción matemática completa del RFSEA, considerando la relación $\tau_m = K_m i_a$, lo que resulta en (18)-(20), donde $\hat{\beta_0} = \beta_0, \hat{\beta_1} = \beta_1, \hat{\beta_2} = \beta_2, \hat{\beta_3} = \beta_3, \beta_4 = -K_m\hat{\beta_4}, \hat{\beta_5} = \beta_5, \hat{\beta_6} = \beta_6, \hat{\beta_7} = \beta_7, \hat{\beta_8} = \beta_8, \beta_9 = K_m\hat{\beta_9}, \hat{\beta_{10}} = \beta_{10}, \beta_{11} = -K_e N_m/L_a, \beta_{12} = K_e N_m/L_a, \beta_{13} = -R_a/L_a$, $\beta_{14} = 1/L_a$.

$$\frac{d\dot{x}_l}{dt} = \frac{\beta_1}{\beta_0}x_s + \frac{\beta_2}{\beta_0}\dot{x}_l + \frac{\beta_3}{\beta_0}\dot{x}_s + \frac{\beta_4}{\beta_0}i_a + \frac{\beta_5}{\beta_0}D_l, \tag{18}$$

$$\frac{d\dot{x}_s}{dt} = \frac{\beta_6}{\beta_0}x_s + \frac{\beta_7}{\beta_0}\dot{x}_l + \frac{\beta_8}{\beta_0}\dot{x}_s + \frac{\beta_9}{\beta_0}i_a + \frac{\beta_{10}}{\beta_0}D_l, \tag{19}$$

$$\frac{di_a}{dt} = \beta_{11}\dot{x}_l + \beta_{12}\dot{x}_s + \beta_{13}i_a + \beta_{14}V_{in}. \tag{20}$$

2.3.1. *Representación en espacio de estados*

Considerando el vector de estados $x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5] = [x_l, x_s, \dot{x}_l, \dot{x}_s, i_a]^T$, la señal de control $u = V_{in}$ y D_l como la fuerza de reacción, el sistema RFSEA descrito en el espacio de estado se representa en (21).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + ED_l, \\ y(t) &= Cx(t); \end{aligned} \tag{21}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta_1/\beta_0 & \beta_2/\beta_0 & \beta_3/\beta_0 & \beta_4/\beta_0 \\ 0 & \beta_6/\beta_0 & \beta_7/\beta_0 & \beta_8/\beta_0 & \beta_9/\beta_0 \\ 0 & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{14} \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_5/\beta_0 \\ \beta_{10}/\beta_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La salida del sistema $y(t)$ considera el desplazamiento lineal del husillo (x_l), el desplazamiento lineal del resorte (x_s) y la corriente (i_a) como los estados medibles.

3. Propiedades del modelo

En esta sección se realiza el análisis de las propiedades matemáticas que contempla el modelo dinámico del RFSEA (21) con el propósito de dejar las bases para la implementación futura de controladores.

Los valores numéricos de los parámetros del sistema RFSEA se muestran en las Tablas 1-2. Estos valores se obtienen a través de las hojas de datos de los componentes del sistema, de un proceso de medición experimental, así como de un proceso de identificación paramétrica asumiendo que no existe una fuerza externa perturbando al mismo, i.e., $D_l = 0$.

Cuando se estudia la dinámica de sistemas que incluyen resortes, es común utilizar el concepto de masa equivalente (m_{eq}) para simplificar los cálculos. En un resorte, diferentes partes de la masa se mueven con diferentes velocidades. Al utilizar esta masa equivalente en lugar de la masa total del resorte, se obtiene una mejor aproximación del comportamiento dinámico del sistema (Hibbeler, 2004). Esto simplifica los análisis y cálculos en la dinámica de sistemas mecánicos, tales como en la determinación de la frecuencia natural de vibración de sistemas masa-resorte y en la resolución de ecuaciones de movimiento.

La masa equivalente del resorte se calcula como $m_{eq} = 1/3M_s$, donde M_s es la masa total de los dos resortes que componen el sistema. Para este caso en particular se tiene una masa de 0.1730 kg para el resorte del sistema, aplicando la definición de masa equivalente resultaría en $m_{eq} = 0.0577\ kg$, la cual se considera como M_s.

Tabla 1: Parámetros de los elementos mecánicos y eléctricos del sistema RFSEA.

