

Geodésicas de un agujero negro de Schwarzschild modificado Geodesics of a modified Schwarzschild black hole

L. O. Téllez-Tovar ^a, Omar Pedraza ^a, V. E. Cerón ^{a,*}, R.G. Escorcía-Ramírez ^a

^aÁrea Académica de Matemáticas y Física, UAEH, Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5, C P. 42184, Mineral de la Reforma, Hidalgo, México.

Resumen

En esta contribución, presentamos un análisis de las curvas geodésicas nulas que se obtienen de considerar un espacio-tiempo estático con simetría esférica que describe un agujero negro de Schwarzschild con un déficit de ángulo rodeado de materia similar a la quintaesencia. Primero, se analiza el potencial efectivo con respecto a los parámetros de la solución. Finalmente se presenta el análisis geodésico por medio del parámetro de impacto crítico.

Palabras Clave: Agujero negro, quintaesencia, geodésicas .

Abstract

In this contribution, we present an analysis of the null geodesic curves obtained from considering a static space-time with spherical symmetry describing a Schwarzschild black hole with a deficit solid angle and quintessence-like matter. First, the effective potential is analyzed with respect to the solution parameters. Finally, the geodesic analysis is presented through the critical impact parameter.

Keywords: Black hole, quintaessence, geodesics.

1. Introducción

Los agujeros negros son unos de los objetos más intrigantes de la Relatividad General, su estudio ha sido pieza clave en el desarrollo teórico y computacional desde su descubrimiento teórico por el físico alemán Karl Schwarzschild en 1915. A partir de esa fecha diversos modelos de agujeros negros se han propuesto caracterizados por distintos parámetros como su masa, carga, momento angular entre otros.

Actualmente la propuesta de una hipotética energía oscura que domina el universo ha llevado a proponer modelos que describan dicha energía. Las propuestas para describir la energía oscura son diversas y la necesidad de implementar técnicas y herramientas matemáticas para su estudio es muy amplio como Padilla *et al.* (2021) lo describe. Una propuesta es la constante cosmológica como una posibilidad, pero también se han propuesto modelos alternativos que se basan en un campo escalar como lo son el fantasma (ver Caldwell (2002)), la K esencia (ver Armendariz-Picon *et al.* (2000)) y la quintaesencia (ver Carroll (1998)) entre otros.

Así, se han desarrollado modelos de agujeros negros que

involucran información de energía oscura. Por ejemplo, una solución estática con simetría esférica que describe un agujero negro rodeado de quintaesencia propuesto por Kiselev (2003), otro modelo es el presentado por Barriola y Vilenkin (1989), que describe a un agujero negro de Schwarzschild con un déficit de ángulo y materia similar a la quintaesencia.

Para el estudio de las propiedades físicas de los agujeros negros, se analizan los campos de prueba que los rodean. Un aspecto importante, es el estudio de las curvas geodésicas que representan la trayectoria natural que una partícula libre (partícula de prueba) debe seguir cuando siente la presencia del campo gravitacional de un agujero negro. El estudio geodésico siempre permite obtener un potencial efectivo en términos de la coordenada radial y de los distintos parámetros que representan al agujero negro. Con un análisis del potencial efectivo es posible determinar las condiciones para poder obtener curvas geodésicas cerradas, abiertas, circulares estables e inestables, así como saber las condiciones cuando la curva geodésica es absorbida por el agujero negro.

Estudios geodésicos de diferentes modelos de agujeros negros son muy amplios, por mencionar algunos: Fernando

* Autor para correspondencia: vceron@uaeh.edu.mx

Correo electrónico: osvaldo_tellez@uaeh.edu.mx (Luis Osvaldo Téllez-Tovar), omar@uaeh.edu.mx (Omar Pedraza-Ortega), vceron@uaeh.edu.mx (Victoria E. Cerón-Angeles), es339601@uaeh.edu.mx (Raúl Guillermo Escorcía-Ramírez).

Historial del manuscrito: recibido el 29/07/2024, última versión-revisada recibida el 03/09/2024, aceptado el 04/09/2024, publicado el 26/04/2025. **DOI:** <https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13468>



(2012) estudió las curvas geodésicas de la solución de Schwarzschild rodeado de quintaesencia, también Pedraza *et al.* (2021) se enfocaron en analizar geodésicas en el espacio de Hayward rodeado de quintaesencia.

