DESDE 2013
https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/issue/archive
Pädi Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI
ISSN: 2007-6363

Publicación semestral, Vol. 13, No. Especial (2025) 118–127

Extensiones disipativas de relaciones simétricas mediante tripletes fronterizos
Dissipative extensions of symmetric relations via boundary triplets

J. I. Rios-Cangas [1,]

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Iztapalapa, San Rafael Atlixco 186, 09340, Iztapalapa, Ciudad de México.

Resumen

El concepto de relación lineal extiende la noción de operador lineal. Además, las relaciones lineales disipativas están estrechamente relacionadas con los sistemas en donde la energía no aumenta a través del tiempo, en particular, con los sistemas conservativos. Con base en la teoría de tripletes fronterizos, este trabajo estudia extensiones disipativas de relaciones lineales simétricas.

Palabras Clave: Relaciones lineales, relaciones disipativas, teoría de extensión, tripletes fronterizos.

Abstract

The concept of linear relation extends the notion of linear operator. Besides, dissipative linear relations are closely related to systems where energy does not increase through time, in particular, conservative systems. Based on the boundary triplets theory, this work studies dissipative extensions of symmetric linear relations.

Keywords: Linear relations, dissipative relations, extensión theory, boundary triplets.

1. Introducción a las relaciones lineales

Para un espacio de Hilbert separable $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$, siendo su producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ anti-lineal en su primera entrada, se considera el espacio vectorial que es copia de $\mathcal{H}$ consigo mismo dado por (Birman and Solomjak, 1987, sección 2.3)

$$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : f, g \in \mathcal{H} \right\}, \tag{1}$$

equipado con producto interno

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle := \langle f, u\rangle + \langle g, v\rangle . \tag{2}$$

Es sencillo verificar la equivalencia de la norma inducida por el producto interno (2) con la norma

$$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| = \|f\| + \|g\| , \quad f, g \in \mathcal{H} . \tag{3}$$

De esta manera, la convergencia en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ implica la convergencia en cada una de sus entradas. Por lo tanto, el espacio (1) resulta completo con respecto a la norma (3) (o a la norma inducida por (2)), i.e., $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert.

Siguiendo la misma estructura anterior, uno puede generalizar el espacio de Hilbert (1) haciendo suma ortogonal de dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ dado por $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$. Esto es favorable cuando se trabaja con relaciones (u operadores lineales) entre dos espacios distintos (ver (12) de la subsección 3.1).

Definición 1.1. *Una* relación lineal *en $\mathcal{H}$ (o simplemente relación en $\mathcal{H}$) es cualquier subconjunto lineal de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, donde*

$$\mathcal{D}(T) := \left\{ f \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \quad \mathcal{R}(T) := \left\{ g \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},$$
$$\mathcal{N}(T) := \left\{ f \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in T \right\}, \quad \mathcal{M}(T) := \left\{ g \in \mathcal{H} : \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} \in T \right\},$$

representan el dominio, rango, núcleo *y* multivaluado *de T, respectivamente, los cuales son conjuntos lineales de $\mathcal{H}$.*

Se enfatiza el término "conjunto lineal" en vez del usual "subespacio", ya que este término está reservado para conjuntos lineales cerrados. De este modo, la clausura $\overline{T}$ de una relación T es un subespacio de $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$. Por lo tanto, se dice que una relación T es *cerrada* si $T = \overline{T}$.

Observación 1.2. *Cualquier operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ identificado con su gráfica es ejemplo de una relación lineal. De hecho, una relación T en $\mathcal{H}$ es gráfica de un operador lineal si y solo si $\mathcal{M}(T) = \{0\}$ (Bolaños Servín et al., 2023, proposición 3.2.1).*

De esta manera, las relaciones lineales extienden el concepto de operador lineal y son también conocidas como operadores lineales

*Autor para correspondencia: jottsmok@xanum.uam.mx
Correo electrónico: jottsmok@xanum.uam.mx (Josué I. Rios-Cangas).

Historial del manuscrito: recibido el 13/08/2024, última versión-revisada recibida el 22/11/2024, aceptado el 06/12/2024, publicado el 26/04/2025. **DOI:** https://doi.org/10.29057/icbi.v13iEspecial.13520

CC BY NC ND

multivaluados, ya que al elemento cero de $\mathcal{H}$ lo opera a su conjunto lineal multivaluado Cross (1998).

Parece increíble que von Neumann no solo fue el pionero en la teoría de extensiones de operadores mas también en la teoría de relaciones lineales. Esta teoría se desarrolla posteriormente en Arens (1961); Coddington (1973); Dijksma and de Snoo (1974). Se puede encontrar trabajos más recientes y desarrollados sobre relaciones lineales en Cross et al. (2011); Hassi et al. (2007). Es de interés resaltar que las relaciones lineales surgen por la necesidad de trabajar con la adjunta de un operador lineal cuyo dominio no está densamente definido en $\mathcal{H}$ von Neumann (1950). Esto incluso sucede en espacios de Hilbert de dimensión finita. Por ejemplo, si $\mathbb{C}_n[x]$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual a $n \in \mathbb{N}$ en la variable x y si J es el operador de multiplicación por la variable independiente,

$$\begin{aligned} J\colon \mathcal{D}(J) \subset \mathbb{C}_n[x] &\to \mathbb{C}_n[x] \\ p(x) &\mapsto xp(x) \end{aligned} \tag{4}$$

entonces el dominio de J no es todo el espacio $\mathbb{C}_n[x]$. En efecto, como $\{1, \ldots, x^n\}$ es una base para $\mathbb{C}_n[x]$, se tiene de (4) que

$$J1 = x\,, \quad \ldots\,, \quad Jx^{n-1} = x^n\,, \quad \text{pero } Jx^n \text{ no está definido}$$

ya que $x^{n+1} \notin \mathbb{C}_n[x]$ y $\mathcal{D}(J) = \operatorname{span}\{1, \ldots, x^{n-1}\} \neq \mathbb{C}_n[x]$. Es sencillo verificar que el operador J satisface $\langle x, Jx\rangle \in \mathbb{R}$, es decir, es una transformación lineal simétrica. En los cursos de álgebra lineal nos enseñan que una transformación lineal simétrica es autoadjunta, pero esto no sucede con la transformación (4). De hecho, ni siquiera tiene sentido la adjunta de J en la teoría clásica de operadores lineales, debido a que el dominio del operador tiene que estar densamente definido en el espacio de Hilbert para calcular su adjunta (Birman and Solomjak, 1987, sección 3.3). El operador (4) tiene su importancia en la solución del problema de momentos truncado (Derkach and Malamud, 1995, sección 10). Cabe señalar que las relaciones lineales también tienen su relevancia en la teoría de sistemas canónicos Hassi et al. (2000a,b).

Definición 1.3. *Para dos relaciones T, S y $\zeta \in \mathbb{C}$, es plausible considerar las operaciones* suma, multiplicación por escalar, composición *e* inversa *de relaciones dadas por*

$$\begin{aligned} T + S &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g+h \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in S \right\}, \\ \zeta T &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \zeta g \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \\ ST &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ k \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} g \\ k \end{pmatrix} \in S \right\}, \\ T^{-1} &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \end{aligned}$$

respectivamente, las cuales se tornan relaciones lineales en $\mathcal{H}$.

Observación 1.4. *Es sencillo verificar que $\overline{T^{-1}} = \left(\overline{T}\right)^{-1}$. De este modo T es cerrada si y solo si T^{-1} lo es. Además,*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T^{-1}) &= \mathcal{R}(T)\,, \qquad \mathcal{N}(T^{-1}) = \mathcal{M}(T)\,, \\ \mathcal{R}(T^{-1}) &= \mathcal{D}(T)\,, \qquad \mathcal{M}(T^{-1}) = \mathcal{N}(T)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

La relación $T\restriction_C$ es la relación T con dominio restringido a un conjunto lineal $C \subset \mathcal{D}(T)$. En este sentido, $T \subset S$ implica que $S\restriction_{\mathcal{D}(T)} = T$ y en este caso se dice que S es extensión de T.