Nombre	Valor	Nombre	Valor
K_s	$15,293\ N/m$	L_a	$0.0820\ mH$
M_l	$0.0709\ kg$	K_m	$0.0302\ Nm/A$
M_s	$0.0577\ kg$	K_e	$0.0306\ V/rad/s$
N_m	$9,817$	B_m	$4.41 \times 10^{-4}\ Nms/rad$
J_m	$1.42 \times 10^{-5}\ kgm^2$	B_s	$89.7083\ Ns/m$
R_e	$0.2990\ \Omega$	B_l	$15.7649\ Ns/m$

Tabla 2: Constantes asociadas al espacio de estados del sistema RFSEA.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
β_0	-9.9859×10^{-5}	β_8	0.0673
β_1	11.1739	β_9	1.2504×10^{-5}
β_2	0.0128	β_{10}	-7.3065×10^{-4}
β_3	0.0642	β_{11}	-3.6636×10^{6}
β_4	-9.1276×10^{-6}	β_{12}	3.6636×10^{6}
β_5	-7.3068	β_{13}	-3.6463×10^{-4}
β_6	11.1745	β_{14}	1.2195×10^{4}
β_7	0.0097		

3.1. *Controlabilidad*

Un sistema controlable es capaz de mover cualquier estado deseado dentro de un tiempo finito (Chen, 1984). Para determinar la controlabilidad de un sistema se utiliza la matriz de controlabilidad que se expresa de la siguiente forma:

$$
C = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1114.69620044374 & -3225477.77374696 & 10346953935.1639 \\
0 & 0 & -1527.06936130153 & 6489547.66442971 & -22983353278.7112 \\
0 & 1114.69620044374 & -3225477.77374696 & 10346953935.1639 & -34833893696234.2 \\
0 & -1527.06936130153 & 6489547.66442971 & -22983353278.7112 & 78924515152419.5 \\
12195.1219512195 & -44467578822.1297 & 152465617091998 & -520349781838962 & 177526423509264
\end{bmatrix}. \quad (22)
$$

$$
O = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3663595.09145761 & 3663595.09145761 & -3646.34146341463 \\
0 & -111897.274659854 & -128.481668903429 & -643.260387568699 & 0.0914050884363864 \\
0 & -111903.733558466 & -97.3677428189736 & -674.407341192512 & -0.125219687626726 \\
0 & -23662789.2488403 & 13472707514.0232 & -13472828513.5543 & 12502180.6015439 \\
0 & 86359987.6132465 & -255730.882103161 & 739440.654478904 & -264.489177447251 \\
0 & 86363884.4799048 & 536929.723590330 & -53199.8926648182 & 532.142908483236 \\
0 & 100559151139.500 & -46222104528630.2 & 46222619220641.9 & -42668682110.7949 \\
0 & -54130581227.4004 & 929840315.286973 & -1216803924.04797 & 848450.222683436 \\
0 & -54127706139.5240 & -2013361820.97692 & 1726412808.02300 & -1884634.96885432 \\
0 & -356139844494336 & 1.57758875369446 & -157760698639142 & 145571667277596
\end{bmatrix}. \quad (23)
$$

$$
C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{pmatrix}. \quad (24)
$$

Sustituyendo en la matriz de controlabilidad C los valores numéricos mostrados en las Tablas 1-2, se obtiene (22).

El rango de la matriz de controlabilidad resulta en $C = 5$, por lo que al tener rango completo se establece que el sistema (21) es totalmente controlable.

3.2. *Observabilidad*

Un sistema observable es capaz de determinar el estado completo a partir de las salidas observadas a lo largo del tiempo (Chen, 1984). Para determinar la observabilidad de un sistema se utiliza la matriz de observabilidad que se expresa de la siguiente forma:

$$
O = \begin{pmatrix} C^\top & CA^\top & CA^{2^\top} & CA^{3^\top} & CA^{4^\top} \end{pmatrix}. \quad (25)
$$

Sustituyendo en la matriz de observabilidad O los valores numéricos mostrados en las Tablas 1-2, se obtiene (23).

El rango de la matriz de observabilidad resulta $O = 5$, por lo que se puede concluir que el sistema (21) es observable cuando la perturbación es cero.

3.3. *Estabilidad en lazo abierto*

La estabilidad del sistema puede determinarse analizando la ubicación en el plano complejo de los eigenvalores del sistema (21). El polinomio característico de la matriz A se obtiene resolviendo el determinante:

$$
\det(A - \lambda I) = 0, \quad (26)
$$

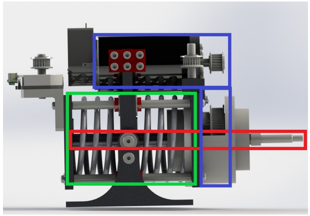
donde λ son los eigenvalores e I es la matriz identidad de la misma dimensión que A. Al resolver el polinomio característico de (26) y depejando λ se obtienen los eigenvalores del sistema. Para este sistema, los eigenvalores son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4.14 + 63.50i$, $\lambda_3 = -4.14 - 63.50i$, $\lambda_4 = -4.78 + 26.24i$, $\lambda_5 = -4.78 - 26.24i$. Lo anterior establece que el sistema en lazo abierto (21) es marginalmente estable. La ecuación $\dot{x} = Ax$ es marginalmente estable si y solo si todos los eigenvalores de A tienen parte real negativa o cero y aquellos polos que tienen parte real igual a cero son raíces simples del polinomio mínimo de A (Teorema 5.4 Chen, 1984, p. 130).