El principal objetivo de esta contribución es estudiar las geodésicas nulas que se generan alrededor del agujero negro de Schwarzschild con un déficit de ángulo y materia similar a la quintaesencia. Dado que el entendimiento de la energía oscura es un campo de mucha importancia en la física, el estudio de geodésicas alrededor de un agujero negro rodeado de energía oscura nos permitiría entender algunos aspectos de ella.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. Se presenta un resumen de las propiedades de la solución de Schwarzschild modificada. En la sección 3 se analiza el potencial efectivo, posteriormente en la sección 4 se examinan las geodésicas nulas y se dan ejemplos de geodésicas nulas con diferente energía. Finalmente, las conclusiones se dan en la última sección.

2. Agujero negro de Schwarzschild modificado

Una modificación de la solución Schwarzschild fue propuesta por Barriola y Vilenkin (1989), donde consideraron una solución estática y con simetría esférica que describe el agujero negro de Schwarzschild con un déficit de ángulo y materia similar a la quintaesencia ($Schw_\omega$), cuyo elemento de línea está dado por:

$$ds^2 = f_\omega(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f_\omega(r)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1)$$

donde

$$f_\omega(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \epsilon^2 + \frac{\rho}{3\omega r^{3\omega+1}}. \quad (2)$$

Siendo ϵ el parámetro del ángulo sólido deficitario, ρ la densidad de la materia similar a la quintaesencia, ω es el parámetro del estado de quintaesencia ($-1 < \omega < -1/3$) y el parámetro de masas es relacionando a M . En el caso particular de $\epsilon = \rho = 0$ se obtiene la solución de Schwarzschild. Cuando $r \rightarrow \infty$ se obtiene un espacio tiempo Anti de Sitter dependiendo del valor de ω . El valor de ω es importante porque determina el tipo de materia que puede considerarse present. Por ejemplo: en el caso que $\omega = -1$ se considera la constante cosmológica, para radiación $\omega = 1/3$ y materia oscura o bariónica $\omega = 0$.

Para obtener los radios de los horizontes de la solución es necesario obtener las raíces de (2). Siendo claro que el número de horizontes depende enteramente de los posibles valores que pueden adquirir los parámetros ϵ , ω , M y ρ .

Es importante mencionar que diferentes autores, por ejemplo ver López y Pedraza (2023) y Malakolkalami y Ghaderi (2015), han observado que al considerar el término de quintaesencia, emerge un nuevo horizonte, el horizonte cosmológico (horizonte aparente). El cual es un horizonte que permite la entrada y salida de información. Dado que Schwarzschild tiene un horizonte, entonces Schwarzschild con un déficit de ángulo y materia similar a la quintaesencia tendrá dos horizontes o un horizonte (caso extremo). Es importante mencionar que el horizonte aparente r_a siempre es mayor al horizonte r_+ .

Dicho análisis ha sido realizado por (López *et al.* (2023)), donde los autores fijan el horizonte externo en $r_+ = 1$ y obtienen las condiciones para que la solución represente un agujero negro con dos horizontes $r_+ = 1$ y r_a .

Los horizontes son determinados por las raíces positivas de la ecuación $f_\omega(r_+) = 0$. Esta condición conduce a la siguiente ecuación polinomial

$$3\omega(\epsilon^2 - 1)r_+^{3\omega+1} + 6M\omega r_+^{3\omega} - \rho = 0. \quad (3)$$

Sin pérdida de generalidad, se fija el horizonte de eventos $r_+ = 1$. Despejando M de (3) junto con la condición $r_+ = 1$, se tiene

$$M = \frac{3\omega(1 - \epsilon^2) + \rho}{6\omega}. \quad (4)$$

La región paramétrica que permite la existencia de un agujero negro con temperatura de Hawking positiva en el horizonte de eventos es determinado por $f'(r_+) > 0$, dicha condición proporciona la siguiente expresión

$$6M\omega - 3\rho\omega - \rho > 0. \quad (5)$$

Combinando (4) y (5) se tiene la siguiente desigualdad

$$\rho < 1 - \epsilon^2. \quad (6)$$

Esta desigualdad, permite definir la región de parámetros (ϵ^2, ρ) en la cual existe una solución de agujero negro con uno o dos horizontes.