Definición 1.5. *Dos relaciones T y S son* linealmente independientes *(abreviado l.i.) si $T \cap S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.*

Así, se puede asumir que los símbolos $\perp$, $\dot{+}$, $\oplus$, y $\ominus$ representan la notación estándar en $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, i.e.,

$$\begin{aligned} T^{\perp} &= \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \left\langle \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0\,, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}, \\ T \dot{+} S &= \left\{ \begin{pmatrix} f+h \\ g+k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T,\ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S \text{ con } T, S \text{ l.i.} \right\}, \\ T \oplus S &= T \dot{+} S \text{ , con } T \subset S^{\perp}\,, \\ T \ominus S &= T \cap S^{\perp}\,, \end{aligned}$$

los cuales se vuelven relaciones lineales en $\mathcal{H}$. De manera estricta, el símbolo $\oplus$ en este contexto difiere de la expresión $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, por lo que no debería causar confusión al usar el mismo símbolo.

Definición 1.6. *La* adjunta *de una relación T en $\mathcal{H}$ es*

$$T^* \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \,:\, \langle h, g\rangle = \langle k, f\rangle\,, \quad \forall \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in T \right\}. \tag{6}$$

Es importante resaltar que el concepto (6) extiende al usual en operadores lineales en donde es necesario la densidad del dominio (Bolaños Servín et al., 2023, sección 3.4).

Teorema 1.7. *Para dos relaciones T, S y $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$, lo siguiente se cumple (Rios-Cangas, 2021, teorema 3):*

$$\begin{aligned} T^* &= \left(-T^{-1}\right)^{\perp}\,, & T^{**} &= \overline{T}\,, \\ (T^*)^{-1} &= (T^{-1})^*\,, & S \subset T &\Rightarrow T^* \subset S^*\,, \\ (\alpha T)^* &= \overline{\alpha} T^*\,, & \mathcal{N}(T^*) &= \mathcal{R}(T)^{\perp}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

La última propiedad de (7) y (5) implica

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(T)} \oplus \mathcal{N}(T^*)\,, \qquad \mathcal{H} = \overline{\mathcal{D}(T)} \oplus \mathcal{M}(T^*)\,. \tag{8}$$

Sin lugar a duda, los operadores simétricos tienen su importancia en aplicaciones debido a que están estrechamente relacionados con los sistemas conservativos. Una generalización de estos sistemas son aquellos en los cuales la energía no necesariamente se conserva en el tiempo. En particular, los sistemas disipativos son aquellos para los cuales la energía no aumenta y para tratarlos es importante la teoría de operadores disipativos (cf. Phillips (1959)). Los operadores disipativos extienden el concepto de los operadores simétricos y tienen sus raíces en la teoría de contracciones, para las cuales un trabajo fructífero es Sz.-Nagy (1953). Por otra parte, uno de los pioneros de las relaciones simétricas fue sin duda Arens (1961), mientras que la teoría de extensiones simétricas de relaciones simétricas fue primeramente desarrollada en Dijksma and de Snoo (1974) (cf. Acharya (2014); Fernandez Miranda and Labrousse (2005)), la cual es una generalización de la teoría clásica de von Neumann (1930). Se hace hincapié en que la teoría de relaciones disipativas fue introducida por Krein and Langer (1971) la cual extiende el concepto de relaciones simétricas y en Rios-Cangas and Silva (2020) se generaliza la teoría de extensiones simétricas de relaciones simétricas a extensiones disipativas de relaciones disipativas. Este trabajo dedica la sección 2 a exhibir

algunos conceptos y mostrar resultados de relaciones disipativas que son necesarios en la secuela.

Una motivación crucial para estudiar relaciones lineales y sus extensiones viene de su uso en la teoría de tripletes fronterizos que es la parte medular de este manuscrito y se aborda en la sección 3. La noción de triplete fronterizo se remonta a Calkin (1939); Derkach and Malamud (1991); Gorbachuk and Gorbachuk (1991); Koˇ cubeĭ (1975) y está basada en la fórmula de Green o Lagrange, junto con una condición de maximalidad (cf. Behrndt et al. (2020)). La teoría de tripletes fronterizos es esencial en el análisis de problemas con valores en la frontera para ecuaciones diferenciales mediante operadores diferenciales y, en particular, los operadores de Sturm-Liouville (Schmüdgen, 2012, sección 15.3) y (Behrndt et al., 2020, capítulo 6). Básicamente, la teoría de tripletes fronterizos es una alternativa de abordar la teoría de extensiones disipativas (en particular, simétricas o autoadjuntas) de operadores simétricos, mediante la construcción de un espacio de Hilbert auxiliar, en donde se requiere el uso de la teoría de relaciones lineales. La ventaja de usar tripletes fronterizos es que uno puede encontrar extensiones disipativas de un operador simétrico con argumentos más simplificados. En Schmüdgen (2012); Derkach (2015) se exhibe la teoría de tripletes fronterizos y en Derkach et al. (2022, 2020) se da una definición más general de triplete fronterizo, esto para operadores simétricos cuyo dominio es denso en el espacio. De manera más reciente, en Behrndt et al. (2020) se aborda la teoría de tripletes fronterizos para relaciones lineales simétricas sobre espacios de Hilbert mientras que en Jurˇ sėnas (2023) sobre espacios de Krein y Pontryagin.

Se enfatiza que este trabajo extiende la teoría de tripletes fronterizos para relaciones lineales simétricas en espacios de Hilbert. Esto debido a que los elementos Γ_0 y Γ_1 de la terna $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ de un triplete fronterizo (ver definición 3.1) son considerados en la literatura (particularmente en Behrndt et al. (2020); Jurˇ sėnas (2023)) como operadores lineales, mientras que en este trabajo se generaliza (ver observación 1.2) al considerarlos como relaciones lineales que no necesariamente tienen su multivaluado trivial (ver ejemplo de la subsección 4.1 y observación 4.4). Lo anterior hace que las demostraciones y resultados que se presentan en este manuscrito sobre la teoría de tripletes fronterizos sean originales. Se hace mención que este manuscrito también tiene el propósito no solo de dar a conocer a la comunidad científica la teoría de relaciones lineales y disipativas, mas la teoría de tripletes fronterizos como una alternativa de encontrar extensiones disipativas (que en particular son autoadjuntas) de relaciones simétricas, la cual utiliza argumentos más simples en comparación con la teoría de extensión de von Neumann. Esto se puede esclarecer con los ejemplos que se añaden en una sección al final de este trabajo.

2. Relaciones disipativas

Esta sección inicia directamente con la definición de relación disipativa y presenta algunos resultados que caracterizan a las relaciones disipativas, simétricas y autoadjuntas.

Definición 2.1. *Una relación L se dice que es* disipativa *si*

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq 0\,, \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L\,. \tag{9}$$

Es claro que la cerradura de una relación disipativa es también una relación disipativa.

Observación 2.2. *Una relación L es disipativa si y solo si $-L^{-1}$ lo es. Ciertamente, para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$ se sigue que $\begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix} \in -L^{-1}$ y*

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle = \operatorname{Im}\langle g, -f\rangle\,.$$

Lo anterior muestra una caracterización simple de relaciones disipativas. La siguiente caracterización se puede encontrar en (Rios-Cangas and Silva, 2020, teorema 3.1).

Teorema 2.3. *Una relación L es disipativa si y solo si para $\zeta \in \mathbb{C}_-$, la relación $(L - \zeta I)^{-1}$ es un operador acotado y*

$$\left\|(L - \zeta I)^{-1}\right\| \leq -\frac{1}{\operatorname{Im}\zeta}\,.$$

Definición 2.4. *Una relación disipativa es* maximal *si no tiene extensiones disipativas propias.*

Es directo ver que las relaciones disipativas maximales son cerradas. Una demostración del siguiente resultado se exhibe en Kreˇ in and Langer (1971) (cf. (Azizov et al., 2013, lema 2.1)).

Lema 2.5. *Si L es disipativa entonces $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{M}(L)^\perp$. Además, si L es disipativa maximal entonces $\overline{\mathcal{D}(L)} = \mathcal{M}(L)^\perp$.*

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$, entonces para $k \in \mathcal{M}(L)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene $\begin{pmatrix} f \\ g + \alpha k \end{pmatrix} \in L$ y $\operatorname{Im}\langle f, g + \alpha k\rangle \geq 0$. Así,

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle \geq -\operatorname{Im}\alpha\,\langle f, k\rangle\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}\,.$$

Esto implica que $\langle f, k\rangle = 0$ y, por lo tanto, $\mathcal{D}(L) \subset (\mathcal{M}(L))^\perp$.