4. Resultados

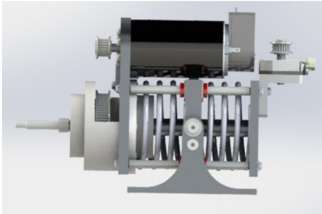
Una vez establecidas las propiedades y características del sistema, se validan los resultados teóricos a través de la simulación y la experimentación. En la primera parte de esta sección se muestra las características y elementos que conforman el RF-SEA. Posteriormente, se describe la plataforma experimental, para que en la última parte se discuta y analicen los resultados numéricos en simulación y experimentación.

4.1. *RFSEA*

En la Figura 4, se presentan las vistas laterales del actuador desarrollado en el programa de Diseño Asistido por Computadora “CAD” (por sus términos en inglés “Computed Aided Design”), en donde en azul esta la actuación y transmisión del movimiento angular del motor, en verde el desplazamiento del resorte de fuerza de reacción medido a través de una banda dentada y en rojo el desplazamiento lineal del husillo como se estableció en la parte teórica del modelo dinámico.



a. Partes del movimiento del RFSEA.



b. Vista lateral del lado derecho.

Figura 4: Diseño en CAD del sistema RFSEA.

En la Tabla 3 se describen las dimensiones de este actuador, el cual está diseñado para soportar 90 Kg de carga que se desplaza con un husillo de bolas. Este modelo está concretado en la Figura 5, donde se señalan las piezas que se adquirieron para este dispositivo y que se nombran en la Tabla 4, así como se señalan cuantas piezas se ocuparon en el sistema.

Tabla 3: Dimensiones y peso del sistema RFSEA.

Peso (kg)	**Alto (mm)**	**Largo (mm)**	**Ancho (mm)**
3.5	109	200	67

Tabla 4: Nombre de las piezas implementadas en el sistema RFSEA relacionadas con la Figura 5.

	Material	Cantidad
A	Decodificador óptico AMT223B-6000-S	1
B	Placa en L para decodificador óptico	1
C	SPJG6-25-F9-P5 Eje lineal	2
D	Bujes lineales LMK6	4
E	SPWR6-84-M3-N3-SC50 Eje lineal	4
F	BSSR0802-160 husillo de bolas	1
H	Motor Maxon RE40 24 V 150W	1
I	Decodificador óptico Maxon RE40	1
J	TBCS-S2M040 Sujetador de banda 4mm	1
K	HTPA72S2M060-A-H12 Polea	1
L	HTPS20S2M060-A-H6 Polea	1
M	HTPA20S2M040-A-H6 Polea	2

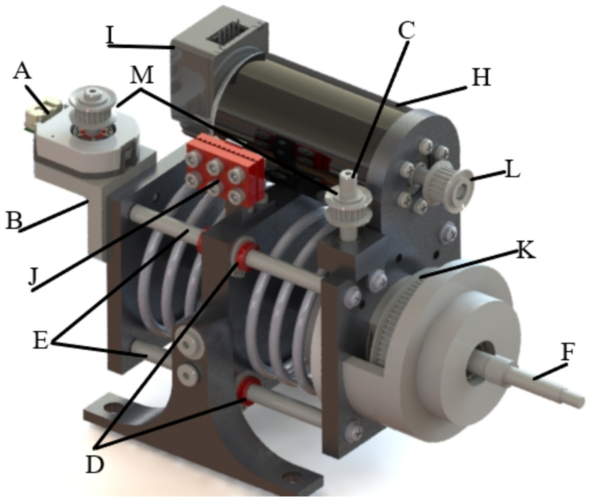


Figura 5: Piezas del RFSEA relacionadas con la Tabla 4.

4.2. *Plataforma experimental*

Una vez manufacturadas y ensambladas las piezas de la estructura del sistema, se corroboró su funcionamiento en la plataforma experimental. El prototipo experimental del sistema propuesto se muestra en la Figura 6, el cual está compuesto por los elementos siguientes: 1) Computadora Personal, donde se programa el algoritmo de control e incluye una tarjeta madre denominada microATX DG43GT con un procesador Intel Core Quad Q8400 a 2.66 GHz con 4 Gb de memoria RAM. Además, se le incluye un sistema de adquisición de datos Sensoray 626, por medio de un puerto PCI para el envío y recepción de datos analógicos y digitales. 2) Una fuente de voltaje de corriente directa a 24 V con un límite de 6 A para proporcionar la potencia al motor. 3) Un controlador de potencia de motor 48/5 HE que permite enviar señales analógicas amplificadas de voltajes a través de una señal analógica de entrada correspondiente a la señal de control. Además, permite adquirir el valor de la corriente de armadura del motor, mediante el envío de una señal analógica. 4) Un motor de CD denominado RE-40 que proporciona un par nominal de 0.177Nm y cuenta con un codificador óptico MR con 1024 pulsos por vuelta de la compañía Maxon Motors. 5) Los componentes mecánicos del RFSEA. 6) Interfaz de conexión entre la tarjeta de adquisición de datos, los decodificadores ópticos y el controlador de potencia.