Una forma alternativa de entender por que se requiere que $f'(r_+) > 0$ se satisfaga, es a través del comportamiento de la función métrica $f_\omega(r)$, es decir, cuando $r \rightarrow \infty$ se tiene $f_\omega(r) \rightarrow 1$, por lo que es necesario que la función métrica sea decreciente, tenga un punto de inflexión para después ser creciente, matemáticamente se tiene $f'(r_+) > 0$.

3. Potencial efectivo

Siguiendo el mismo enfoque dado por Chandrasekhar (1985). Las partículas de prueba que se propagan a lo largo de las geodésicas se describen mediante la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu$, donde el punto denota la derivada con respecto a un parámetro a fin. Es posible considerar $2\mathcal{L} = h$, entonces si $h = 1$ corresponden a geodésicas tipo tiempo y $h = 0$ corresponden a geodésicas nulas.

Siendo la ecuación de movimiento determinada por:

$$\dot{X}_{x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (7)$$

por la simetría del sistema existen dos cantidades conservadas correspondientes a la energía E y el momento angular L (de las partículas de prueba), asociados a los momentos generalizados X_{x^μ}

$$X_t = -f_\omega(r)\dot{t} = -E, \quad (8)$$

$$X_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L. \quad (9)$$

Consideramos el movimiento en el plano $\theta = \pi/2$ y consideramos para este análisis las geodesicas nulas ($h = 0$) se obtiene;

$$\dot{r}^2 = E^2 - V(r). \quad (10)$$

Siendo el potencial efectivo $V(r) = f_\omega(r) \frac{L^2}{r^2 E^2}$. Para un análisis más detallado es necesario elegir un valor de ω . En este trabajo se considera el valor de $\omega = -2/3$ y considerando que $r_+ = 1$. Por lo que el potencial efectivo toma la forma;

$$V(r) = -\frac{L^2(r-1)(\rho + \rho r + 2\epsilon^2 - 2)}{2r^3}. \quad (11)$$

El comportamiento de $V(r)$ (11) se muestra en la Figura 1 :

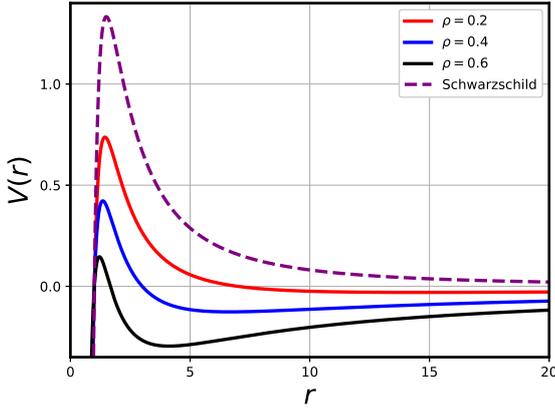


Figura 1: El comportamiento del potencial efectivo se muestra variando el valor de ρ , graficamos para $\omega = -2/3$ con $\epsilon^2 = 0,2$ y $L = 3$.

Es posible observar que el potencial efectivo muestra máximos y mínimos dependiendo el valor de ρ , pero el máximo de potencial disminuye al aumentar ρ que se encuentra relacionado con la materia similar a la quintaesencia, es decir, al aumentar ρ el efecto gravitacional del agujero negro disminuye. Dicho comportamiento es similar al considerar la solución modificada de Schwarzschild con quintaesencia, estudiado por Fernando (2012) y considerando el modelo de Kiselev (2003). También es posible observar que el potencial gravitacional del agujero negro de Schwarzschild ($\rho = \epsilon = 0$) es mayor en todos los casos ($V_{(Schw_\omega)} < V_{(Schw)}$).

En el caso de variar el valor de L , el mínimo del potencial se hace más pronunciado en valores negativos del potencial por lo cual no es posible obtener geodésicas cerradas nulas estables.

El potencial efectivo tiene un comportamiento asintótico $V(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. De la forma del potencial (ver Figura 1) es posible considerar tres casos de trayectorias geodésicas:

1. El primer caso es $E^2 = V$ cuando $\dot{r}_c = 0$, se obtienen geodésicas circulares nulas. Para que las geodésicas nulas sean consideradas como órbitas circulares inestables ($E^2 = V_{max}$), deben cumplir las siguientes condiciones; $V'(r_c) = 0$ y $V(r_c) = E^2$ donde r_c es el radio de la órbita circular (posición del máximo) y la prima denota la derivada con respecto a r .
2. El segundo caso $E^2 > V_{max}$ para todos los r . Este caso denota el valor de energía E que corresponde a geodésicas nulas que caen al agujero negro.
3. El tercer caso $0 < E^2 < V_{max}$ para todos los r . Este caso denota el valor de energía E que corresponde a geodésicas nulas cerradas o abiertas.