Si L es además maximal entonces para $k \in \mathcal{M}(L)^\perp \ominus \mathcal{D}(L)$ uno calcula que $\hat{L} = L \dotplus \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}\right\}$ es extensión disipativa de L, lo que implica $\hat{L} = L$. De este modo $k \in \mathcal{M}(L)$, o bien, $k = 0$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{D}(L)} = \mathcal{M}(L)^\perp$. □

Observación 2.6. *Se asume de (Birman and Solomjak, 1987, sección 3.2) que si un operador lineal T cumple dos de las siguientes afirmaciones, entonces cumple también la tercera.*

- *T es cerrado.*
- *T es acotado.*
- *$\mathcal{D}(T)$ es cerrado.*

En (Rios-Cangas and Silva, 2020, proposición 3.4) exhiben una demostración alterna del siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Si L es disipativa cerrada con $\mathcal{D}(L) = \mathcal{H}$, entonces L es un operador acotado, disipativo y maximal.*

Demostración. Del lema 2.5 se tiene que $\mathcal{M}(L) = \{0\}$, es decir, L es un operador cerrado con dominio cerrado y, por lo tanto, acotado. Ahora, si S es extensión disipativa cerrada de L, entonces $\mathcal{D}(S) = \mathcal{H}$. Por lo tanto, como $L \subset S$ y ambos son operadores cerrados con dominio todo el espacio $\mathcal{H}$, se tiene que son iguales, i.e., L es maximal. □

Lo siguiente muestra una caracterización de relaciones disipativas maximales.

Teorema 2.8. *Si L es una relación disipativa, entonces L es maximal si y solo si es cerrada y $\mathcal{R}(L+iI)=\mathcal{H}$.*

Demostración. Si L es disipativa maximal entonces es cerrada, lo que implica $(L+iI)^{-1}$ sea cerrada y además un operador acotado, debido al teorema 2.3. Así, $\mathcal{R}(L+iI)=\mathcal{D}((L+iI)^{-1})$ es cerrado. Ahora, si $\mathcal{R}(L+iI)\neq\mathcal{H}$ entonces existe $f\in\mathcal{H}$ no cero tal que $f\perp\mathcal{R}(L+iI)$, lo que implica de (8) que $f\in\mathcal{N}(L^*-iI)$, o bien, $\begin{pmatrix} f \\ if\end{pmatrix}\in L^*$. De esta manera, para todo $\begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix}\in L$ se tiene que $\langle h, if\rangle=\langle k, f\rangle$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ if\end{pmatrix}\right\rangle = \langle h, f\rangle + \langle k, if\rangle = 0\,,$$

de donde se sigue $\begin{pmatrix} f \\ if\end{pmatrix}\perp L$. Con esto, uno calcula de manera simple que $S = L\oplus\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} f \\ if\end{pmatrix}\right\}$ es extensión disipativa de L, lo cual contradice que L sea maximal. Por lo tanto $\mathcal{R}(L+iI)=\mathcal{H}$.

Inversamente, si existe S extensión disipativa cerrada de L entonces $(L-\zeta I)^{-1}\subset(S-\zeta I)^{-1}$ y del teorema 2.3 se tiene que ambos son operadores acotados con dominio todo $\mathcal{H}$, lo que implica que sean iguales, o bien, $L=S$. □

La siguiente definición es un caso particular de relaciones disipativas.

Definición 2.9. *Una relación A se dice ser* simétrica *si*

$$\operatorname{Im}\langle f, g\rangle = 0\,, \quad \textit{para todo} \quad \begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}\in A\,. \tag{10}$$

La condición (10) es equivalente a escribir $\langle f, g\rangle\in\mathbb{R}$.

Observación 2.10. *Es directo verificar que una relación A es simétrica si y solo si tanto A como $-A$ son disipativas.*

Los siguientes resultados exhiben caracterizaciones de relaciones simétricas.

Proposición 2.11. *Para A una relación lineal, lo siguientes enunciados son equivalentes (Rios-Cangas, 2021, proposición 10):*

(1) *A es simétrica.*
(2) *$A\subset A^*$.*
(3) *$\langle f, k\rangle=\langle g, h\rangle$, para todo $\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k\end{pmatrix}\in A$.*

Observación 2.12. *Una relación simétrica A, al ser un caso particular de una relación disipativa, pueden tener extensiones disipativas, las cuales están contenidas en A^*. Esto como consecuencia de la segunda fórmula de von Neumann para relaciones simétricas (Rios-Cangas and Silva, 2020, teorema 4.7).*

Corolario 2.13. *Una relación A es simétrica si y solo si para $\zeta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, la relación $(A-\zeta I)^{-1}$ es un operador acotado y*

$$\left\|(A-\zeta I)^{-1}\right\|\leq\frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta|}\,.$$

Demostración. Se sigue directamente del teorema 2.3 y de la observación 2.10. □

Definición 2.14. *Una relación A es* autoadjunta *si $A=A^*$.*

Es claro de la proposición 2.11.(2) que toda relación autoadjunta es simétrica y por consiguiente disipativa. Además, de la observación 2.12, las relaciones autoadjuntas son maximales.

Corolario 2.15. *Si A es una relación simétrica cerrada con $\mathcal{D}(A)=\mathcal{H}$, entonces A es un operador acotado y autoadjunto.*

Demostración. De la proposición 2.7 se sigue que A es un operador acotado y como $A\subset A^*$ se tiene que $\mathcal{H}=\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A^*)$. Así, $\mathcal{H}=\mathcal{D}(A^*)$ y de (8) se tiene $\{0\}=\mathcal{D}(A)^\perp=\mathcal{M}(A^*)$, es decir, A^* es un operador cerrado con dominio todo el espacio. Lo anterior implica que $A=A^*$. □

Observación 2.16. *Si T es una relación cerrada y $\alpha\in\mathbb{C}$, entonces $T+\alpha I$ es relación cerrada cf. (Cross, 1998, ejercicio II.5.16). Además, $(T+\alpha I)^*=T^*+\overline{\alpha}I$ cf. (Rios-Cangas and Silva, 2020, proposición 2.2).*

Teorema 2.17. *Si A es una relación simétrica, entonces A es autoadjunta si y solo si es cerrada y $\mathcal{R}(A\pm iI)=\mathcal{H}$.*

Demostración. Si $A=A^*$ entonces A es simétrica cerrada. Para $\alpha\in\{i,-i\}$, de las observaciones 2.16, 1.4 y del corolario 2.13 que $(A+\alpha I)^{-1}$ es un operador cerrado y acotado, o bien, de la observación 2.6 se tiene que $\mathcal{R}(A+\alpha I)=\mathcal{D}((A+\alpha I)^{-1})$ es cerrado. Por lo tanto, $(A\mp iI)^{-1}$ es operador, $\mathcal{R}(A\pm iI)$ es cerrado y las propiedades (5) y (7) implican

$$\{0\}=\mathcal{M}((A\mp iI)^{-1})=\mathcal{N}(A\mp iI)=\mathcal{R}(A\pm iI)^\perp\,,$$

que al tomar complemento ortogonal se llega al resultado.

Inversamente, como $A\subset A^*$ y $\mathcal{R}(A\pm iI)=\mathcal{H}$, se sigue de (8) que $\mathcal{N}(A^*-iI)=\{0\}$ y para cada $\begin{pmatrix} f \\ g\end{pmatrix}\in A^*$, existe $\begin{pmatrix} h \\ g-if\end{pmatrix}\in A-iI$, es decir,

$$\begin{pmatrix} h \\ g-i(f-h)\end{pmatrix}\in A\subset A^*\,, \tag{11}$$

de donde se sigue $\begin{pmatrix} f-h \\ i(f-h)\end{pmatrix}\in A^*$. Así, $f-h\in\mathcal{N}(A^*-iI)$, lo que implica $f=h$, que sustituyendo en (11) se llega a $A^*\subset A$. Por lo tanto, $A=A^*$. □

3. Extensiones disipativas mediante tripletes fronterizos

La teoría de extensión von Neumann para relaciones lineales (Rios-Cangas and Silva, 2020, sección 4) es una generalización de la teoría clásica de von Neumann para operadores lineales (Birman and Solomjak, 1987, sección 4.4) y su propósito es encontrar extensiones disipativas (en particular, autoadjuntas) de relaciones simétricas cerradas mediante la llamada la segunda fórmula de von Neumann (Rios-Cangas and Silva, 2020, teorema 4.7).