Para este prototipo se utilizó una computadora que realiza el procesamiento de información y que contiene la programación del algoritmo de control y el direccionamiento de datos de entrada y salida. Para la adquisición de datos se utiliza una tarjeta de adquisición de datos para mandar y recibir señales de los periféricos. A través de tarjetas de conexión es posible mandar la señal de control y recibir la señal de la medición de corriente junto con las señales de los dos decodificadores ópticos. La parte mecánica es actuada por el motor, a quien el controlador de motor manda la señal de potencia y a su vez afecta el sistema RFSEA. El movimiento del sistema permite tener una retroalimentación con los decodificadores ópticos para así realizar el seguimiento de trayectoria deseado. Este circuito electrónico se muestra en la Figura 6.

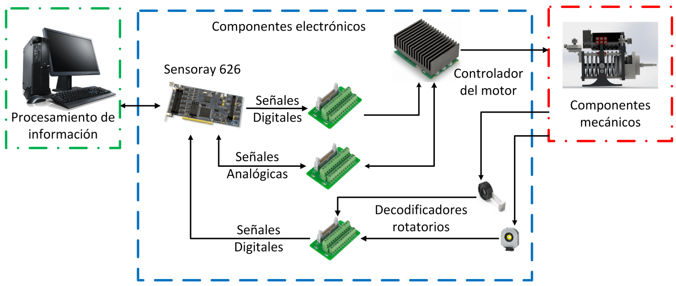


Figura 6: Conexiones de las tres partes del sistema RFSEA.

En este trabajo se utiliza un controlador PID "Proporcional-Integral-Derivativo" para realizar un control por seguimiento de trayectoria. El controlador PID es el más usado en el campo del control automático utilizado para regular sistemas dinámicos (Johnson y Moradi, 2005). Este algoritmo ajusta la señal de control a través de tres componentes: el término proporcional (P), el término integral (I) y el término derivativo (D). La ecuación del controlador PID es:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)\,dt + K_d \frac{d}{dt} e(t) \qquad (27)$$

donde $u(t)$ es la señal de control, $e(t) = x_{l_d} - x_l$ es el error de posición, K_p en la ganancia proporcional, K_i es la ganancia integral, K_d es la ganancia derivativa y x_{l_d} es la posición deseada en el husillo.

A través de una computadora, usando la tarjeta Sensoray 626, se realiza la programación en Matlab-Simulink del algoritmo de control PID. La señal de control es enviada al controlador del motor, el cual mueve la posición angular del motor y a su vez el husillo de bolas. El movimiento del husillo es también afectado por el desplazamiento del resorte, este último obtenido por un decodificador óptico. Esta retroalimentación lleva al algoritmo de control a que el error de seguimiento tienda a cero. Este lazo de control se ilustra en la Figura 7.

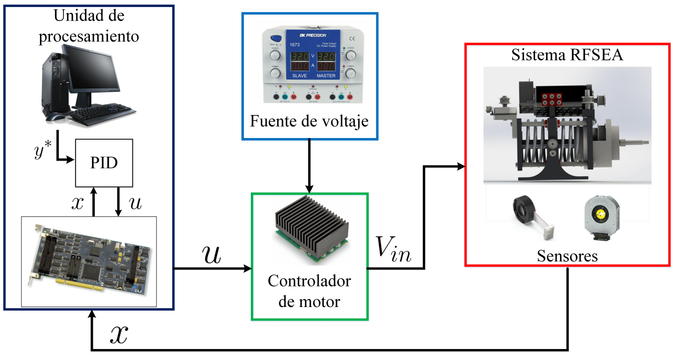


Figura 7: Lazo de control en el sistema RFSEA.

Del modelo en CAD del RFSEA representado en la Figura 5 se realizó el proceso de manufacturado y ensamblado para lograr una plataforma experimental del RFSEA mostrada en la Figura 8. Esta plataforma contempla diversos propósitos, uno de ellos es añadir un mecanismo de contrapeso para probar la fuerza externa y evaluar la respuesta del sistema RFSEA ante las perturbaciones. El prototipo RFSEA se muestra en la Figura 8, donde se indica la recepción de datos y de alimentación enlazada entre el sistema RFSEA y la computadora (PC).