4. Geodésicas

Con la finalidad de poder realizar un análisis de las ecuaciones de movimiento de las geodésicas nulas, se propone el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ con el fin de obtener una ecuación adecuada para estudiar las posibles órbitas e implementar métodos numéricos. Dicho cambio de variable también es usado para analizar el fenómeno de dispersión clásica de ondas incidentes a altas frecuencias, como se muestra en Macedo *et al.* (2015). Por tanto, se reescribe la ecuación (10) de la forma:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = g(u), \quad (12)$$

donde $g(u)$ toma la siguiente forma;

$$g(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 f(1/u). \quad (13)$$

Aquí b es el parámetro de impacto para un espacio tiempo con simetría esférica, que se encuentra relacionado con las cantidades conservadas de la forma $b = L/E$ y es posible obtener el parámetro de impacto crítico (b_c) asociado con las órbitas circulares inestables. Para ello se diferencia la ecuación (12) con respecto a ϕ y es posible obtener:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} = -\frac{u^2}{2} \frac{df(1/u)}{du} - uf(1/u). \quad (14)$$

Al considerar que $\frac{d^2 u}{d\phi^2} = 0$, se tiene

$$-\rho(\omega + 1)u^{3\omega+1} + 6M\omega u - 2\omega(1 - \epsilon^2) = 0, \quad (15)$$

usando (4) y fijando $\omega = -2/3$ en (15), es posible resolver para u obteniendo las siguientes raíces

$$u = \frac{\pm \sqrt{4(1 + \epsilon^4) + (6\rho - 8)\epsilon^2 + 3\rho(\rho - 2)} - 2(1 - \epsilon^2)}{6\epsilon^2 + 3\rho - 6}, \quad (16)$$

donde la raíz positiva de la expresión anterior, corresponde al radio de la órbita crítica $r_c = 1/u_c$, para una geodésica nula inestable, con u_c dado por

$$u_c = \frac{-\sqrt{4(1 + \epsilon^4) + (6\rho - 8)\epsilon^2 + 3\rho(\rho - 2)} - 2(1 - \epsilon^2)}{6\epsilon^2 + 3\rho - 6}. \quad (17)$$

Sustituyendo u_c en (12), obtenemos el parámetro de impacto crítico b_c al considerar $g(u_c) = 0$, de esta forma se tiene

$$b_c = \sqrt{\frac{2}{u_c(u_c - 1)([2\epsilon^2 + \rho - 2]u_c + \rho)}}. \quad (18)$$

La función $g(u)$ nos brinda información sobre el tipo de geodésicas que se pueden obtener, de acuerdo al valor que tome el parámetro de impacto b .

La forma de $g(u)$ (19) para el elemento de línea de Schwarzschild modificado (1), (2) esta dado por:

$$g(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 \left(1 - \epsilon^2 - u \left(\frac{\rho}{3\omega} - \epsilon^2 + 1 \right) + \frac{\rho u^{3\omega+1}}{3\omega} \right). \quad (19)$$

La geometría de las geodésicas nulas dependerá de las raíces de la función $g(u)$, para el caso de $\omega = -\frac{2}{3}$ se tiene que resolver el siguiente polinomio:

$$-u^3 b^2 (2 - 2\epsilon^2 - \rho) + u^2 2b^2 (1 - \epsilon^2) - ub^2 \rho - 2 = 0. \quad (20)$$

Existen dos cambios de signo en el polinomio (20), así que el número posible de raíces positivas del polinomio es dos, uno o cero. También es posible mencionar que $g(u) \rightarrow \frac{1}{b^2}$ cuando $u \rightarrow 0$.

En general una partícula de prueba con valores de energía y momento que cumplan con $b = b_c$ (caso $E^2 = V_{eff}$) puede quedar atrapada alrededor del agujero negro, si $b > b_c$ (caso $0 < E^2 < V_{max}$) modifica su trayectoria y finalmente si $b < b_c$ (caso $E^2 > V_{max}$) la geodésica cae al agujero negro.