Esta sección muestra una alternativa para abordar la teoría de extensiones disipativas de relaciones simétricas y se basa en la construcción de una tripleta que da lugar a una parametrización de todas las extensiones canónicas (ver definición 3.9 y corolario 3.12) de relaciones simétricas, que en particular son disipativas (teorema 3.16).

Primeramente, se da la noción de triplete fronterizo en la subsección 3.1 y posteriormente en la subsección 3.2 se muestra la teoría de extensión de relaciones simétricas mediante los tripletes fronterizos.

3.1. Tripletes fronterizos

Para simplificar cálculos algebraicos se introduce primeramente el operador unitario

$$\begin{aligned} \mathrm{W}\colon \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} &\to \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -g \\ f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En lo siguiente se asume que A es una relación simétrica en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ es un subespacio de $\mathcal{H}$. Se consideran la relación lineal

$$\Gamma \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \,:\, f \in \mathcal{D}(A^*) \text{ y } a \in \mathcal{K} \right\} \subset \mathcal{H}\oplus\mathcal{K}\,. \tag{12}$$

Definición 3.1. *Se dice que un* triplete fronterizo *(o simplemente triplete) para A^* es una terna $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$, tal que $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \Gamma$ son relaciones lineales con $\mathcal{D}(\Gamma_0) = \mathcal{D}(\Gamma_1) = \mathcal{D}(A^*)$ y satisfacen lo siguiente:*

(1) *Para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ existe $f \in \mathcal{D}(A^*)$ tal que*

$$\begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \quad y \quad \begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_1\,.$$

(2) *Para $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$, se tiene*

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle\,. \tag{13}$$

Los elementos de $\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ se le conocen como los *valores abstractos de frontera* mientras que a la ecuación (13) se le conoce como la *identidad abstracta de Green o Lagrange*, debido a que está estrechamente relacionada con las identidades usuales de Green Schmüdgen (2012); Behrndt et al. (2020) (ver observación 4.10).

Es de interés señalar que existe una definición alterna de triplete fronterizo descrita de la siguiente manera.

Definición 3.2. *Se dice que la terna $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ es un triplete fronterizo para A^* si $\Gamma_+, \Gamma_- \subset \Gamma$ son relaciones lineales con $\mathcal{D}(\Gamma_+) = \mathcal{D}(\Gamma_-) = \mathcal{D}(A^*)$ y satisfacen lo siguiente:*

(1) *Para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ existe $f \in \mathcal{D}(A^*)$ tal que*

$$\begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_+ \quad y \quad \begin{pmatrix} f \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_-\,.$$

(2) *Para $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_-$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$, se tiene*

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2i}\left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \right\rangle\,. \tag{14}$$

Proposición 3.3. *Si $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ satisface la definición 3.1 entonces $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ satisface la definición 3.2, donde*

$$\Gamma_+ = \Gamma_0 + i\Gamma_1 \quad y \quad \Gamma_- = \Gamma_0 - i\Gamma_1\,. \tag{15}$$

Inversamente, Si $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ satisface la definición 3.2 entonces $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ satisface la definición 3.1, donde

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}(\Gamma_+ + i\Gamma_-) \quad y \quad \Gamma_1 = \frac{1}{2i}(\Gamma_+ - \Gamma_-)\,. \tag{16}$$

Demostración. Es suficiente mostrar que (15) y (16) satisfacen las condiciones (14) y (13), respectivamente.

Para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$, $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, se sigue que $\begin{pmatrix} f \\ a+is \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b+it \end{pmatrix} \in \Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f \\ a-is \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b-it \end{pmatrix} \in \Gamma_-$. Por lo tanto, de (13) se consigue que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} a+is \\ a-is \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} b-it \\ b+it \end{pmatrix} \right\rangle &= 2i(\langle s, b\rangle - \langle a, t\rangle) \\ &= 2i\left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = 2i\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle\,. \end{aligned}$$

Inversamente, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$, $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_-$, entonces $\begin{pmatrix} f \\ (a+s)/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ (b+t)/2 \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ (a-s)/2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ (b-t)/2i \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Por lo tanto, se sigue de (14) que

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} (a+s)/2 \\ (a-s)/2i \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} (b+t)/2 \\ (b-t)/2i \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{1}{2i}(\langle s, t\rangle - \langle a, b\rangle) \\ &= \frac{1}{2i}\left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle\,, \end{aligned}$$

como se quería. □

Observación 3.4. *La proposición 3.3 señala que las definiciones 3.1 y 3.2 son equivalentes.*

A causa de la relación que tiene la identidad abstracta de Green (13) *con las identidades usuales de Green, la definición 3.1 es la más común en la literatura. Sin embargo, la definición 3.2 es de gran utilidad para mostrar la existencia de un triplete fronterizo (ver demostración del teorema 3.5).*

Se cita a (Rios-Cangas and Silva, 2020, teorema 4.6) para asumir la primera fórmula de von Neumann

$$A^* = \overline{A} \oplus \mathrm{N}_{-i}(A^*) \oplus \mathrm{N}_i(A^*)\,, \tag{17}$$

donde

$$\mathrm{N}_\alpha(A^*) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \alpha f \end{pmatrix} \in A^* \right\}\,, \quad \alpha \in \mathbb{C}\,,$$

es un operador cerrado y acotado.

Teorema 3.5. *Si $\dim \mathrm{N}_i(A^*) = \dim \mathrm{N}_{-i}(A^*)$ entonces existe un triplete fronterizo $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ para A^*.*

Demostración. Si $\dim \mathrm{N}_i(A^*) = \dim \mathrm{N}_{-i}(A^*)$, entonces existe una isometría $V\colon \mathcal{D}(\mathrm{N}_i(A^*)) \to \mathcal{D}(\mathrm{N}_{-i}(A^*))$. De (17) se tiene que cada elemento en A^* se representa como

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f} + u + v \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix} \subset A^*\,, \tag{18}$$

con $\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \in \overline{A}$, $\begin{pmatrix} u \\ -iu \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_{-i}(A^*)$ y $\begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_i(A^*)$. Considere el espacio de Hilbert $\mathcal{K} \coloneqq \mathcal{D}(\mathrm{N}_{-i}(A^*))$ y con base en (18), defina las relaciones lineales

$$\begin{aligned} \Gamma_+ &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 2u \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix} \in A^* \right\}\,, \\ \Gamma_- &\coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 2Vv \end{pmatrix} \,:\, \begin{pmatrix} f \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix} \in A^* \right\}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Es claro que Γ_+, Γ_- son relaciones lineales contenidas en Γ (véase (12)) y $\mathcal{D}(\Gamma_+) = \mathcal{D}(\Gamma_-) = \mathcal{D}(A^*)$, por lo que solo basta mostrar que $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ cumple la definición 3.2.

Siguiendo la notación de (18) y (19), para $\begin{pmatrix} f \\ 2u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ 2x \end{pmatrix} \in \Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} f \\ 2Vv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ 2Vy \end{pmatrix} \in \Gamma_-$, con $\begin{pmatrix} f \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \hat{k} - ix + iy \end{pmatrix} \subset A^*$, se sigue de la proposición 2.11.(3) y de la ortogonalidad de (17) que

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \hat{f} + u + v \\ \hat{g} - iu + iv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\hat{k} + ix - iy \\ \hat{h} + x + y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u \\ -iu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ix \\ x \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -iy \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -2i(\langle v, y\rangle - \langle u, x\rangle) \\ &= \frac{1}{2i}(\langle 2Vv, 2Vy\rangle - \langle 2u, 2x\rangle) = \frac{1}{2i}\left\langle \begin{pmatrix} 2u \\ 2Vv \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} 2Vy \\ 2x \end{pmatrix} \right\rangle\end{aligned}$$

de donde se satisface la definición 3.2.(2). Para la definición 3.2.(1), si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, entonces $\begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -iy \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_{-i}(A^*)$ y existe $\begin{pmatrix} v \\ iv \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_i(A^*)$ tal que $y = Vv$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x + v \\ -ix + iv \end{pmatrix} \in \mathrm{N}_{-i}(A^*) \oplus \mathrm{N}_i(A^*) \subset A^*,$$

que de (19) se tiene $\begin{pmatrix} (x+v)/2 \\ x \end{pmatrix} \in \Gamma_+$ y $\begin{pmatrix} (x+v)/2 \\ y \end{pmatrix} \in \Gamma_-$. □

La afirmación inversa del teorema 3.5 también se cumple y se abordará en la subsección 3.2 (véase teorema 3.15).