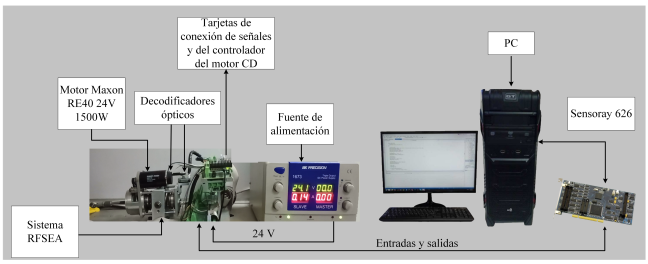


Figura 8: Plataforma experimental del RFSEA.

4.3. Simulación y experimentación

Con la plataforma experimental descrita anteriormente, se prueba el sistema RFSEA tanto en simulación como en experimentación. Se detallan los métodos y procedimientos utilizados en las pruebas que permiten validar el modelo RFSEA. La experimentación proporciona la evidencia empírica necesaria para evaluar el desempeño y la similitud con el modelo obtenido en este trabajo.

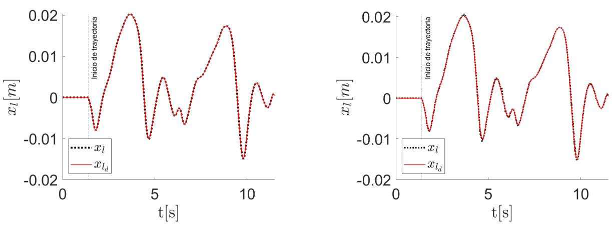
4.3.1. Condiciones del experimento

Este prototipo se pretende ocupar para implementarse en una prótesis transtibial en un trabajo futuro, por lo que la referencia de trayectoria angular del tobillo dada en (Moreira *et al.*, 2021) se adecúa para que pueda ser utilizado por el motor del actuador RFSEA. Ambas pruebas consideran las mismas ganancias empíricas en el controlador. La derivada del error se obtiene a través de la derivada numérica. Para hacer más justa la comparativa entre la simulación y la experimentación, se agrega un ruido gaussiano de ± 0.000001 m en la simulación. Ambas pruebas fueron realizadas en el programa de MATLAB-SIMULINK en un equipo con Intel Core Quad Q8400 a 2.66 GHz con 4 Gb de memoria RAM. Se utiliza el método de integración de Euler con un tiempo de integración de $5ms$ tanto para el caso de la simulación y de la experimentación. Asi mismo, el tiempo de muestreo se establece a $5ms$. Las ganancias establecidas en el controlador PID se obtuvieron de forma empírica. Estas ganancias fueron aplicadas tanto en simulación como en implementación. Los valores numéricos de las ganancias son: $K_p = 50,000$, $K_i = 70,000$, $K_d = 100$.

En la Figura 9 se muestra el seguimiento de trayectoria, donde la señal continua representa la trayectoria deseada y la señal punteada es la trayectoria real. De forma similar, en la Figura 10 se presenta la velocidad del husillo de bolas. En el inciso b. de la Figura 10 se observa que la derivada numérica amplifica dicho ruido que se obtiene de la medición de los instrumentos. La posición y velocidad del resorte se describen en las Figuras 11 y 12, respectivamente, teniendo el mismo efecto de amplificación de ruido en la derivada numérica.

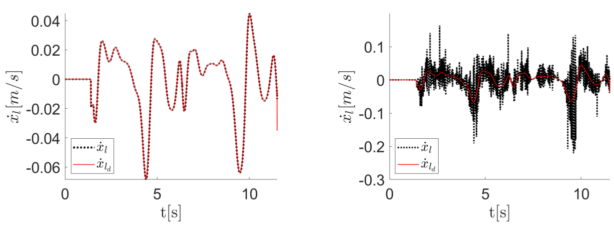
En el caso de la Figura 13 se observa la corriente de armadura del motor en donde se destaca la saturación de la corriente de 6A en los resultados experimentales a comparación de la señal en simulación. En el caso de la señal de control mostrada en la Figura 14, se observa una similitud. Sin embargo, hay una delimitación por la fuente de voltaje de 24V que se observa en la parte de implementación.

En la Figura 15 se presenta el error de seguimiento de trayectoria. Se observa que el error tanto en simulación como en experimentación tiene una magnitud de 0.001m, presentando un error mayor en los cambios de dirección de la referencia de trayectoria original. Finalmente, en la Figura 16 se describe la derivada del error donde se observa que la amplitud es similar en simulación y experimentación.