En la Figura 2 se muestra el comportamiento del parámetro de impacto crítico b_c (18) al fijar valores de ϵ y variar ρ considerando la relación (6). En todos los casos es posible observar que el parámetro de impacto crítico aumenta al aumentar la densidad de materia similar a quintaesencia. Es decir ρ se comporta como un factor de apantallamiento que afecta el comportamiento geodésico.

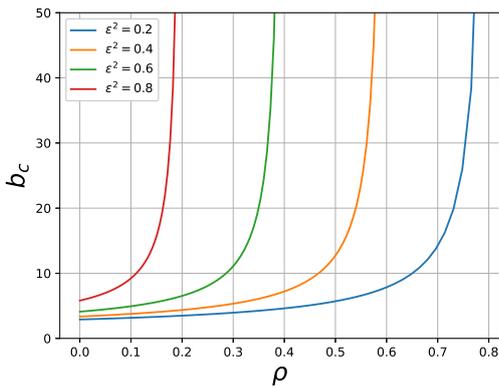


Figura 2: El comportamiento de b_c al fijar ϵ y variar ρ .

Para la obtención de las geodésicas se resuelve la ecuación diferencial (14) con la condición inicial (12) usando el método de Runge-Kutta de orden cuatro en Python y considerando el caso particular $\omega = -\frac{2}{3}$.

4.1. Geodésicas circulares

Con el propósito de analizar las posibles orbitas circulares se presenta la gráfica de $g(u)$ (ver Figura 3) considerando valores de los parámetros ϵ y ρ , y fijando a $b = b_c$. Es posible observar de la Figura 3 que para una partícula de prueba (fotón) que llega desde $u = 0$ ($r \rightarrow \infty$) pasan a formar una órbita circular en u_c que es inestable, a esta región se le llama la *fotoregión*, en donde los fotones son atrapados momentáneamente por el agujero negro, por lo que esta región es la más luminosa. En este punto puede ser que orbite un cierto número de vueltas y después caiga al agujero negro como se ve en la Figura 4 o escape del potencial gravitacional del agujero negro (ver Figura 5).

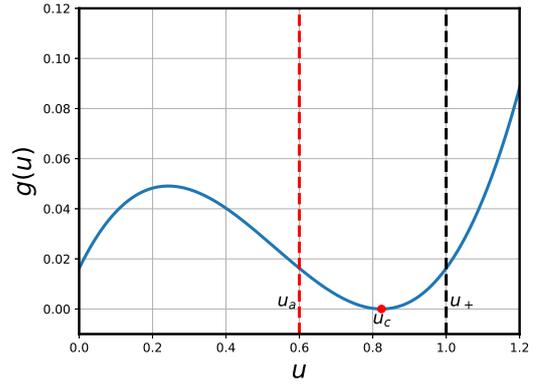


Figura 3: El comportamiento de $g(u)$ con el valor de $b = b_c = 7,84641$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $u_+ = \frac{1}{r_+} = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente $u_a = \frac{1}{r_a}$.

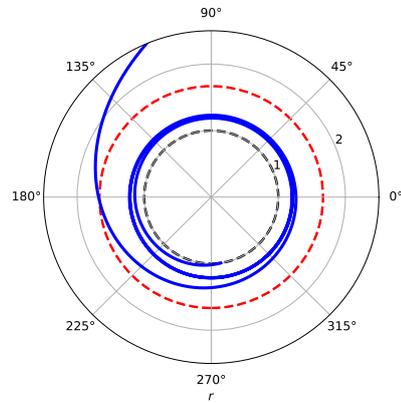


Figura 4: El comportamiento de geodésicas circulares con el valor de $b = b_c = 7,84641$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $r_+ = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente r_a .

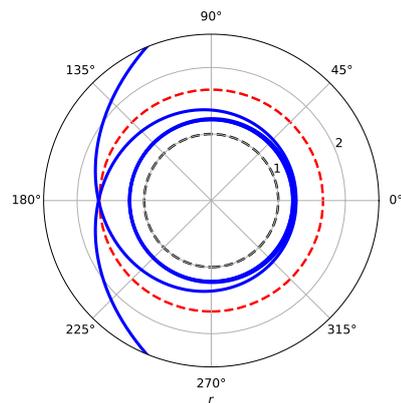


Figura 5: El comportamiento de geodésicas circulares con el valor de $b = b_c = 7,84641$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte r_+ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente r_a .