Lema 3.6. *Si $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete para A^*, entonces*

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \mathcal{N}(\Gamma_0) \cap \mathcal{N}(\Gamma_1).$$

Demostración. Si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \overline{A} \subset A^*$ entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Para mostrar $\mathcal{D}(\overline{A}) \subset \mathcal{N}(\Gamma_0) \cap \mathcal{N}(\Gamma_1)$ es suficiente verificar que $a = s = 0$. Para cada $\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Como $\overline{A} \subset A^*$, se tiene $\langle f, k\rangle = \langle g, h\rangle$ y de (13) se tiene que

$$\begin{aligned}\langle s, b\rangle - \langle a, t\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle g, h\rangle - \langle f, k\rangle = 0,\end{aligned}$$

de donde (6) y (7) implican $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in (\mathcal{K} \oplus \mathcal{K})^* = (\mathcal{K} \oplus \mathcal{K})^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Para la otra contención, si $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ y para cada $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ se tienen $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así,

$$\langle g, h\rangle - \langle f, k\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

lo que implica $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^{**} = \overline{A}$, i.e., $\mathcal{N}(\Gamma_0) \cap \mathcal{N}(\Gamma_1) \subset \mathcal{D}(\overline{A})$. □

3.2. Extensiones disipativas de relaciones simétricas

En lo siguiente se asume que A es una relación simétrica y $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete fronterizo para A^* (ver definición 3.1).

Definición 3.7. *El operador* canónico $\mathfrak{U}\colon A^* \to \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ *de A viene dado por*

$$\mathfrak{U}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \quad \textit{donde} \quad \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*, \begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \ \textit{y} \ \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1.$$

Teorema 3.8. *El operador canónico es en efecto un operador lineal sobreyectivo con $\mathcal{N}(\mathfrak{U}) = \overline{A}$.*

Demostración. Para ver que $\mathfrak{U}$ es lineal, si $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ entonces se tienen $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así, para $\alpha \in \mathbb{C}$, se sigue que $\begin{pmatrix} f + \alpha h \\ g + \alpha k \end{pmatrix} \in A^*, \begin{pmatrix} f + \alpha h \\ a + \alpha b \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} f + \alpha h \\ s + \alpha t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$ y

$$\mathfrak{U}\left(\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a + \alpha b \\ s + \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + \alpha\mathfrak{U}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Ahora, para mostrar que $\mathfrak{U}$ es un operador, es suficiente ver que su multivaluado es trivial. Si $\mathfrak{U}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}$, se sigue que $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Como $\begin{pmatrix} s \\ -a \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_0$, $\begin{pmatrix} h \\ -a \end{pmatrix} \in \Gamma_1$ y

$$\begin{aligned}\|a\|^2 + \|s\|^2 &= \langle a, a\rangle + \langle s, s\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} s \\ -a \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = 0,\end{aligned}$$

de donde se obtiene que $a = s = 0$ y $\mathcal{M}(\mathfrak{U}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

La sobreyectividad de $\mathfrak{U}$ y $\mathcal{N}(\mathfrak{U}) = \overline{A}$ es consecuencia de la definición 3.1.(1) y lema 3.6, respectivamente. □

Definición 3.9. *Se dice que una relación S es* extensión canónica *de A si*

$$A \subset S \subset A^*.$$

En particular, $\overline{A}$ es extensión canónica de A. Se cumple de la observación 2.12 que cualquier extensión disipativa de A es extensión canónica de A.

Las extensiones canónicas se estudiarán por medio del operador canónico $\mathfrak{U}$. Es directo ver del teorema 3.8 que

$$\mathfrak{U}^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \overline{A} \quad \text{y} \quad \mathfrak{U}^{-1}\mathcal{K} \oplus \mathcal{K} = A^*.$$

Además, una extensión canónica A implica una relación lineal en $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ mientras que una relación lineal en $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ proviene de una extensión canónica de A.

Para efectos prácticos, a partir de aquí se asume que la relación simétrica A es cerrada.

Proposición 3.10. *Dadas dos extensiones canónicas S y $\hat{S}$ de A se cumple que*

$$\mathfrak{U}S = \mathfrak{U}\hat{S} \quad \textit{si y solo si} \quad S = \hat{S}\,. \tag{20}$$

Demostración. Como $\mathfrak{U}$ es operador, $\mathfrak{U}S = \mathfrak{U}\hat{S}$ si $S = \hat{S}$.

Por otra parte, se puede descomponer

$$S = A \oplus V_S \quad \text{y} \quad \hat{S} = A \oplus V_{\hat{S}}\,, \tag{21}$$

donde $V_S = S \ominus A, V_{\hat{S}} = \hat{S} \ominus A \subset A^* \ominus A$. Como $\mathfrak{U}$ es sobreyectivo y $\mathcal{N}(\mathfrak{U}) = A$ (véase teorema 3.8) se sigue que $\mathfrak{U}\restriction_{A^*\ominus A}$ es biyectivo. Así, si $\mathfrak{U}S = \mathfrak{U}\hat{S}$ entonces

$$\mathfrak{U}V_S = \mathfrak{U}S = \mathfrak{U}\hat{S} = \mathfrak{U}V_{\hat{S}}\,,$$

de donde $V_S = V_{\hat{S}}$. Por lo tanto, se sigue de (21) que $S = \hat{S}$. □

Observación 3.11. *Para una extensión canónica S de A y una relación lineal B en $\mathcal{K}$, se tiene que*

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}S = S \quad y \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U}^{-1}B = B\,. \tag{22}$$

Ciertamente, se tiene de (21) *que*

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}S = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}V_S = A \oplus V_S = S\,.$$

Ahora, haciendo $B = \mathfrak{U}S$ y usando lo anterior se llega a

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^{-1}B = \mathfrak{U}\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}S = \mathfrak{U}S = B\,.$$

El siguiente resultado es consecuencia directa de la proposición 3.10 y observación 3.11.

Corolario 3.12. *Las extensiones canónicas de A están en correspondencia unívoca con las relaciones lineales en $\mathcal{K}$.*

Es sencillo ver que el adjunto de una extensión canónica de A es también extensión canónica de A.

Lema 3.13. *Para B una relación lineal arbitraria en $\mathcal{K}$ y S una extensión canónica arbitraria de A, lo siguiente se cumple:*

(1) $\mathfrak{U}(S^*) = (\mathfrak{U}S)^*$.
(2) $\mathfrak{U}^{-1}(B^*) = (\mathfrak{U}^{-1}B)^*$.

Demostración. (1): Si $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}(S^*)$ entonces existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Así, para todo $\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}S$ existe $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$ tal que $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, lo que implica $\langle g, h\rangle = \langle f, k\rangle$ y

$$\begin{aligned} \langle s, b\rangle - \langle a, t\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = \langle g, h\rangle - \langle f, k\rangle\,, \end{aligned} \tag{23}$$

de donde $\langle s, b\rangle = \langle a, t\rangle$ y $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in (\mathfrak{U}S)^*$. Para la otra contención, si $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in (\mathfrak{U}S)^* \subset \mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ entonces de la definición 3.2.(1) existe $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in A^*$ tal que $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Ahora, para $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in S$ se tiene $\begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}S$ con $\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \begin{pmatrix} h \\ t \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, y de (23), como $\langle s, b\rangle = \langle a, t\rangle$, se llega a $\langle g, h\rangle = \langle f, k\rangle$, i.e., $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S^*$ y $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}(S^*)$.