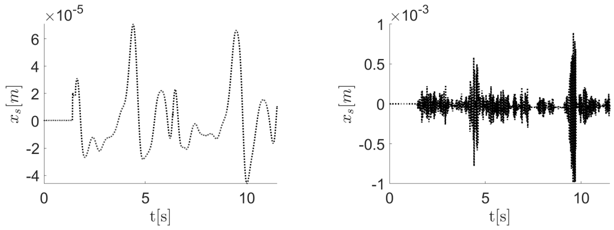
a. Simulación. b. Experimentación.

Figura 9: Posición de x_l.



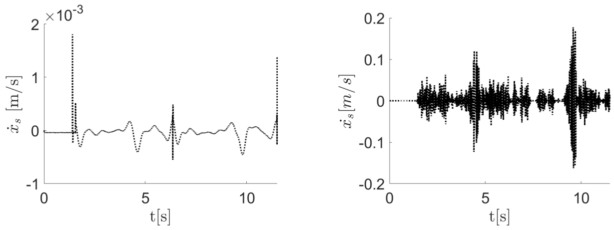
a. Simulación. b. Experimentación.

Figura 10: Velocidad de x_l.



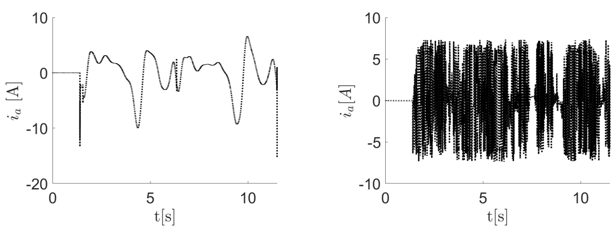
a. Simulación. b. Experimentación.

Figura 11: Posición de x_s.



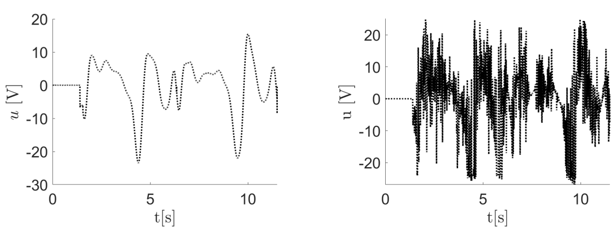
a. Simulación. b. Experimentación.

Figura 12: Velocidad de x_s.



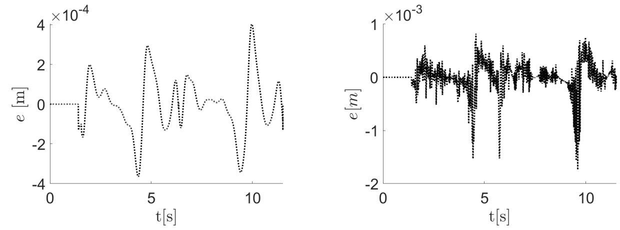
a. Simulación. b. Experimentación.

Figura 13: Corriente I_a.



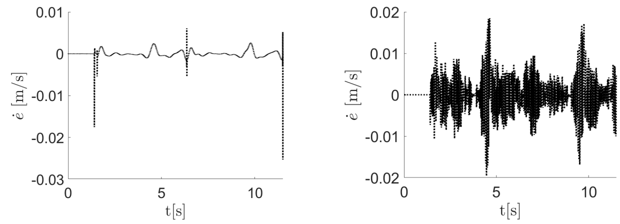
a. Simulación. b. Experimentación.

Figura 14: Señal de control u.



a. Simulación. b. Experimentación.

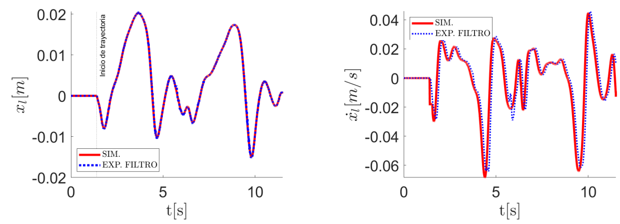
Figura 15: Error de trayectoria e.



a. Simulación. b. Experimentación.

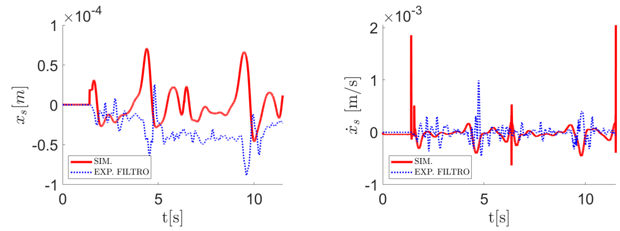
Figura 16: Derivada del error de trayectoria $\dot{e}$.