También es posible mencionar que las geodésicas circulares inestables se forman entre el horizonte $r_+ = 1$ y el horizonte aparente r_a que como ya se ha mencionado permite entrar y salir información.

4.2. Geodésicas dispersadas y atrapadas

Para obtener geodésicas dispersadas se considera a $b > b_c$ y se fijan los valores de ϵ y ρ , el comportamiento de $g(u)$ se muestra en la Figura 6, mostrando que una partícula que viaja desde el infinito ($u = 0$) y alcanza un valor u_o (donde $g(u)$ corta con el eje u) se dispersa.

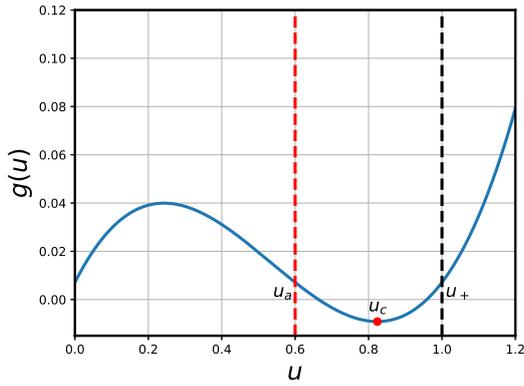


Figura 6: El comportamiento de $g(u)$ con el valor de $b_c < b = 11,8464$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $u_+ = \frac{1}{r_+} = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente $u_a = \frac{1}{r_a}$.

En la Figura 7 se muestra que la trayectoria de la partícula de prueba alcanza un valor posterior al horizonte aparente y después se aleja del agujero negro, es decir la partícula es dispersada.

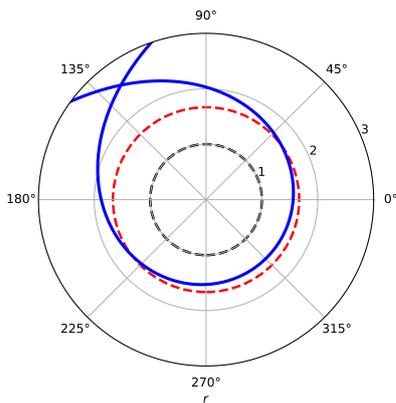


Figura 7: El comportamiento de geodésicas dispersadas con el valor de $b_c < b = 11,8464$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $r_+ = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente r_a .

Es posible mencionar que existe la posibilidad de obtener geodésicas cerradas atrapadas inestables en la región donde $g(u)$ muestra un mínimo con dos puntos de retorno que corresponden a los puntos donde $g(u)$ corta con el eje u (ver Figura 6), dicha situación se puede observar en la Figura 8. Donde se muestran las geodésicas que se encuentran entre r_+ y r_a .

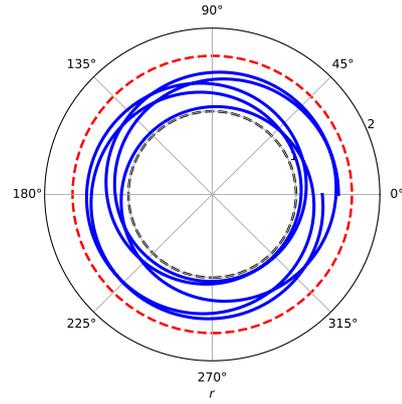


Figura 8: El comportamiento de geodésicas atrapadas con el valor de $b_c < b = 11,8464$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $r_+ = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente r_a .

4.3. Geodésicas absorbidas

En el caso de considerar valores de $b < b_c$ se puede observar que $g(u)$ no corta en ningún punto con el eje (ver Figura 9) lo cual indica que para una partícula de prueba (fotón) que llega desde $u = 0$ ($r \rightarrow \infty$) es absorbida por el agujero negro sin posibilidades de escapar como se puede apreciar en la Figura 10.

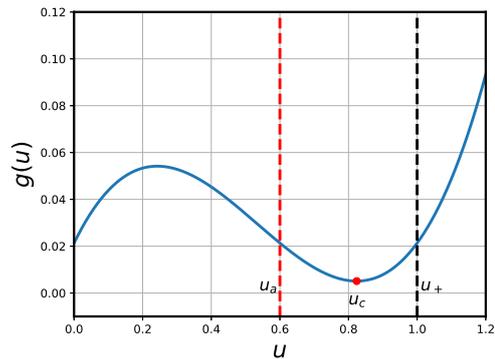


Figura 9: El comportamiento de $g(u)$ con el valor de $b_c > b = 6,84641$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $u_+ = \frac{1}{r_+} = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente $u_a = \frac{1}{r_a}$.