(2): usando el punto (1), las igualdades (22) y haciendo $S = \mathfrak{U}^{-1}B$, se obtiene

$$\mathfrak{U}^{-1}(B^*) = \mathfrak{U}^{-1}((\mathfrak{U}S)^*) = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{U}(S^*) = S^* = (\mathfrak{U}^{-1}B)^*\,,$$

como se quería. □

El siguiente resultado es directo del lema 3.13, el cual considera las relaciones autoadjuntas en $\mathcal{K}$, dadas por

$$B_0 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} : a \in \mathcal{K} \right\}; \quad B_1 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} : a \in \mathcal{K} \right\}.$$

Corolario 3.14. *Existen dos distinguidas extensiones autoadjuntas de A dadas por $\mathfrak{U}^{-1}B_0$ y $\mathfrak{U}^{-1}B_1$.*

Se había anunciado que el sentido inverso del teorema 3.5 también se cumple, el cual se muestra a continuación y usa el hecho de que si S es una extensión simétrica cerrada de A entonces (Rios-Cangas and Silva, 2020, corolario 4.8 y ecuación (4.22))

$$\dim \mathrm{N}_{\pm i}(A^*) = \dim \mathrm{N}_{\pm i}(S^*) + \dim[S/A]\,. \tag{24}$$

Teorema 3.15. *Si $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ es un triplete fronterizo para A^*, entonces* $\dim \mathrm{N}_i(A^*) = \dim \mathrm{N}_{-i}(A^*)$. *Además,*

$$\dim \mathcal{K} = \dim \mathrm{N}_i(A^*)\,. \tag{25}$$

Demostración. Sea S una extensión autoadjunta de A, la cual existe debido al corolario 3.14. Usando en $S = S^*$ la primera fórmula de von Neumann (17), se sigue que $\dim \mathrm{N}_{\pm i}(S^*) = 0$, mientras que de (24), $\dim \mathrm{N}_{\pm i}(A^*) = \dim[S/A]$, de donde se sigue la primera parte de la afirmación. Ahora, nuevamente de (17) y del teorema 3.8, se tiene que

$$\begin{aligned} 2\dim \mathrm{N}_i(A^*) &= \dim[\mathrm{N}_{-i}(A^*) \oplus \mathrm{N}_i(A^*)] = \dim[A^* \ominus A] \\ &= \dim[\mathfrak{U}(A^* \ominus A)] = \dim[\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}] = 2\dim \mathcal{K}\,, \end{aligned}$$

es decir, (25). □

En lo siguiente se muestra que ciertas propiedades de las extensiones canónicas de A se preservan con sus correspondientes relaciones en $\mathcal{K}$.

Teorema 3.16. *Para dos extensiones canónicas S y L de A, lo siguiente se cumple:*

(1) *$S \subset L$ si y solo si $\mathfrak{U}S \subset \mathfrak{U}L$.*
(2) *$\mathfrak{U}(S \cap L) = \mathfrak{U}S \cap \mathfrak{U}L$.*
(3) *$\mathfrak{U}S$ y $\mathfrak{U}L$ son l.i. (véase definición 1.5) si y solo si $S \cap L = A$.*
(4) *S y $\mathfrak{U}S$ son disipativas (maximales) simultáneamente.*
(5) *S y $\mathfrak{U}S$ son simétricas (autoadjuntas) simultáneamente.*

Demostración. (1): Se sigue directamente de la definición del operador canónico, y de las igualdades (20) y (22).

(2): Se tiene del punto (1) que $\mathfrak{U}(S \cap L) \subset \mathfrak{U}(S), \mathfrak{U}(L)$, es decir, $\mathfrak{U}(S \cap L) \subset \mathfrak{U}S \cap \mathfrak{U}L$. Ahora, si $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}S \cap \mathfrak{U}L$ entonces existen $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$, $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in L$ tales que $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, es decir, $\begin{pmatrix} f - h \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_0, \Gamma_1$. Como $\mathcal{N}(\mathfrak{U}) = A$, se

tiene $\begin{pmatrix} f-h \\ g-k \end{pmatrix} \in A \subset L$, o bien, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L$. Por lo tanto $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S \cap L$ y $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}(S \cap L)$.

(3): Se sigue del punto (2), de las igualdades (20) y del hecho de que $\mathcal{N}(\mathfrak{U}) = A$.

(4): Para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ y $\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}S$, con $\begin{pmatrix} f \\ a \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ s \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, se sigue de la identidad abstracta de Green (13) que

$$-2i \operatorname{Im}\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle - \langle f, g\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} a \\ s \end{pmatrix} \right\rangle = \langle s, a\rangle - \langle a, s\rangle = -2i \operatorname{Im}\langle a, s\rangle \ ,$$

de donde se llega a que S y $\mathfrak{U}S$ son disipativas simultáneamente. La maximalidad es consecuencia del punto (1).

(5): Es consecuencia directa del punto (1) y del lema 3.13. □

El corolario 3.12 nos indica que todas las extensiones canónicas de A, es decir, aquellas relaciones lineales que están entre A y A^*, están parametrizadas por las relaciones lineales en $\mathcal{K}$. Como consecuencia del teorema 3.16, extensiones disipativas, simétricas y autoadjuntas de A, corresponden a relaciones disipativas, simétricas y autoadjuntas en $\mathcal{K}$, respectivamente. De este modo, el problema de encontrar extensiones disipativas de A se reduce a encontrar relaciones disipativas en $\mathcal{K}$, las cuales por lo general es posible con argumentos sencillos (ver sección 4). Por ejemplo, en virtud del corolario 3.14 siempre se puede encontrar extensiones autoadjuntas de A, caso que no siempre es posible con la segunda fórmula de von Neumann (Rios-Cangas and Silva, 2020, teorema 4.7).

4. Ejemplos

Esta sección muestra dos ejemplos en donde se caracterizan las extensiones disipativas de una relación simétrica cerrada mediante tripletes fronterizos.

Primeramente, se caracteriza a todas las relaciones lineales disipativas en un espacio de Hilbert unidimensional $\mathcal{K}$.

Observación 4.1. *Las únicas relaciones lineales en $\mathcal{K}$ con mutivaluado no trivial son $\mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ y*

$$\mathrm{B}_\infty := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} : f \in \mathcal{K} \right\} = \{0\} \oplus \mathcal{K} . \tag{26}$$

En efecto, si L es una relación lineal con $\mathcal{M}(L) \neq \{0\}$, entonces $1 \leq \dim L \leq 2$. Si $\dim L = 2$ se tiene $L = \mathcal{K}\oplus\mathcal{K}$ ya que tienen la misma dimensión, mientras que para $\dim L = 1$ entonces $\mathcal{D}(L) = \{0\}$, $L \subset \mathrm{B}_\infty$ e iguales, a causa de la dimensión.

Las relaciones lineales $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y B_∞ son simétricas, pues satisfacen la definición 2.9. De hecho, B_∞ es autoadjunta, debido a que es la inversa del operador cero en $\mathcal{K}$.

Lema 4.2. *Todas las relaciones disipativas no triviales en $\mathcal{K}$ son maximales (ver definición 2.4) y están en correspondencia uno-a-uno con $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, las cuales vienen dadas por B_∞ en (26) y*

$$\mathrm{B}_\tau := \tau I , \quad \tau \neq \infty . \tag{27}$$

Para $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se cumple que B_τ es autoadjunta.

Demostración. Es directo ver de la definición 2.1 que los operadores (27) son disipativos. Ahora, si S es una relación disipativa no trivial entonces $S \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, i.e., S tiene dimensión uno y por consiguiente es maximal. Si S tiene multivaluado distinto de cero, de la observación 4.1 se tiene que $S = \mathrm{B}_\infty$, por lo que basta mostrar que si S es operador entonces es de la forma (27). Para $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in S$ distinto de cero, existe $\tau \neq 0$ tal que $g = \tau f$, ya que $\mathcal{K}$ es unidimensional y como S es disipativo,

$$0 \leq \operatorname{Im}\langle f, g\rangle = \|f\|^2 \operatorname{Im}\tau ,$$

lo que implica $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$. El parámetro τ no depende de los elementos de S, ciertamente, para $\begin{pmatrix} f \\ \tau f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \hat{\tau} h \end{pmatrix} \in S$ distintos de cero, se obtiene que $h = \beta f$, para algún $\beta \in \mathbb{C}$ no cero y $\begin{pmatrix} f \\ \hat{\tau} f \end{pmatrix} \in S$, es decir, $\begin{pmatrix} 0 \\ (\tau - \hat{\tau}) f \end{pmatrix} \in S$, lo cual implica $\tau = \hat{\tau}$. Así, $S \subset \tau I$ y por ende iguales, debido a que S es maximal. □

4.1. Perturbación unidimensional

Sea L una relación autoadjunta en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Considere $\varphi \in \mathcal{D}(L)$ de norma uno y $Z = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\}$. Se sigue del lema 2.5 que L y Z son l.i. (vea definición 1.5) y uno puede calcular directamente de la definición 1.6 que

$$Z^* = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} : r \in \{\varphi\}^\perp \ \text{ y } \ s \in \mathcal{H} \right\} .$$

De esta manera,

$$A = L \cap Z^* \tag{28}$$

es una relación simétrica cerrada cuya adjunta viene dada por (Rios-Cangas, 2021, corolario 4)

$$A^* = L \dotplus Z \tag{29}$$

Sea $\mathcal{K} = \operatorname{span}\{\varphi\}$ y P_k la proyección ortogonal sobre $\mathcal{K}$.