Con el propósito de demostrar una comparativa justa, se aplicó un filtro pasa bajas "Butterworth" de orden $n = 4$ en cada una de las señales a considerar, con el propósito de proporcionar una respuesta que reduzca el ruido y poder así compararla de una forma mas efectiva con la simulación numérica. La frecuencia de corte del filtro se estableció en 4 Hz y una frecuencia de muestreo de $2,000$ Hz. En este caso, el filtro se implementó fuera de línea a través del programa MATLAB. En las Figs. 17-20 se muestra la señal de simulación en línea roja continua y la señal de implementación en línea azul punteada. Se observa una mayor similitud entre los resultados en simulación y experimentación. La posible discrepancia es debido al ruido en la señal y a las incertidumbres asociadas que no se incluyeron en el modelo.



a. Posición x_l b. Velocidad x_l

Figura 17: Señal en simulación y experimentación (con filtro) del husillo x_l.



a. Posición x_s b. Velocidad x_s

Figura 18: Señal en simulación y experimentación (con filtro) del resorte x_s.

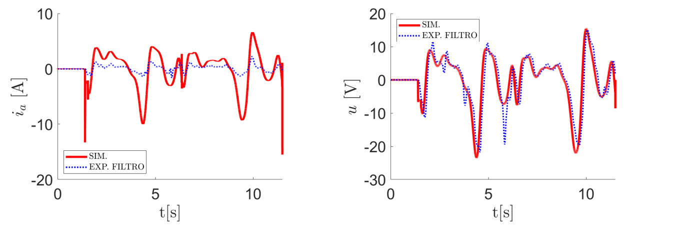
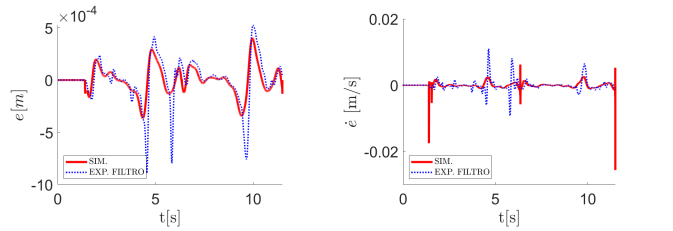


Figura 19: Señal en simulación y experimentación (con filtro) de la corriente y señal de control.



a. Error. b. Derivada del error.

Figura 20: Señal en simulación y experimentación (con filtro) del error del sistema.

La puesta en marcha del sistema RFSEA, tanto en simulación como en experimentación, permite visualizar la comparación entre los estados del sistema aunado con dinámicas que no se modelan en la simulación numérica, como el ruido en las señales y las variaciones que se reflejan en la señal de control y la corriente.

En las Tablas 5 y 6 se muestran los errores cuadrático medio “RMS” (por sus siglas en inglés “Root Mean Square”) del seguimiento de trayectoria con la señal sin filtrar y filtrada de x_l. El RMS es una medida precisa para comparar la magnitud del error en simulación y experimentación del seguimiento de trayectoria. Se observa que la diferencia entre las magnitudes RMS es de 50.98 % en simulación con respecto a los resultados experimentales con la señal sin filtar. Mientras que con la señal filtrada se presenta un diferencia entre las magnitudes RMS de 36.67 %. Con las Figs. 9-16, las Figs. 17-20 y las mediciones del error RMS dado en las Tablas 5, 6 se muestra la similitud en las respuestas de simulación e implementación, y también la efectividad del modelo matemático realizado.

Tabla 5: Error RMS en simulación y experimentación del desplazamiento del husillo x_l con respecto a la trayectoria de referencia, considerando la señal x_l sin filtrar en la experimentación.

Error RMS en simulación	Error RMS en experimentación
0.000134	0.000275

Tabla 6: Error RMS en simulación y experimentación del desplazamiento del husillo x_l con respecto a la trayectoria de referencia, considerando la señal x_l filtrada en la experimentación.

Error RMS en simulación	Error RMS en experimentación
0.000134	0.000212

Conclusiones

En este trabajo, se modeló el sistema RFSEA incluyendo de manera detallada la parte mecánica y eléctrica, considerando el motor de CD para consolidar un modelo electromecánico. Este enfoque integral permitió capturar con precisión las interacciones y el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de operación.

Los resultados obtenidos tanto en la simulación como en experimentación validan la precisión y efectividad del modelo desarrollado. Las simulaciones fueron realizadas para predecir el comportamiento del sistema bajo diversas condiciones, mientras que los experimentos se llevaron a cabo para verificar la exactitud de la respuesta en un entorno real. El error obtenido en RMS fue de 0.000134 en simulación y de 0.0007277 en el experimento considerando la señal sin filtrar. En el caso de la señal filtrada, se presenta un error obtenido en RMS de 0.000134 en simulación y de 0.000212 en el experimento. Los resultados muestran que la simulación numérica presenta una diferencia en el error RMS sin filtrar alrededor del 50.98 % con respecto a los resultados experimentales, mientras que el error RMS filtrado es de alrededor del 36.67 %, lo que corrobora la efectividad del modelo.