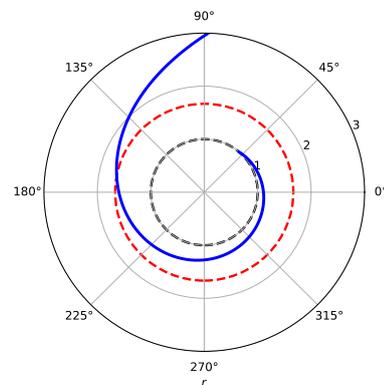


Figura 10: El comportamiento de geodésicas dispersadas con el valor de $b_c > b = 6,84641$ y $\epsilon^2 = 0,2$ y $\rho = 0,6$. Las líneas punteadas en negro representan el horizonte $r_+ = 1$ y las líneas punteadas en rojo el horizonte aparente r_a .

5. Conclusiones

Analizando el potencial efectivo de las partículas de prueba (fotón), hemos investigado las geodésicas nulas y los tipos de órbitas del agujero negro de Schwarzschild modificado correspondiente a diferentes niveles de energía, observando que al aumentar el valor de la densidad de quintaesencia el sistema se vuelve menos gravitacional y en forma general $V_{Schw_{\omega}} < V_{Schw}$.

Usamos el cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ para analizar la ecuación de movimiento geodésico. El movimiento de los fotones se puede localizar dentro del horizonte cosmológico r_a , pero si pasa dentro del horizonte r_+ , los fotones caen al agujero negro de Schwarzschild modificado.

También es posible mencionar que la forma de las geodésicas cambia conforme varía el valor del parámetro de impacto, en un caso especial sería posible obtener geodésicas cerradas inestables.

Agradecimientos

Los autores agradecen la invitación a participar en este número especial por el XX Aniversario de la Licenciatura en Física y Tecnología Avanzada de la UAEH y se unen a las felicitaciones por su aniversario.

Este trabajo ha sido realizado parcialmente gracias al apoyo del SNII-CONACYT, México.

Referencias

- Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F., y Steinhardt, P. J. (2000). A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441.
- Barriola, M. y Vilenkin, A. (1989). Gravitational Field of a Global Monopole. *Phys. Rev. Lett.*, 63:341.
- Caldwell, R. R. (2002). A Phantom menace? *Phys. Lett. B*, 545:23–29.
- Carroll, S. M. (1998). Quintessence and the rest of the world. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3067–3070.
- Chandrasekhar, S. (1985). *The mathematical theory of black holes*.
- Fernando, S. (2012). Schwarzschild black hole surrounded by quintessence: Null geodesics. *Gen. Rel. Grav.*, 44:1857–1879.
- Kiselev, V. (2003). Quintessence and black holes. *Class. Quant. Grav.*, 20:1187–1198.
- López, L. A. y Pedraza, O. (2023). Effects of quintessence on scattering and absorption sections of black holes. *Indian J. Phys.*, 97(1):285–294.
- López, L. A., Pedraza, O., Arceo, R., y Ceron, V. (2023). Quasinormal modes of the Schwarzschild black hole with a deficit solid angle and quintessence-like matter: Improved asymptotic iteration method.
- Macedo, C. F. B., de Oliveira, E. S., y Crispino, L. C. B. (2015). Scattering by regular black holes: Planar massless scalar waves impinging upon a Bardeen black hole. *Phys. Rev. D*, 92(2):024012.
- Malakolkalami, B. y Ghaderi, K. (2015). The null geodesics of the Reissner–Nordström black hole surrounded by quintessence. *Mod. Phys. Lett. A*, 30(10):1550049.
- Padilla, L. E., Téllez, L. O., Escamilla, L. A., y Vazquez, J. A. (2021). Cosmological Parameter Inference with Bayesian Statistics. *Universe*, 7(7):213.
- Pedraza, O., López, L. A., Arceo, R., y Cabrera-Munguia, I. (2021). Geodesics of Hayward black hole surrounded by quintessence. *Gen. Rel. Grav.*, 53(3):24.