Proposición 4.3. *La terna $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete fronterizo para A^*, donde*

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ P_k f \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in A^* \right\} ; \\ \Gamma_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ \alpha\varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g + \alpha\varphi \end{pmatrix} \in A^* , \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L , \alpha \in \mathbb{C} \right\} . \end{aligned} \tag{30}$$

Demostración. Para $\begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ \beta\varphi \end{pmatrix} \in \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, existe $\begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ g \end{pmatrix} \in L$ y de (29) se tiene $\begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ g + \beta\varphi \end{pmatrix} \in A^*$, lo que implica de (30) que $\alpha\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ \beta\varphi \end{pmatrix} \in \Gamma_1$, i.e., definición 3.1.(1). Ahora de (29), para $\begin{pmatrix} f \\ g + \alpha\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k + \beta\varphi \end{pmatrix} \in A^*$, con $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \in L$ y

$\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, se tienen $\begin{pmatrix} f \\ P_k f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ P_k h \end{pmatrix} \in \Gamma_0$ y $\begin{pmatrix} f \\ \alpha\varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \beta\varphi \end{pmatrix} \in \Gamma_1$. Como L es autoadjunta, $\langle g,h\rangle - \langle f,k\rangle = 0$ y

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g+\alpha\varphi \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ k+\beta\varphi \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle f, -\beta\varphi\rangle + \langle \alpha\varphi, h\rangle \\ &= \langle P_k f, -\beta\varphi\rangle + \langle \alpha\varphi, P_k h\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} P_k f \\ \alpha\varphi \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} P_k h \\ \beta\varphi \end{pmatrix} \right\rangle ,\end{aligned}$$

de donde se cumple (13). □

Observación 4.4. *Los multivaluados de las relaciones* (30) *son* $\mathcal{M}(\Gamma_0) = \{0\}$ *y* $\mathcal{M}(\Gamma_1) = \operatorname{span}\{\varphi\}$. *Lo que implica que* Γ_0 *es un operador lineal mientras que* Γ_1 *es una relación que no es operador lineal.*

En lo siguiente se caracterizan todas las extensiones disipativas maximales de la relación (28).

Teorema 4.5. *Las extensiones disipativas maximales de A están en correspondencia uno-a-uno con* $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$*, las cuales son perturbaciones unidimensionales de L dadas por*

$$L_\tau = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g + \tau\langle \varphi, f\rangle \varphi \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in L \right\}, \quad \tau \neq \infty , \tag{31}$$

mientras que

$$L_\infty = A \dotplus Z . \tag{32}$$

Además, L_τ *es autoadjunta para* $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Demostración. Es sencillo verificar que las relaciones (31) y (32) son extensiones disipativas de A, y autoadjuntas para $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Por lo tanto, como $\mathcal{K}$ es unidimensional, del lema 4.2 y del teorema 3.16 se tiene que las extensiones disipativas de A son maximales y están en correspondencia uno-a-uno con $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. □

4.2. Operadores de Schrödinger unidimensionales

Mediante la teoría de tripletes fronterizos, esta subsección muestra una caracterización de todas las extensiones disipativas del operador de Schrödinger unidimensional que satisface ciertas condiciones.

Sea $0 < a < \infty$ fijo, $L_2(0,a)$ y $L_1(0,a)$ los espacios de las funciones cuadrado integrables y absolutamente integrables, respectivamente, con respecto a la medida de Lebesgue sobre $(0,a)$. Además, sea $C_0^\infty(0,a)$ el espacio de las funciones continuas infinitamente diferenciables cuyo soporte es un subconjunto compacto de $(0,a)$.

Considere la forma diferencial de Schrödinger dada por

$$H \coloneqq -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) ,$$

como un operador lineal sobre $L_2(0,a)$, donde $V(x)$ es una función de valores reales en $L_1(0,a)$. De esta manera, denote

$$A_0 = H\restriction_{C_0^\infty(0,a)} \quad \text{y} \quad A_{\min} = \overline{A}_0 .$$

Ahora bien, para $0 < \alpha < \beta < a$, sea $AC[\alpha,\beta]$ el espacio de las funciones absolutamente continuas sobre $[\alpha,\beta]$ y defina

$$M \coloneqq \{f \in L_2(0,a) \,:\, f, f' \in AC[\alpha,\beta] \text{ con } [\alpha,\beta] \subset (0,a), \text{ tal que } Hf \in L_2(0,a)\} .$$

Proposición 4.6. *$A_{\min}$ es un operador lineal simétrico densamente definido en $L_2(0,a)$. Además, $A_{\min}^* = H\restriction_M$ y*

$$\dim \mathrm{N}_{\pm i}(A_{\min}^*) = 2 . \tag{33}$$

Además,

$$\{(f(0), f'(0), f(a), f'(a) \,:\, f \in M)\} = \mathbb{C}^4 . \tag{34}$$

(Schmüdgen, 2012, lema 15.1 y corolarios 15.5.(v), 15.7).

Definición 4.7. *Defina el operador $A = H\restriction_{\mathcal{D}(A)}$, donde*

$$\mathcal{D}(A) \coloneqq \{f \in \mathcal{D}(A_{\min}^*) \,:\, f'(0) = f(a) = f'(a) = 0\} . \tag{35}$$

Lema 4.8. *El operador A es simétrico, cerrado y densamente definido en $L_2(0,a)$, con adjunta $A^* = H\restriction_{\mathcal{D}(A^*)}$, donde*

$$\mathcal{D}(A^*) = \{f \in \mathcal{D}(A_{\min}^*) \,:\, f'(0) = 0\} . \tag{36}$$

Además, $\dim \mathrm{N}_{\pm i}(A^*) = 1$.

Demostración. Debido a los dominios, $A_{\min} \subsetneq A \subsetneq A_{\min}^*$, es decir, A es extensión canónica de $A_{\min}$ y densamente definido, debido a la proposición 4.6. Además, se sigue de (17) y (33) que $V = A \ominus A_{\min} \subset \mathrm{N}_{-i}(A_{\min}^*) \oplus \mathrm{N}_i(A_{\min}^*)$, es decir, V es subespacio de dimensión finita y $A = A_{\min} \oplus V$ es cerrado. Ahora, usando integración por partes,

$$\langle g, Hf\rangle = f'(0)g(0) + \langle Hg, f\rangle , \quad f, g \in \mathcal{D}(A_{\min}^*) . \tag{37}$$

De este modo, si $f, g \in \mathcal{D}(A)$ en (37) se tiene $\langle g, Af\rangle = \langle Ag, f\rangle$, o bien, A es simétrico. Como $A_{\min} \subsetneq A$, A es simétrico y $\mathcal{D}(A) \subsetneq \mathcal{D}(A^*)$, se cumple la siguiente cadena

$$A_{\min} \subsetneq A \subsetneq A^* \subsetneq A_{\min}^* . \tag{38}$$

Así, se sigue de (37) que $\langle g, A^* f\rangle = \langle Ag, f\rangle = \langle g, Hf\rangle$, para $g \in \mathcal{D}(A)$, si y solo si $f \in \mathcal{D}(A_{\min}^*)$ y $f'(0) = 0$, lo que implica (36). De (24), (33) y (38) se tiene $1 \leq \dim[A/A_{\min}] < \infty$ y

$$\dim \mathrm{N}_{\pm i}(A^*) = 2 - \dim[A/A_{\min}] \leq 1 ,$$

de donde se concluye que $\dim \mathrm{N}_{\pm i}(A^*) = 1$, ya que si es cero se tiene de (17) que $A = A^*$, lo cual no es posible por (38). □

En lo siguiente se caracterizan las extensiones disipativas del operador (35) mediante el uso de tripletes fronterizos. La existencia del triplete del siguiente resultado se tiene debido al lema 4.8, a la observación 3.4 y a los teoremas 3.5 y 3.15.