El modelo validado proporciona una herramienta confiable para futuras investigaciones y desarrollos en el campo de actuadores elásticos en serie, teniendo la posibilidad de mejora en la eficiencia y rendimiento en aplicaciones robóticas y de automatización.

Como trabajo futuro, el RFSEA será aplicado en un prototipo de prótesis transtibial con el objetivo de replicar el ciclo de marcha de la caminata humana utilizando las propiedades intrínsecas del sistema y con el modelo obtenido probar diferentes controladores y sistemas que permitan realizar el movimiento deseado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al financiamiento de la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN) mediante el proyecto de innovación 202321701 y los proyectos SIP 20220255, 20230320, 20241335. También a la Red de Expertos en Robótica y Mecatrónica (RERyM) del IPN, sin dichos recursos combinados, no hubiera sido posible la realización del prototipo experimental.

Referencias

Agarwal, P. y Deshpande, A. D. (2017). Series elastic actuators for small-scale robotic applications. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 9(3).

Au, S. K., Weber, J., y Herr, H. M. (2007). Biomechanical design of a powered ankle-foot prosthesis. *2007 IEEE 10th International Conference on Rehabilitation Robotics*, pp. 298–303.

Carney, M. E. (2019). *Design and Evaluation of a Reaction-Force Series Elastic Actuator Configurable as Biomimetic Powered Ankle and Knee Prostheses*. Tesis doctoral, MIT Media Lab.

Chan, L., Su-Hui, K., Jihoo, K., y Sehoon, O. (2017). Generalization of series elastic actuator configurations and dynamic behavior comparison. *Actuators*, 6:26–30.

Chen, C.-T. (1984). *Linear system theory and design*. Oxford University Press.

Chiasson, J. (2005). *Modeling and high performance control of electric machines*. John Wiley & Sons.

Choi, S., Lee, S., y Kong, K. (2022). Precise torque-output estimation of a reaction-force-sensing series elastic actuator for human-robot interaction. *IFAC-PapersOnLine*, 55(27):424–429.

De Doncker, R. W., Pulle, D. W., y Veltman, A. (2020). *Advanced electrical drives: analysis, modeling, control*. Springer Nature.

Grimmer, M., Holgate, M., Holgate, R., Boehler, A., Ward, J., Hollander, K., Sugar, T., y Seyfarth, A. (2016). A powered prosthetic ankle joint for walking and running. *Biomedical engineering online*, 15(3):37–52.

Herr, H. M. y Grabowski, A. M. (2012). Bionic ankle–foot prosthesis normalizes walking gait for persons with leg amputation. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 279(1728):457–464.

Hibbeler, R. C. (2004). *Engineering mechanics: dynamics*. Pearson Educación.

Huo, W., Mohammed, S., Moreno, J. C., y Amirat, Y. (2016). Lower limb wearable robots for assistance and rehabilitation: A state of the art. *IEEE Systems Journal*, 10(3).

Johnson, M. A. y Moradi, M. H. (2005). *PID control*. Springer.

Junior, A. L., de Andrade, R. M., y Bento Filho, A. (2016). Series elastic actuator: Design, analysis and comparison. *Recent Advances in Robotic Systems*, 1(3).

Kyeongmin, K. y Young, S.-L. (2019). Implementation of mass-independent impedance control for rfsea using a linkage arm. *IEEE Access*, 7:104823–104832.

Li, Q., Xing, Y., Gao, G., Na, J., y Lu, S. (2023). Adaptive finite-time parameter estimation for a reaction force-sensing series elastic actuator. En *Chinese Intelligent Systems Conference*, pp. 743–752. Springer.

Moreira, L., Figueiredo, J., Fonseca, P., Vilas-Boas, J. P., y Santos, C. P. (2021). Lower limb kinematic, kinetic, and emg data from young healthy humans during walking at controlled speeds. *Scientific data*, 8(1).

Silawatchananai, C., Howimanporn, S., y Ruangurai, P. (2022). Development of force compliant in series elastic actuator systems. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 11(6):422–428.

Subramanim, K., Sriraman, Amirtham, V., Rani, A., Ali, S., y Perumal, T. (2022). Review of current development of knee rehabilitation device using series elastic actuator (sea). En *ICPER 2020 Proceedings of the 7th International Conference on Production, Energy and Reliability*. Springer.

Williamson, M. M. (1995). Series elastic actuators. *Massachusetts institute of technology artificial intelligence laboratory*.

Yong-Su, P., Se-Hoon, O., y Tae-Hun, K. (2017). *External Force Estimation in Reaction Force Sensing Series Elastic Actuator for Human Interaction Control*. Tesis doctoral, DGIST.