Lema 4.9. *La terna $(\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete fronterizo para A^*, donde*

$$\Gamma_0 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f'(a) \end{pmatrix} : f \in \mathcal{D}(A^*) \right\} ; \quad \Gamma_1 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f(a) \end{pmatrix} : f \in \mathcal{D}(A^*) \right\} .$$

Demostración. Se sigue de (34) y (36) que

$$\left\{ \begin{pmatrix} f'(a) \\ f(a) \end{pmatrix} : f \in \mathcal{D}(A^*) \right\} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} , \tag{39}$$

de donde se cumple la definición 3.1.(1). Además, usando integración por partes, se obtiene para $f, h \in \mathcal{D}(A^*)$ que

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} f \\ A^* f \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h \\ A^* h \end{pmatrix} \right\rangle &= \langle Hf, h\rangle - \langle f, Hh\rangle \\ &= -\overline{f'(a)}h(a) + \overline{f(a)}h'(a) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f'(a) \\ f(a) \end{pmatrix}, \mathrm{W}\begin{pmatrix} h'(a) \\ h(a) \end{pmatrix} \right\rangle ,\end{aligned} \tag{40}$$

i.e., la identidad abstracta de Green de la definición 3.1.(2). □

Observación 4.10. *La segunda igualdad de* (40) *esclarece la relación entre la identidad abstracta de Green* (13) *y la usual que se tiene en la literatura.*

Teorema 4.11. *Todas las extensiones disipativas maximales L_τ de A son densamente definidas en $L_2(0,a)$ y están parametrizadas por $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dadas por $L_\tau = H\restriction_{\mathcal{D}(L_\tau)}$, donde*

$$\mathcal{D}(L_\tau) = \{f \in M \,:\, f'(0) = 0\,, f(a) = \tau f'(a)\}\,, \quad \tau \neq \infty\,, \tag{41}$$

mientras que

$$\mathcal{D}(L_\infty) = \{f \in M \,:\, f'(0) = f'(a) = 0\}\,. \tag{42}$$

Para $\tau \in \cup\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se cumple que L_τ es autoadjunta.

Demostración. De la observación 2.12 y del lema 4.8 se tiene que las extensiones disipativas de A son densamente definidas en $L_2(0,a)$. Además, del lema 4.2 y de (39) se tiene que las relaciones disipativas no triviales en $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ son maximales y están unívocamente en correspondencia con $\tau \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dadas por las relaciones lineales

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_\tau &= \left\{\begin{pmatrix} f'(a) \\ \tau f'(a)\end{pmatrix} \,:\, f \in \mathcal{D}(A^*)\right\}\,, \quad \text{mientras que} \\ \mathrm{B}_\infty &= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ f(a)\end{pmatrix} \,:\, f \in \mathcal{D}(A^*)\right\}\,, \end{aligned} \tag{43}$$

las cuales son autoadjuntas para $\tau \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Por lo tanto, el teorema 3.16, el lema 4.9, (36) y (43) implican que todas las extensiones disipativas maximales de A son las que están parametrizadas con las condiciones de frontera (41) y (42). □

Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por los proyectos CONACYT-México CBF2023-2024-1842 y UAM-DAI 2024: "Enfoque Analítico-Combinatorio y su Equivalencia de Estados Gaussianos". El autor expresa su gratitud al árbitro anónimo por su atenta lectura, comentarios y recomendaciones sobre el manuscrito.

Referencias

Acharya, K. R. (2014). Self-adjoint extension and spectral theory of a linear relation in a Hilbert space. *ISRN Math. Anal.*, pages Art. ID 471640, 5.

Arens, R. (1961). Operational calculus of linear relations. *Pacific J. Math.*, 11:9–23.

Azizov, T. Y., Dijksma, A., and Wanjala, G. (2013). Compressions of maximal dissipative and self-adjoint linear relations and of dilations. *Linear Algebra Appl.*, 439(3):771–792.

Behrndt, J., Hassi, S., and de Snoo, H. ([2020] ©2020). *Boundary value problems, Weyl functions, and differential operators*, volume 108 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser/Springer, Cham.

Birman, M. S. and Solomjak, M. Z. (1987). *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

Bolaños Servín, J. R., Quezada, R., and Rios-Cangas, J. I. (2023). Elementos Matemáticos de la Mecánica Cuántica. *Revista Metropolitana de Matemáticas - Mixba´al*, 14(1):143–222.

Calkin, J. W. (1939). Abstract symmetric boundary conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 45(3):369–442.

Coddington, E. A. (1973). *Extension theory of formally normal and symmetric subspaces*. American Mathematical Society, Providence, R.I. Memoirs of the American Mathematical Society, No. 134.

Cross, R. (1998). *Multivalued linear operators*, volume 213 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York.

Cross, R., Favini, A., and Yakubov, Y. (2011). Perturbation results for multivalued linear operators. In *Parabolic problems*, volume 80 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 111–130. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel.

Derkach, V. (2015). *Boundary Triplets, Weyl Functions, and the Kreĭn Formula*, pages 183–218. Springer Basel, Basel.

Derkach, V., Hassi, S., and Malamud, M. (2020). Generalized boundary triples, I. Some classes of isometric and unitary boundary pairs and realization problems for subclasses of Nevanlinna functions. *Math. Nachr.*, 293(7):1278–1327.

Derkach, V., Hassi, S., and Malamud, M. (2022). Generalized boundary triples, II. Some applications of generalized boundary triples and form domain invariant Nevanlinna functions. *Math. Nachr.*, 295(6):1113–1162.

Derkach, V. A. and Malamud, M. M. (1991). Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps. *J. Funct. Anal.*, 95(1):1–95.

Derkach, V. A. and Malamud, M. M. (1995). The extension theory of Hermitian operators and the moment problem. *J. Math. Sci.*, 73(2):141–242. Analysis. 3.

Dijksma, A. and de Snoo, H. S. V. (1974). Self-adjoint extensions of symmetric subspaces. *Pacific J. Math.*, 54:71–100.

Fernandez Miranda, M. and Labrousse, J.-P. (2005). The Cayley transform of linear relations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(2):493–499.

Gorbachuk, V. I. and Gorbachuk, M. L. (1991). *Boundary value problems for operator differential equations*, volume 48 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. Translated and revised from the 1984 Russian original.

Hassi, S., De Snoo, H., and Winkler, H. (2000a). Boundary-value problems for two-dimensional canonical systems. *Integral Equations Operator Theory*, 36(4):445–479.

Hassi, S., Remling, C., and de Snoo, H. (2000b). Subordinate solutions and spectral measures of canonical systems. *Integral Equations Operator Theory*, 37(1):48–63.

Hassi, S., Sebestyén, Z., de Snoo, H. S. V., and Szafraniec, F. H. (2007). A canonical decomposition for linear operators and linear relations. *Acta Math. Hungar.*, 115(4):281–307.

Jurˇ sėnas, R. (2023). On the similarity of boundary triples of symmetric operators in Krein spaces. *Complex Anal. Oper. Theory*, 17(5):Paper No. 72, 39.

Koˇ cubeĭ, A. N. (1975). Extensions of symmetric operators and of symmetric binary relations. *Mat. Zametki*, 17:41–48.

Krein, M. G. and Langer, G. K. (1971). The defect subspaces and generalized resolvents of a Hermitian operator in the space Π_κ. *Funkcional. Anal. i Priložen*, 5(2):59–71.

Kreˇ in, M. G. and Langer, G. K. (1971). The defect subspaces and generalized resolvents of a Hermitian operator in the space Π_κ. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 5(3):54–69.

Phillips, R. S. (1959). Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90:193–254.

Rios-Cangas, J. I. (2021). Operadores simétricos multivaluados y el problema de momentos de Hamburger truncado. *Revista Metropolitana de Matemáticas - Mixba´al*, 12(1):33–45.

Rios-Cangas, J. I. and Silva, L. O. (2020). Dissipative extension theory for linear relations. *Expo. Math.*, 38(1):60–90.

Schmüdgen, K. (2012). *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, volume 265 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht.

Sz.-Nagy, B. (1953). Sur les contractions de l'espace de Hilbert. *Acta Sci. Math. Szeged*, 15:87–92.

von Neumann, J. (1930). Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. *Math. Ann.*, 102(1):49–131.

von Neumann, J. (1950). *Functional Operators. II. The Geometry of Orthogonal Spaces*. Annals of Mathematics Studies, no. 22. Princeton University Press, Princeton, N. J.